

1. VJEŽBA

Razmatranje efekata otipkavanja

Da bi se analogni, vremenski kontinuirani signal mogao digitalno obrađivati potrebno ga je otipkati u vremenu. To znači da od vremenski kontinuiranog signala uzimamo samo određene uzorke. Ti se uzorci uzimaju najčešće s jednakim vremenskim razmakom T . Takav T se naziva period otipkavanja, pa vremenske trenutke u kojima se obavlja otipkavanje možemo opisati nizom:

$$t_n = T \cdot n, \quad -\infty < n < \infty. \quad (1.1)$$

Tim postupkom se od vremenski kontinuiranog signala $x_c(t)$ dobiva diskretni niz uzoraka $x[n]$, prema:

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (1.2)$$

Spektar vremenski diskretnog signala dobivenog otipkavanjem s periodom T je **kontinuirana funkcija periodična s periodom 2π** . Pri tome vremenski kontinuiranoj sinusoidi kružne frekvencije Ω odgovara diskretna sinusoida frekvencije ω i vrijedi:

$$\omega = \Omega T \quad [\text{rad}]. \quad (1.3)$$

Općenito, veza između spektra kontinuiranog signala $X_c(j\Omega)$ i spektra diskretnog signala $X(e^{j\omega})$ dana je izrazom:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi \cdot n}{T}). \quad (1.4)$$

Važan kriterij kojeg treba uzeti u obzir kod odabira frekvencije otipkavanja kontinuiranog signala dan je **Nyquist-ovim teoremom otipkavanja** koji slijedi. Neka je $x_c(t)$ frekvencijski ograničen signal za koji vrijedi:

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad \text{za } |\Omega| > \Omega_N. \quad (1.5)$$

Tada je $x_c(t)$ jednoznačno određen svojim uzorcima $x[n] = x_c(nT)$, $-\infty < n < \infty$ ako vrijedi da je:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N. \quad (1.6)$$

Drugim riječima, to znači da ako je najviša kružna frekvencija sadržana u signalu Ω_N , tada signal treba otipkavati s barem dvostruko većom frekvencijom Ω_s . U tom slučaju u diskretnom nizu $x[n]$ sačuvana je sva informacija sadržana u izvornom signalu $x_c(t)$. Ako frekvencija signala pređe pola frekvencije otipkavanja, dolazi do pojave koja se naziva **aliasing**, a posljedica je periodičnosti spektra diskretnog signala.

Pojavu možemo prikazati jednostavnim primjerom. Za sinusni (kosinusni) signal frekvencije 90 Hz dan izrazom:

$$x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 90t) \quad (1.7)$$

i frekvencije otipkavanja $f_s = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}$, dobivamo diskretni niz:

$$x[n] = \cos\left(2\pi \cdot \frac{90}{100} n\right) \quad (1.8)$$

koji je identičan nizu:

$$x_a[n] = \cos\left(2\pi \cdot \frac{10}{100} n\right). \quad (1.9)$$

što se može lako pokazati. To znači da kosinusoide frekvencija 10 Hz i 90 Hz imaju istog reprezentanta u vremenski diskretnoj domeni, pa je nakon otipkavanja nemoguće odrediti o kojoj se od njih dvije radilo. Isti niz dobili bi za frekvencije signala 110 Hz, 190 Hz, 210 Hz itd.

U praktičnoj primjeni, radi sprječavanja pojave aliasinga, se signal prije otipkavanja propušta kroz nisko propusni filter s graničnom frekvencijom $f_s / 2$ ili nižom, čime se ponište (priguše) sve više frekvencije koje bi nakon otipkavanja mogle prouzročiti aliasing. Takvi filteri su poznati pod nazivom **anti-alias filteri**.

Rekonstrukcija frekvencijski ograničenog otipkanog signala na osnovu njegovih vremenskih uzoraka

Ako je kontinuirani signal otipkan tako da nema aliasing-a, tada je moguće na osnovu dobivenih uzoraka signala $x[n]$ rekonstruirati izvorni vremenski kontinuirani signal. To se postiže primjenom interpolacijske funkcije oblika $\sin(x) / x$ prema izrazu:

$$x_r(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-lT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-lT)}{T}}, \quad (1.10)$$

gdje su $x[l]$ uzorci diskretnog signala, a $x_r(t)$ je rezultirajući rekonstruirani kontinuirani signal koji ima definiranu vrijednost za svaki trenutak t . Kao što se vidi iz (1.10), neki uzorak $x[l]$ treba pomnožiti s pripadnom interpolacijskom funkcijom kojoj je ishodište pomaknuto upravo na mjesto dotičnog uzorka. Za trenutak $t = lT$ koji odgovara tom uzorku, i nazivnik i brojnik interpolacijske funkcije su jednaki nuli pa se dobiva kvocijent $0/0$ koji je u limesu jednak 1. Za dotični t , umnožak interpolacijske funkcije i vrijednosti samog uzorka upravo je jednak samom uzorku. Za sve ostale $t = jT$, $j \neq l$, koji korespondiraju mjestima ostalih uzoraka, umnožak je jednak nuli jer je argument sinusne funkcije višekratnik od π , pa je brojnik uvijek jednak 0, a nazivnik je različit od nule. Kada se množenje izvede za sve uzorke i doprinosi zbroje, u rekonstruiranom signalu na mjestima $t = nT$ ostaje doprinos samo n -tog uzorka i vrijedi:

$$x_r(nT) = x[n]. \quad (1.11)$$

To vrijedi za bilo koji n . Vrijednost interpolacijske funkcije između uzoraka dobiva se sumacijom doprinosa svih uzoraka prema danoj formuli.

Realni sinusni (kosinusni) niz

Realni sinusni niz definiran je izrazom $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, a A , ω_0 , ϕ su realni brojevi, gdje je A amplituda, ω_0 kružna frekvencija u radijanima/uzorku, te ϕ početna faza. Niz će biti periodičan s P (isti uzorci se ponavljaju nakon P uzoraka) ako vrijedi:

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 (n + P) + \phi), \quad (1.12)$$

a to će biti zadovoljeno ako je:

$$\omega_0 \cdot P = 2\pi \cdot k, \quad \text{odnosno} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{k}, \quad (1.13)$$

Drugim riječima, ako je umnožak $\omega_0 P$ cjelobrojni višekratnik od 2π (P i k su cijeli brojevi), sinusni niz će biti periodičan. Najmanji P za koji vrijedi gornji uvjet, naziva se osnovni period niza. Ako u gornjem uvjetu P/k nije racionalni broj, niz neće biti periodičan iako će imati anvelopu oblika sinusoida.

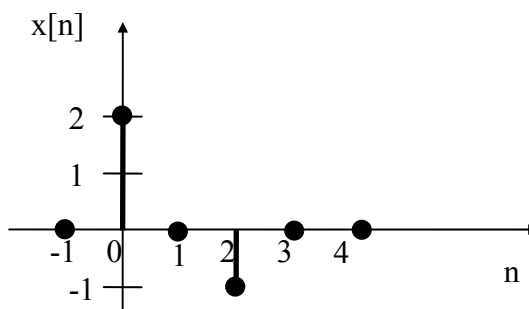
Lako se može pokazati da iz same definicije sinusnog niza proizlaze slijedeća interesantna svojstva. Niz uzoraka dobiven uz kutnu frekvenciju $\pi + \Delta$ jednak je nizu koji bi se dobio uz frekvenciju $\pi - \Delta$. Slično tome, nizovi dobiveni uz kružne frekvencije Δ i $2\pi - \Delta$ su jednaki. Iz svega ovoga slijedi da su nizovi dobiveni uz kružne frekvencije $\omega_0 + 2k\pi$, $-\pi < \omega_0 < \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **ne mogu razlikovati**, tj. identični su.

Zadatak za pripremu

Za signal prikazan slikom odrediti interpolacijsku funkciju oblika $\frac{\sin(x)}{x}$. Izračunati vrijednost funkcije za $t_1=0.5$ i $t_2=1.5$ ($T=1$), te skicirati doprinose interpolacijske funkcije za svaki od uzoraka.

$$x[n]=0 \text{ za } n < 0$$

$$n > 3$$



Rješenje zadatka:

se može napraviti pomoću Matlab izraza `t=[0:T/broj_toc:L*T]`; gdje srednji broj predstavlja korak, a između dva diskretna uzorka bit će *broj_toc*-1 točaka. Prije izraza za *t*, definirati neki proizvoljni broj točaka, npr. `broj_toc=20`.

c) Ostvariti unos frekvencije vremenski kontinuiranog signala f_0 funkcijom `input` te napisati naredbu za izračunavanje kružne frekvencije vremenski kontinuiranog signala Ω_0 . Na temelju poznatog odnosa, izraziti u Matlabu i kružnu frekvenciju **vremenski diskretnog** signala ω_0 pomoću Ω_0 .

d) Napisati Matlab izraz za 'kontinuirani' kosinusni signal x_c pomoću *t* i f_0 . Također izračunati i niz uzoraka x_s koji odgovaraju vrijednostima signala x_c u trenucima otipkavanja. Ovaj niz se dobiva pomoću *tn* i f_0 .

e) Izračunati uzorke vremenski diskretnog signala x dobivenog otipkavanjem, na temelju kružne frekvencije ω_0 i niza indeksa *n*.

f) Sada prikazati sve dobivene signale. Najprije pozvati funkciju `figure` za otvaranje novog prozora za sliku. U **prvom prozoru** (slici) pomoću funkcije `plot` prikazati signale x_c i x_s , svakog ovisno o pripadnoj vremenskoj osi (*t*, odnosno *tn*) pri čemu uzorke x_s treba prikazati kružićima. Označiti os apscisa oznakom za sekunde naredbom `xlabel('sec');`. Nadalje treba izgenerirati naslov za sliku. Naslov treba sadržavati trenutne vrijednosti varijabli f_0 i *T* (da kasnije znamo uz koje ulazne parametre je slika ostvorena), formatirane na određeni način te napisane u obliku stringa. Za generiranje stringa koristiti naredbu `sprintf` kako slijedi: `str=sprintf('f0=%0.2f, T=%0.2f', f0, T);`, a za postavljanje naslova na sliku: `title(str)`.

g) Ponovno pozvati funkciju `figure`, te u ovom **drugom prozoru** pomoću funkcije `stem` prikazati diskretne uzorke x ovisne o indeksima *n*. Os apscisa označiti pomoću `xlabel('uzorci');` te postaviti isti naslov kao i na prvu sliku.

5. Izvesti program uz slijedeće parametre: $L=10$, $f_0=1$, $T=0.1$ i promotriti slike. Nakon toga izvesti program uz isti *L* i *T*, ali za f_0 izabrati 4, pa onda 6, 9 i 11. Svaki put se generiraju po dvije nove slike. Usporediti ih i odgovoriti na pitanja:

Uz koje frekvencije kontinuiranog signala je nakon otipkavanja dobiven isti diskretni niz uzoraka? Provjerite računski da li rezultati programa odgovaraju teoriji.

Kako se naziva pojava do koje je došlo ? Obratiti pažnju na broj diskretnih uzoraka po jednoj periodu 'kontinuiranog' signala. Koliko ih najmanje mora biti da idealno rekonstruirani signal bude jednak polaznom ?

Zatvoriti sve prozore naredbom `close all`.

OTIPKAVANJE I INTERPOLACIJA SIGNALA (MATLAB APLIKACIJA)

6. Pokrenuti postojeći program **vj1** unosom naredbe **vj1** <ENTER> u komandni prozor MATLAB programskog okruženja. Ovim se otvara novi prozor s grafičkim sučeljem koje omogućava lako i pregledno razmatranje pojava vezanih uz otipkavanje i interpolaciju signala.

Sam izgled grafičkog sučelja dinamički se mijenja u ovisnosti o unesenim parametrima.

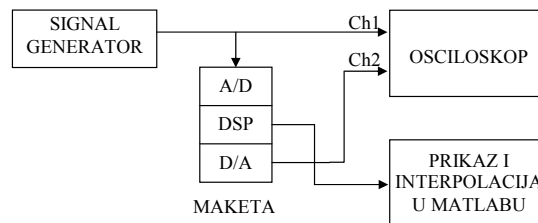
U vježbi će se proučavati efekti diskretizacije signala s posebnim naglaskom na interpolacija signala. Za te potrebe odabrati opciju **otipkavanje sinusnog signala** (padajući izbornik, desno gore). Frekvenciju otipkavanja podesiti na $f_0=50$ Hz, a frekvenciju signala na **5 Hz**. Za odabrani set parametara pritiskom na odgovarajući tab pogledati sam signal, $\sin(x)/x$ interpolaciju otipkanih uzoraka (mora se pričekati dok prođe sve uzorke !), rekonstruirani i izvorni signal te njihovu razliku.

Vidljivo je da je sinusni signal otipkan sa 10 uzoraka po periodi čime je zadovoljen Nyquist-ov kriterij. Uočiti kako se primjenom interpolacijske funkcije na pojedine uzorke i sumacijom pojedinih doprinosa dobiva interpolirani signal. Obratiti pažnju na slijedeće: nakon interpolacije otipkanog signala beskonačnom funkcijom $\sin(x)/x$ bi, prema teoriji, dobiveni rekonstruirani signal morao biti identičan izvornom signalu. Ako se pogleda slika koja prikazuje razliku izvornog i rekonstruiranog signala, uočava se da su dva signala vrlo slična, ali da signal razlike ipak postoji. On je posljedica činjenice da se kod proračuna interpolacijske funkcije u ovom programu zanemaruju doprinosi uzoraka sinusa lijevo i desno od danog (na slici vidljivog) intervala.

Promijeniti frekvenciju signala na **45 Hz** i ponovo pogledati sve karakteristike. Signal koje frekvencije je dobiven interpolacijom ?

OTIPKAVANJE I INTERPOLACIJA NA DSP MAKETI

7. Pokrenuti program **alias**. Program služi za podešavanje frekvencije otipkavanja signala na ulazu u DSP maketu (a to je signal iz funkcijskog generatora). Prvo se u korisničkom sučelju odabere frekvencija otipkavanja, a zatim se potrebne instrukcije za podešavanje frekvencije otipkavanja “spuštaju” na DSP maketu. Dakle, u ovom se zadatku od cijele funkcionalnosti DSP makete koristi samo njen A/D i D/A pretvornik, tj. dio zadužen za otipkavanje i interpolaciju signala. DSP procesor će samo prosljeđivati uzorke sa A/D pretvornika na D/A pretvornik. Blok-shema sustava i tok signala za ovu vježbu dani su na slici.



Odabrati frekvenciju otipkavanja iznosa **8 kHz**, resetirati DSP maketu. Nakon svakog resetiranja makete potrebno je pričekati minimalno 7 sekundi kako bi odradio inicijalizacijski program na DSP procesoru. Odabrati opciju **Prijenos programa na DSP maketu**. Odabrana akcija pokreće program na DSP procesoru koji otipkava ulazni signal (vidljiv na kanalu Ch 1 na osciloskopu) s odabranom frekvencijom otipkavanja i zatim takav signal prosljeđuje, bez obrade, na izlaz iz makete (kanal Ch 2 osciloskopa).

a) Dok program radi mijenjati frekvenciju ulaznog **sinusnog** signala u intervalu **od 1 kHz do 10 kHz** i promatrati signal dobiven na izlazu iz DSP sustava. Objasniti zašto i kako se mijenja frekvencija i amplituda izlaznog signala? Može li se to povezati sa amplitudno frekvencijskom karakteristikom A/D pretvornika? Pogledati uvodni dio skripte o DSP maketi, Slika 1.4.

b) Podesiti na ulazu sinus frekvencije **3.8 kHz** te pogledati izlaz iz makete na Ch2 osciloskopa. Kod toga vremensku bazu osciloskopa podesiti na iznos od **1 ms/ds** (milisekunda po dijelu skale), a osjetljivost Y-osi na **0,2 V/ds**. Odabrati mod rada osciloskopa '**NORM**' i **okidanje na Ch 2**. Kanal Ch 1 isključiti (preklopnik Ch1_Both_Ch2 u položaj Ch 2). Potencijometrom 'LEVEL' podesiti mirnu sliku na osciloskopu. U grubo skicirati sliku u prostor ispod teksta. To što se vidi je rezultat nakon otipkavanja i interpolacije na maketi.

Pritisnuti tipku INTERRUPT na DSP maketi te u programu odabrati opciju **Obrada rezultata sa DSP makete**. Time se prekida izvršavanje programa na DSP maketi, prenose vrijednosti maketom otipkanih uzoraka (njih 4096) u računalo i pokreće MATLAB program za promatranje istih. Program prikazuje otipkane uzorke ulaznog signala, te kroz njih provodi interpolaciju. Promjenom broja promatranih uzoraka (npr. 40 za detaljniji prikaz i 100 za grublji) i rednog broja prvog početnog uzorka pogledati kako izgleda dio otipkanih uzoraka te interpoliranog signala. Skicirati originalni i otipkane uzorke u prostor ispod teksta. Usporediti signal interpoliran u Matlabu sa onim dobivenim na maketi koji je gore precrtan. Komentirati.

U ovom slučaju radi se o otipkavanju signala čija frekvencija je bliska polovici frekvencije otipkavanja (u ovom slučaju 4 kHz). Iako je Nyquist-ov teorem zadovoljen, signal biva uredno otipkan, ali na malo neobičan način. Uzorci su prvo malih vrijednosti, a onda u periodama signala koje slijede postaju sve veći pa se na kraju opet smanjuju. **Uočiti to na prikazu otipkanih uzoraka u Matlabu**. Kod interpolacije u Matlabu nema problema i signal je uredno rekonstruiran jer je korištena širina impulsnog odziva interpolatora proizvoljna i može biti dovoljno velika. S druge strane, stvarni interpolator na maketi ima ograničenja (rad u stvarnom vremenu, zahtjev za malim kašnjenjem sustava) zbog kojih se **ne može koristiti jako širok impulsni odziv interpolatora**. U slučaju interpolacije ovako neobičnih uzoraka kakvi su nastali kada su frekvencija signala i polovica frekvencije otipkavanja bliske, interpolator može još relativno dobro rekonstruirati signal u okolini uzoraka koji su veliki jer su susjedni korišteni uzorci također veliki. Međutim, interpolaciju malih uzoraka ne može ostvariti kako treba zato jer nedostaju doprinosi udaljenih velikih uzoraka (na udaljenostima većim od duljine odziva) koji bi se možda uzimali s malim težinama, ali bi ipak superpozicijom sudjelovali u rekonstrukciji. Zato nastaju propadi (dolovi) u signalu, tj. signal izgleda kao da je moduliran. Pojava je puno manje izražena što je frekvencija ulaznog signala dalje od polovice frekvencije otipkavanja. Zatvoriti prozor odabirom opcije POVRATAK.

Za one koji žele znati i više

c) Za potrebe proučavanja ponašanja D/A pretvornika generirat će se pobudni niz u diskretnoj domeni koji će se periodički slati na ulaz D/A pretvornika. Dakle, u ovom se zadatku ne koristi signal iz funkcijskog generatora već je digitalni signal “umjetno” generiran. Odabrati frekvenciju otipkavanja iznosa 8 kHz, impulsnu pobudu (jedinični impuls) te opciju **Generiranje pobudnog niza**. Na osciloskopu se promatra pravi rezultat, a na računalu rezultat simulacije.

DSP maketa: Na osciloskopu promatrati samo izlazni signal (kanal Ch 2). Namjestiti sliku jednog do dva impulsa odziva.

Proračun u MATLAB-u: Izvorni i u MATLAB-u numerički izračunati interpolirani signal vidljivi su u novo otvorenom MATLAB prozoru.

Zašto je odziv poprimio takav oblik?

Koliko iznosi širina glavne latice (mjeriti na mjestu prolaska kroz nulu)? _____ [ms]

d) Odabrati opciju POVRATAK, resetirati maketu, odabrati novu frekvenciju otipkavanja iznosa **5,5125 kHz** te nanovo generirati pobudni niz. Koliko sada iznosi širina glavne latice? _____ [ms].

Zašto se gornje dvije vrijednosti razlikuju? U kojoj su vezi te vrijednosti sa frekvencijom otipkavanja?

9. Ponoviti postupak za **sinusnu pobudu** frekvencije **0,48F**, te frekvencijom otipkavanja iznosa **5,5125 kHz**.

DSP maketa: Podesiti sliku na osciloskopu prema točki b). Promatrati samo signal na izlazu iz DSP sistema (Ch 2).

Proračun u MATLAB-u: U novo otvorenom MATLAB prozoru vidljiv je izvorni pobudni niz kao i rezultat interpolacije istoga (ponovo je riječ o simulaciji onoga što se događa na DSP maketi). Po želji podesiti poziciju početnog i posljednjeg promatranog uzorka da se dobro vide i detalji i gruba slika, te pogledati pobudni i interpolirani signal. Parametri koje je moguće mijenjati su **širina impulsnog odziva interpolatora** (broj uzoraka izvornog signala koji će biti obuhvaćeni interpolatorom) i **faktor interpolacije**. Širinom impulsnog odziva interpolatora određujemo kvalitetu interpolacije tj. što je taj broj veći to će za interpolaciju jedne točke biti korišten veći broj otipkanih uzoraka lijevo i desno od te točke čime se dobiva točnija vrijednost interpoliranog uzorka. Idealni interpolator morao bi imati beskonačnu širinu impulsnog odziva. Faktorom interpolacije određujemo broj interpoliranih uzoraka +1 između postojećih dva uzorka. Odabirom većeg broja uzoraka dobivamo kvalitetniji prikaz 'kontinuiranog' signala na ekranu, ali istovremeno produljujemo vrijeme računanja interpolacije. Odabrati širinu impulsnog odziva interpolatora **128** i faktor interpolacije **16**. Objasniti zašto postoji razlika između signala prikazanog na osciloskopu i signala dobivenog interpolacijom u programskom paketu MATLAB. (Frekv. sinusa blizu polovice frekv. otipkavanja!)

10. Mijenjati širinu impulsnog odziva interpolatora i faktor interpolacije. Posebno pogledati slučaj sa širinom impulsnog odziva interpolatora **10** i faktorom interpolacije **16**. Komentirati dobivene rezultate.
