2. VJEŽBA

Diskretna Fourier-ova transformacija (DFT)

Bilo koji **aperiodski** vremenski diskretni niz $x[n]$ s uzorcima od $-\infty$ do ∞ može se prikazati u frekvencijskoj domeni pomoću para izraza:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n} \quad , \tag{2.1}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\omega n}d\omega \, . \tag{2.2}$$

U gornjim izrazima $X\left(e^{j\omega}\right)$ predstavlja Fourier-ovu transformaciju diskretnih signala (*engl. Discrete Time Fourier Transform*, DTFT, a koristi se i kraći termin spektar). Fourier-ova transformacija postoji ako suma u izrazu (2.1) uniformno konvergira, a to uvijek vrijedi ako je suma apsolutnih vrijednosti niza $x[n]$ za sve indekse *n* konačna, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left| x[n]\right| < \infty \; . \tag{2.3}$$

Dobivena transformacija $X\left(e^{j\omega}\right)$ je tada kontinuirana funkcija od ω i periodična s 2π.

Za bilo koji beskonačni **periodični** vremenski niz gornji uvjet (2.1) nije zadovoljen i Fourier-ova transformacija u striktnom smislu ne postoji kao kontinuirana funkcija već sadrži sumu delta funkcija na frekvencijama svih harmonika tog periodičnog signala (vidi kasnije). Stoga se takvi signali $\tilde{x}[n]$ (~ naglašava periodičnost) perioda P često prikazuju pomoću sume P diskretnih kompleksnih eksponencijala frekvencija:

$$\omega_{\mathrm{k}} = \frac{2\pi k}{P}, \text{za } k=0,...,P\text{-}1 \tag{2.4}$$

što je dano izrazom:

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}c_k e^{j\omega_k n}=\frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1}c_k e^{j\frac{2\pi kn}{P}} \quad , \; n=0,1,\ldots,P-1 \, . \tag{2.5}$$

Koeficijente c_k razvoja u red, tj. kompleksne amplitude pripadnih eksponencijala moguće je naći prema izrazu:

$$c_k=\sum_{n=0}^{P-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{P}} \quad , \; k=0,1,\ldots,P-1. \tag{2.6}$$

Zbog analogije sa rastavom periodičnih vremenski kontinuiranih signala, često se izraz (2.5) naziva diskretni Fourier-ov red (*engl.* Discrete Fourier Series, DFS). Kod toga osim periodičnosti diskretnog niza u vremenskoj domeni $x[n]=x[n+rP]$ (*r* cijeli broj) vrijedi i periodičnost koeficijenata razvoja $c_k = c_{k+rP}$. Bilo kojih P susjednih uzoraka, bilo vremenskog niza, bilo njegovih koeficijenata razvoja jednoznačno opisuje taj periodični niz.

Pomoću ovako određenih koeficijenata diskretnog Fourier-ovog reda moguće je napisati čak i izraz za Fourier-ovu transformaciju $X\left(e^{j\omega}\right)$ takvog periodičnog signala beskonačnog trajanja i beskonačne energije i to pomoću izraza:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{P-1}\frac{2\pi}{P}\cdot c_k\cdot\delta(\omega-\omega_k+2\pi\cdot r) \quad . \tag{2.7}$$

Ovaj izraz se ne može dobiti na osnovu (2.1) zbog problema konvergencije, ali se može pokazati da se njegovim uvrštavanjem u izraz za inverznu Fourier-ovu transformaciju (IDTFT) (2.2) dobiva polazni beskonačni periodični signal $\tilde{x}[n]$.

Fourier-ova transformacija vremenski diskretnih aperiodskih signala konačnog trajanja je kontinuirana funkcija od frekvencije ω, prema (2.1). Radi predstavljanja takve funkcije na računalima pogodno je koristiti njene uzorke, a ne funkciju. Matematički postupak kojim je moguće odrediti ***N*** **uzoraka Fourier-ove transformacije** $X\left(e^{j\omega}\right)$ nekog **aperiodskog** signala konačnog trajanja naziva se diskretna Fourier-ova transformacija (*engl. Discrete Fourier Transform*, DFT) i dana je izrazima:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi\, n\, k}{N}} \quad , \tag{2.8}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j\frac{2\pi\, n\, k}{N}} \quad . \tag{2.9}$$

Radi jednostavnosti izrazi se često zapisuju u obliku:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-nk} \quad , \quad X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk} \quad , \tag{2.10}$$

gdje je W_N dan izrazom:

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad . \tag{2.11}$$

Otipkavanje Fourier-ove transformacije izvedeno je u *N* ekvidistantnih točaka s frekvencijama ω_k, $0\le\omega_k<2\pi$, tj. vrijedi:

$$X[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_k=2\pi k/N} \quad , \quad k=0,...,N-1 \, . \tag{2.12}$$

Drugim riječima, koeficijenti DFT transformacije $X[k]$ predstavljaju uzorke od $X\left(e^{j\omega}\right)$ na frekvencijama ω_k. Ulaz u DFT su uzorci diskretnog niza sa indeksima $n=0,1,\ldots,N-1$.

Treba napomenuti da broj uzoraka DFT-a mora biti jednak ili veći od dužine aperiodskog niza *R*, dakle $N\ge R$. Ako je *N* strogo veći od *R*, niz tada treba nadopuniti nulama tako da je konačna dužina niza jednaka *N*. Za kauzalne je nizove postupak očit jer nule treba staviti iza zadnjeg uzorka originalnog niza, ali je situacija nešto složenija za nekauzalne nizove. Kod njih treba odgovarajući broj nula staviti također iza zadnjeg uzoraka s pozitivnim indeksima, ali nakon nula treba staviti uzorke s negativnim indeksima i to tako da uzorak sa indeksa -1 dolazi na indeks *N*-1, sa indeksa -2 na *N*-2 i tako dalje. Na taj način je jedan **nekauzalni aperiodski niz pripremljen za analizu primjenom DFT-a** uz očuvanje njegovih faznih svojstava.

Uz uvjet $N > R$ se DFT-om dobije **više uzoraka otipkanog spektra** što daje vjerniju sliku o samom spektru niza $X(e^{j\omega})$. Da bi i uz veliki broj uzoraka DFT-a izračun bio brz, razvijen je niz algoritama koji su po krajnjem rezultatu potpuno ekvivalentni DFT-u, ali su učinkovitiji, a time i brži. Takvi algoritmi nazivaju se jednim imenom brza Fourier-ova transformacija (*engl. Fast Fourier Transform*, FFT).

S obzirom da izrazi za DFS (2.5) i (2.6) definirani za periodične diskretne signale izgledaju identično kao oni za DFT (2.8) i (2.9) kojim se predstavljaju aperiodski diskretni signali konačnog trajanja (osim imena c_k i $X[k]$, te periode P odnosno broja uzoraka N), postavlja se pitanje njihove veze. Može se pokazati da se svaki aperiodski diskretni signal trajanja N može pretvoriti u beskonačno periodičan tako da se ponavlja dotičnih N uzoraka niza, a sam aperiodski signal se uvijek može dobiti kao samo jedna perioda takvog periodiziranog signala. Takav postupak periodizacije u vremenskoj domeni rezultira diskretnim spektrom pa samim time i razvoj u DFS ima smisla. Možemo zaključiti da u definiciji DFT reprezentacije aperiodskog signala jednostavno prepoznajemo da nas interesiraju samo vrijednosti $x[n]$ u intervalu $n = 0,1,\ldots,N-1$ jer znamo da su druge jednake nuli. Isto tako nas interesiraju samo vrijednosti $X[k]$ u intervalu $k = 0,1,\ldots,N-1$ jer su one jedine potrebne u izrazu (2.9). Međutim, ono što je važno i treba zapamtiti jest da iako je DFT de facto transformacija koja se koristi u praksi, rastav u DFS predstavlja teoretsku podlogu. **Inherentna periodičnost DFS transformacije ostaje i kod DFT-a, i u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni**. To drugim riječima znači da iako znamo da imamo aperiodski signal, inverznim DFT-om on biva periodiziran.

Iako se po definiciji koristi za konačne aperiodske nizove, **pomoću DFT-a možemo odrediti i harmonijski sastav beskonačnog periodičnog signala** (tj. koeficijente njegovog DFS rastava) pod uvjetom da je **broj uzoraka DFT-a *N* jednak ili cjelobrojni višekratnik periode *P*** tog periodičnog niza. Ako to nije zadovoljeno, uzorci DFT-a $X[k]$ ne odgovaraju koeficijentima c_k i ne pokazuju očekivani harmonijski sastav. Jednostavno objašnjenje toga je činjenica da DFT pretpostavlja periodičko ponavljanje upravo tih N uzoraka, a pošto nije obuhvaćen cijeli broj perioda ulaznog niza, periodizirani niz ima neočekivane skokove na rubovima ponovljenih blokova. Činjenica da se radi o potpuno drugom periodičnom signalu od onog kojeg smo imali na početku uzrokuje i pojavu drugačijeg harmonijski sastava.

Za uzorke DFT-a moguće je izračunati amplitudu $|X[k]|$ i fazu $\angle X[k]$ koji predstavljaju otipkanu amplitudnu i faznu karakteristiku (spektar) od $X(e^{j\omega})$ prema izrazima:

$$|X[k]| = \sqrt{\mathrm{Re}\{X[k]\}^2 + \mathrm{Im}\{X[k]\}^2} \;,\; \angle X[k] = \mathrm{atan2}(\mathrm{Im}\{X[k]\}, \mathrm{Re}\{X[k]\}) \tag{2.13}$$

gdje je sa atan2 označena 4-kvadrantna arctg funkcija od imaginarnog i realnog dijela kompleksnih uzoraka DFT-a $X[k]$.

U nastavku će biti opisana neka od svojstava DFT-a.

I. Realni vremenski niz

Koeficijenti DFT-a **realnog vremenskog niza** imaju slijedeće svojstvo

$$X[k] = X^*[-k], \tag{2.14}$$

tj. koeficijenti, simetrični oko 0, su konjugirano kompleksni, odnosno realni dio im je jednak, a imaginarni dio suprotnog predznaka

$$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[-k]\} \;,\; \mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}. \tag{2.15}$$

Zapisano preko modula (magnitude) i faze

$$|X[k]| = |X[-k]| \;,\; \angle X[k] = -\angle X[-k] \tag{2.16}$$

proizlazi da simetrični koeficijenti imaju jednake module, a pripadne faze su suprotnog predznaka. Zbog toga je za realne vremenske nizove dovoljno poznavati samo prvih $N/2+1$ koeficijenata DFT-a.

Napomena

Važno je ovdje prokomentirati što u stvari znači simetričnost ili antisimetričnost DFT-a. Već je rečeno da DFT za ulaz ima *N* uzoraka vremenskog niza između 0 i *N*-1. Rezultat DFT je niz uzoraka *X*[*k*] koji su također između 0 i *N*-1. Prema izrazu (2.12) ti uzorci odgovaraju frekvencijama $0 \le \omega_k < 2\pi$. Simetričnost/antisimetričnost je klasično definirana s obzirom na ishodište (u ovom slučaju, frekvenciju 0) pa bi promatrani raspon frekvencija trebao u stvari biti $-\pi \le \omega_k < \pi$. Vidimo da uzorci DFT ne pokrivaju taj raspon. Ovdje stoga treba uzeti u obzir periodičnost DFT-a što znači da su uzorci DFT-a koji odgovaraju frekvencijama $\pi \le \omega_k < 2\pi$ upravo jednaki onima u rasponu $-\pi \le \omega_k < 0$. Dovoljno je, dakle, zamisliti da se **desna polovica DFT uzoraka na indeksima *k* od *N*/2 do *N*-1 (za *N* paran) nalazi i lijevo od ishodišta, na indeksima -*N*/2 do -1**. Uz ovo gornji uvjeti imaju smisla.

II. Simetrični/antisimetrični vremenski nizovi

Ako je realni vremenski niz dužine N **simetričan** (paran), tj. vrijedi:

$$x[n] = x[-n] \quad , \text{za } n=1,...,\frac{N}{2}-1 \tag{2.17}$$

tada su koeficijenti DFT-a **čisto realni** (imaginarni dio je jednak 0, $\mathrm{Im}\{X[k]\}=0$).

Analogno, ako je vremenski niz **antisimetričan** (neparan):

$$x[n] = -x[-n] \quad , \text{za } n=1,...,\frac{N}{2}\text{-1 i } x[0]=0 \tag{2.18}$$

tada su koeficijenti DFT-a čisto imaginarni (realni dio je jednak 0, $\mathrm{Re}\{X[k]\}=0$).

Napomena

Ponovno treba dodati komentar da bi uvjet bio jasniji. Definicija simetričnosti općenito je vezana uz izgled signala s lijeve i desne strane ishodišta. Nasuprot tome, ulazni niz u DFT mora biti definiran za indekse od 0 do *N*-1. Ovdje također možemo primijeniti inherentnu periodičnost DFT transformacije i to onaj dio koji se odnosi na periodičnost u vremenskoj domeni. Naime, *N* uzoraka ulaznog niza predstavlja samo ono što gledamo, međutim DFT podrazumijeva da se tih *N* uzoraka periodički ponavlja u ± beskonačnost. Ako se provede takva periodizacija, dobivamo signal koji s obzirom na ishodište može biti simetričan, asimetričan ili niti jedno od toga.

Iz ove diskusije jasniji je i način kako ostvariti **DFT nekauzalnog aperiodskog niza** koji ima uzorke i lijevo i desno od nultog indeksa. Kao što je rečeno, da bismo uopće mogli izračunati DFT tog niza, potrebno ga je prikazati između uzoraka 0 do *N*-1. Ako nekauzalni niz periodiziramo, uzorci sa negativne osi pojavit će se oko indeksa *N*-1 i imat ćemo niz od kojeg možemo raditi DFT.

III. Pomak vremenskog niza

Najprije razmotrimo svojstvo pomaka vremenskog niza za Fourier-ovu transformaciju vremenski diskretnog signala (**DTFT**). Uzmimo diskretni niz $x[n]$, te ostvarimo drugi niz, pomaknut u odnosu na ovaj originalni za *m* koraka (*m* je cijeli broj), $x_m[n] = x[n-m]$. Ako je

DTFT prvog niza jednak $X\left(e^{j\omega}\right)$, tada za DTFT niza pomaknutog za m koraka $X_m\left(e^{j\omega}\right)$, vrijedi:

$$X_m\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\cdot m}. \tag{2.19}$$

Pošto je modul od $e^{-j\omega\cdot m}$ jednak 1, moduli DTFT-a originalne i pomaknute sekvence su jednaki, a faze se razlikuju, jer član $e^{-j\omega\cdot m}$ unosi linearni fazni pomak.

Za **DFS transformaciju** koja podrazumijeva ulazni beskonačno **periodični** niz $\tilde{x}[n]$ perioda P vrijedi analogno svojstvo koje se može opisati izrazom:

$$c_{k,m} = c_k \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{P}\cdot m} = c_k \cdot W_P{}^{k\cdot m} \tag{2.20}$$

gdje su c_k i $c_{k,m}$ DFS koeficijenti originalnog niza $\tilde{x}[n]$, te niza pomaknutog za m koraka $\tilde{x}[n-m]$. Sam pomak niza ne predstavlja nikakav problem s obzirom da je niz periodičan pa znamo da uzorci postoje i izvan raspona od 0 do P-1.

DFT transformacija je definirana za aperiodske diskretne nizove $x[n]$ dužine N. Za nju također vrijedi gornje svojstvo koje se može zapisati kao:

$$X_m[k] = X[k]W_N{}^{km} \tag{2.21}$$

gdje su $X[k]$ i $X_m[k]$ DFT transformacije originalnog $x[n]$ niza s vrijednostima definiranim za indekse $n = 0, 1, \ldots, N-1$, te niza pomaknutog za m koraka $x[n-m]$. U slučaju DFT-a, međutim, treba biti jako oprezan što znači pomak niza. Pošto se radi o aperiodskom signalu, definiranom od 0 do N-1, a za sve druge vrijednosti jednak 0, to bi možda značilo da je pomakom u vremenu dio originalnog niza zauvijek izgubljen. To naravno nije tako posebice ako se podsjetimo na periodičnost u vremenu 'naslijeđenu' od DFS transformacije, a koja vrijedi i za DFT. Naime, ako originalni aperiodski niz u glavi periodiziramo s periodom N, pomaknemo za m koraka i od takvog pomaknutog, periodiziranog niza uzmemo samo uzorke na indeksima od 0 do N-1, dobili smo pomaknuti aperiodski niz. Ono što se de facto događa jest da se **aperiodski niz pomiče cirkularno unutar *N* uzoraka** što odgovara operaciji modulo N. Dakle svojstvo (2.21) vrijedi za signal $x_m[n] = x\left[(n-m)_{\mathrm{mod}\,N}\right]$.

IV. Signali u obliku periodičnih impulsa

Kod periodičnih signala koji imaju oblik niza impulsa, tj. kod kojih je mnogo uzoraka jednakih 0, spektar je širok. Gotovo svi uzorci DFS-a su različiti od 0. Vrijedi i dualno svojstvo, tj. da što je impuls u vremenu širi, to mu je spektar uži (sve više koeficijenata DFS-a je približno jednako 0). Diskretna periodična funkcija pogodna za promatranje ove pojave ima oblik Gauss-ove funkcije i definirana je na jednom periodu P izrazom:

$$x[n] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2(n-P/2)^2}{P^2\sigma^2}}, \quad n=0, \ldots, P\text{-}1. \tag{2.22}$$

Promjenom parametra σ mijenja se širina Gauss-ovog zvona (što je σ manji, zvono je uže). Modul koeficijenata DFS-a ima ponovno oblik zvona, ali što je zvono u vremenu uže, zvono u Fourier-ovoj domeni je šire i obratno.

V. DFT diskretnog kosinusnog niza

Promatrajmo vremenski diskretni kosinusni niz amplitude A, početne faze φ_0 i frekvencije ω_0, danog sa:

$$\tilde{x}[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi_0) = A\cos(2\pi / P \cdot m_0 \cdot n + \varphi_0), \quad \text{za } n = -\infty \text{ do } \infty \tag{2.23}$$

gdje su m_0 i P cijeli brojevi, $0 \le m_0 \le P/2$. Broj P predstavlja osnovni period takvog kosinusnog niza ili njegov višekratnik u slučaju da m_0 i P nisu koprim brojevi. Takav signal sadrži točno m_0 cijelih perioda kosinusnog signala unutar P susjednih uzoraka. Jasno je da se radi o beskonačnom periodičnom nizu. U skladu sa već rečenim (vidi izraz (2.7)), Fourier-ova transformacija (spektar, DTFT) $X(e^{j\omega})$ takvog niza ima oblik:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \left(\frac{A}{2} e^{j\varphi_0} \cdot \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi \cdot r) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} \cdot \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi \cdot r) \right), \tag{2.24}$$

tj. ima delta funkcije na frekvencijama $\omega = \pm\omega_0 + 2r\pi$, $-\infty < r < \infty$, čije su kompleksne amplitude određene amplitudom A i početnom fazom φ_0, dok je za sve ostale frekvencije $X(e^{j\omega})$ jednako 0.

Da bismo uopće mogli izračunati DFT, moramo ograničiti kosinusni niz i promatrati samo jedan njegov dio. To ograničavanje niza u vremenskoj domeni odgovara množenju kosinusnog niza sa uzorcima jednog interesantnog i korisnog tipa vremenski diskretnog niza koji se naziva **vremenski otvor** (*engl. window*). Postoji više vrsta vremenskih otvora koji se mogu koristiti za ovu namjenu, a najjednostavniji je pravokutni vremenski otvor (*engl. rectangular window*). Pravokutni otvor definiran je sa:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \ldots, L-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}, \tag{2.25}$$

tj. on ima uzorke jednake 1 samo za L uzoraka dok su svi ostali jednaki 0. Množenjem beskonačnog, kosinusnog niza sa ovim otvorom $w[n]$ dužine L uzoraka dobiva se konačan, aperiodski diskretni niz $x_L[n]$ koji ima vrijednost 0 za $n < 0$ i $n \ge L$, a za $n = 0, 1, \ldots, L-1$ ima uzorke čije su vrijednosti jednake onima originalne kosinusoide $\tilde{x}[n]$. U praksi, ako se za ograničavanje signala koristi pravokutni vremenski otvor nije potrebno provoditi množenje već se jednostavno izdvoji L uzoraka te kosinusoide.

U spektralnoj domeni, operacija množenja uzoraka niza i vremenskog otvora odgovara tzv. periodičkoj konvoluciji danoj izrazom:

$$X_L(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta, \tag{2.26}$$

gdje je $X_L(e^{j\omega})$ spektar ograničenog niza, $X(e^{j\omega})$ spektar periodičnog niza dan izrazom (2.24), a $W(e^{j\omega})$ spektar vremenskog otvora. Za pravokutni vremenski otvor vrijedi izraz:

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} 1 \cdot e^{-j\omega \cdot n} = e^{-j\omega \cdot (L-1)/2} \cdot \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{2.27}$$

$W(e^{j\omega})$ je krivulja s glavnom laticom i bočnim laticama (titrajima) koja prolazi kroz 0 u točkama s frekvencijom koje su višekratnici frekvencije $2\pi / L$, dok je vrijednost spektra otvora za $\omega = 0$ jednaka L. Gornji izraz opisuje spektar kauzalnog pravokutnog otvora pozicioniranog na indeksima 0 do L-1. Eksponencijalni član ispred omjera sinusnih funkcija posljedica je pomaka otvora u vremenu za (L-1)/2 koraka u desno i predstavlja linearnu faznu karakteristiku s nagibom -(L-1)/2. Periodičkom konvolucijom se periodični **spektar otvora ponavlja na svim frekvencijama na kojima se nalaze delta funkcije** od $X(e^{j\omega})$ u rasponu frekvencija $\omega \in [-\pi, \pi)$ te tako nastaje spektar $X_L(e^{j\omega})$ dan izrazom:

$$X_L\left(e^{j\omega}\right) = \frac{A}{2} e^{j\varphi_0} \cdot W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} \cdot W(e^{j(\omega+\omega_0)}). \qquad (2.28)$$

Ako od L uzoraka $x_L[n]$, $n = 0, \ldots, L-1$ sada napravimo DFT u N=L točaka, dobivamo N kompleksnih koeficijenata $X_L[k]$, $k = 0, \ldots, N-1$ koji su identični vrijednostima funkcije $X_L(e^{j\omega})$ za $\omega = 2\pi\, k / N$. Varijabla k se u kontekstu DFT-a često u engl. literaturi naziva *bin*.

U slučaju kada vrijedi $\boldsymbol{L = P = N}$, tj. kada smo vremenskim otvorom izdvojili točno jedan osnovni period signala koji sadržava m_0 perioda diskretne kosinusoide, te kada od tih L uzoraka izračunamo DFT u istom broju točaka, uzorci DFT-a su jednaki:

$$X[k] = \begin{cases} L \cdot A / 2 \cdot e^{j\varphi_0} & k = m_0 \\ L \cdot A / 2 \cdot e^{-j\varphi_0} & k = N - m_0 \\ 0 & \text{ostale } k \end{cases} \qquad (2.29)$$

Samo uz ovaj odnos L, P i N, **uzorci DFT-a upravo odgovaraju koeficijentima DFS razvoja** pa izraz (2.29) predstavlja osnovu za korištenje DFT-a u svrhu analize spektralnog sastava periodičnih signala jer je vidljivo da je u koeficijentima DFT-a sadržana informacija i o amplitudi i o početnoj fazi svakog pojedinog harmonika ulaznog niza. U slučaju da se diskretni niz sastoji od više harmonijskih komponenata zajedničkog osnovnog perioda P, tada svakoj kosinusoidi na binu m_r odgovara jedan par DFT koeficijenata $X[m_r]$ i $X[N-m_r]$. Gornji izraz ne vrijedi u slučaju istosmjernog signala ($m_0 = 0$) ili signala frekvencije $\omega_0 = \pi$, tj. $m_0 = P/2$. Tada se dvije kompleksne eksponencijale preklapaju pa postoji samo jedan uzorak DFT-a čija je amplituda jednaka LA.

U slijedeća dva paragrafa bit će analiziran **utjecaj broja uzoraka DFT-a *N*** na interpretaciju samih DFT uzoraka. Ako sa L uzoraka obuhvatimo točno jedan osnovni period niza $\tilde{x}[n]$ (tj. vrijedi P=L), a izračunajmo **DFT u broju točaka *N*, koji je višekratnik od *L***, tj. $N = r \cdot L$ (nadopunjavanjem niza s nulama), tada će svaki r-ti uzorak novog DFT-a biti jednak uzorcima originalnog DFT-a izračunatog u L točaka. Između tih r-tih višekratnika pojavit će se r-1 novih uzoraka koji su različiti od 0. Ako je npr. N=2L, između parnih uzoraka, pojavit će se još po jedan novi različit od 0. Ova situacija de facto odgovara **gušćem otipkavanju spektra** aperiodskog signala $x_L[n]$, čime se izgledom skupa uzoraka DFT-a približavamo stvarnom izgledu samog spektra $X_L(e^{j\omega})$.

Ako je uz isti uvjet P=L, ***N* proizvoljni broj veći od *L*** (dakle nije njegov višekratnik), i dalje se DFT-om dobivaju uzorci spektra $X_L(e^{j\omega})$ u ekvidistantnim točkama $\omega_k = 2\pi / N \cdot k$, $k = 0, \ldots, N-1$, ali se ove frekvencije više ne poklapaju s frekvencijama harmonika ulaznog signala. Krivulja $X_L(e^{j\omega})$ je dakle otipkana na mjestima koja nam nisu pogodna za određivanje spektralnog sastava signala.

Na kraju, analizirajmo i utjecaj **veličine vremenskog otvora L** na značenje dobivenih DFT uzoraka. Ako je sa L uzoraka ograničenog kosinusnog niza $x_L[n]$ obuhvaćeno **više cijelih osnovnih perioda P** originalnog periodičnog niza od kojeg se krenulo, tj. vrijedi $L = i \cdot P$ gdje je i prirodni broj, kružna frekvencija ω_0 ulaznog diskretnog niza $\tilde{x}[n]$ se može izraziti kao:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} \cdot m_0 = \frac{2\pi}{L} \cdot i \cdot m_0 = \frac{2\pi}{L} \cdot l_0 \quad , \quad l_0 \text{ je cijeli broj}, \tag{2.30}$$

dakle jednaka je i višekratniku od $2\pi / L$. Taj višekratnik l_0 predstavlja upravo broj cijelih perioda diskretne kosinusoide na L uzoraka. U slučaju da se DFT izvodi u N točaka uz $N=L$, uzorci amplitude DFT-a dotičnog niza imati će sve uzorke jednake nuli osim onih na indeksu $k = l_0$ i $N - l_0$. Drugim riječima, za neki periodični niz sa proizvoljnim harmoničkim sastavom osnovnog perioda P, tek **svaki *i*-ti uzorak DFT-a odgovara DFS koeficijentima**.

Razmotrimo i slučaj kada uzorcima $x_L[n]$ od 0 do $L-1$ **nemamo obuhvaćen cijeli broj perioda** od $\tilde{x}[n]$, tj. odnos L i P je proizvoljan. Tada kružna frekvencija ω_0 diskretnog niza $\tilde{x}[n]$ više nije višekratnik od $2\pi / L$. Ako je ulazni niz bio samo jedna kompleksna eksponencijala zadane frekvencije ω_0, to ne izaziva neke poteškoće. Problem je međutim ako imamo proizvoljni periodični niz osnovnog perioda P koji se sastoji od P takvih kompleksnih eksponencijala na frekvencijama $\omega_0 = 2\pi / P \cdot m_0$, $m_0 = 0, \ldots, P-1$. Diskretna kosinusoida koja se analizira u ovom tekstu, također spada u ovu klasu jer se sastoji od dvije takve kompleksne eksponencijale (prema $\cos(\omega_0 n) = 1/2 \cdot (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$ jedna eksponencijala je na pozitivnoj frekvenciji, a druga na negativnoj frekvenciji). Uslijed množenja sa vremenskim otvorom proizvoljne širine L u odnosu na P, spektar otvora ne prolazi kroz 0 na frekvencijama harmonika pa dolazi do međusobne interakcije harmonika u spektru $X_L(e^{j\omega})$. Ova pojava onemogućava analizu harmonijskog sastava takvog periodičnog signala primjenom DFT-a. Pojava se naziva **'razmazivanje'** spektra, a može se interpretirati i činjenicom da se periodizacijom aperiodskog niza $x_L[n]$ u stvari dobiva neki novi periodični signal, a ne polazni periodični niz $\tilde{x}[n]$.

Realizacija na DSP maketi

U dijelu vježbe s DSP maketom pokazat će se usporedba idealnih frekvencijski ograničenih signala i realno otipkanih. Time će se pokazati neki efekti otipkavanja na izgled DFT-a. U svim promatranim slučajevima, DFT se računa na vremenski ograničenim kosinusnim signalima pa vrijedi sve rečeno pod stavkom V. iz teoretskog dijela vježbe. Kako je u vježbi broj uzoraka otvora fiksan, u općem slučaju nema cijeli broj perioda na promatranom odsječku signala pa dolazi do razmazivanja spektra (frekvencije komponenata od kojih je sastavljen signal ne podudaraju se s frekvencijama spektralnih komponenti koje postoje u DFT transformaciji).

Na vježbama će se promatrati dva signala istog oblika i frekvencije, ali dobivena na dva različita načina. **Prvi signal dobiven je otipkavanjem analognog signala** iz generatora funkcija ugrađenog u DSP maketu. Pošto je to realan signal on osim potrebnih harmonika osnovne frekvencije, koji su sastavni dio promatranog signala, sadrži i neke druge frekvencijske komponente koje su prigušene za neki iznos u odnosu na osnovne, ali doprinose iznosu ukupnog signala (u biti uzrokuju izobličenje signala). Pojava takovih komponenata posljedica je različitih nelinearnih efekata unutar generatora funkcija. Nadalje, kao posljedica filtracije određene ulaznom karakteristikom A/D pretvornika (antialiasing filtar) dolazi do odbacivanja harmonijskih komponenti koje se nalaze iznad polovice frekvencije otipkavanja. To odbacivanje nije idealno jer radi realnog filtra ipak dolazi do preslikavanja nekih komponenti u blizini polovine frekvencije otipkavanja. Te komponente su dosta prigušene što filtrom, što samim smanjenjem iznosa harmonika te ne utječu u nekoj većoj mjeri na signal. Proučavanjem spektra otipkanog signala možemo ustanoviti kvalitetu generatora funkcija te korištenog A/D pretvornika. Sama usporedba signala se na vježbama provodi na različitim frekvencijama za tri valna oblika (sinus, trokut i pravokutnik).

Kao **drugi (referentni) signal uzima se u Matlabu konstruirani signal** dobiven sintezom osnovnih harmonijskih komponenti, koje proizlaze iz idealnog (matematičkog) rastava signala po frekvencijskim komponentama tj. razvoja u Fourier-ov red. Matematički izrazi za promatrane valne oblike su slijedeći:

Sinus:
$$y(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \tag{2.31}$$

Trokut:
$$y(t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot t)}{(2 \cdot n - 1)^2} \tag{2.32}$$

Pravokutnik:
$$y(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot (2 \cdot n - 1) \cdot t)}{2 \cdot n - 1} \tag{2.33}$$

Iz izraza je vidljivo da se trokutni i pravokutni signal sastoje od beskonačnog broja viših neparnih harmonika osnovne frekvencije *f*. U skladu sa realnim slučajem signala, pri konstrukciji referentnog signala uzimaju se samo one komponente koje su manje od polovice frekvencije otipkavanja. Ispuštanje viših harmonijskih komponenti uzrokuje izobličenje konstruiranog signala što je vidljivo na njegovom vremenskom prikazu i to naročito u slučaju kada je sintezom obuhvaćen mali broj frekvencijskih komponenti.

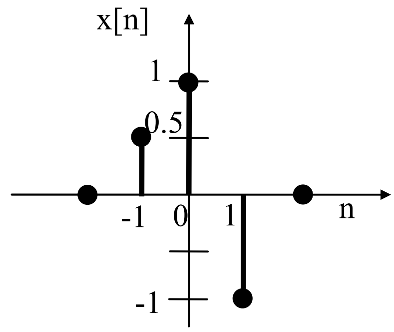
Zadatak za pripremu

1) Izvesti analitički izraz za Fourierovu transformaciju $X(e^{j\omega})$ aperiodskog, vremenski diskretnog niza $x[n]$ prikazanog slikom, koji je definiran za indekse $-1 \leq n \leq 1$, a za sve druge indekse je jednak 0. Odrediti kolika je vrijednost $X(e^{j\omega})$ za $\omega = \pi / 4$.

2) Imajući u vidu da je niz **nekauzalni** odrediti diskretnu Fourierovu transformaciju $X[k]$ niza $x[n]$ u N=4 točke (pogledati DFT nekauzalnog aperiodskog niza iza definicije DFT-a u teoretskom dijelu vježbe). Odrediti i nacrtati amplitudu i fazu uzoraka DFT-a.

3) Odrediti DFT $X_c[k]$ kauzalnog niza $x_c[n]$ koji ima iste vrijednosti kao $x[n]$, ali je definiran za indekse $0 \leq n \leq 2$, a za ostale je 0. Ovaj niz de facto predstavlja pomaknuti niz za jedan korak u desno u odnosu na početni. Provjeriti da li za $X[k]$ i $X_c[k]$ vrijedi svojstvo pomaka vremenskog niza opisano u stavci III. teoretskog dijela vježbe.

Rješenje zadatka:



Praktična vježba

MATLAB PROGRAM ZA IZRAČUNAVANJE DFT-a APERIODSKOG NIZA

1. Za aperiodski, vremenski diskretan niz $x[n]$ zadan u zadatku za pripremu napisati Matlab program (skriptu) kojim se izračunavaju i prikazuju Fourierova transformacija vremenski diskretnog signala (DTFT) $X(e^{j\omega})$ i diskretna Fourierova transformacija (DFT) $X[k]$ tog diskretnog niza. Slijediti upute u nastavku.

a) DTFT je kontinuirana funkcija frekvencije ω pa se kao takva ne može direktno izračunati i prikazati korištenjem Matlaba. Ono što se međutim može napraviti jest izračunati i prikazati DTFT kao diskretni niz u vrlo velikom broju točaka. U skladu s tim treba najprije definirati broj frekvencija K u koliko će se DTFT izračunati. Neka je K=1024. Potrebne frekvencije ω ostvariti u rasponu $0 \le \omega < 2\pi$ (jer 2π već predstavlja slijedeću periodu). Koristiti naredbu **`om=[0:K-1]/K*2*pi`** kojom se definira vektor `om` sa K elemenata čije vrijednosti su od 0 do malo manje od 2π.

b) Napisati u Matlabu izraz za DTFT prema analitičkom izrazu dobivenom u 1) dijelu rješenja zadatka iz pripreme. Označiti DTFT npr. imenom `Xs`. Za imaginarnu jedinicu $\sqrt{-1}$ uzeti `j`. Koristiti bilo funkcije `sin( )` i `cos( )`, bilo `exp( )`. Imati u vidu da pošto se u izrazu za `Xs` kao varijabla pojavljuje vektor (s obzirom da se radi o DTFT-u to je vektor s frekvencijama `om`), sam `Xs` je vektor iste veličine s vrijednostima DTFT-a za svaki element vektora `om`.

c) Izračunati amplitudni i fazni spektar **na temelju DFTF-a** `Xs` korištenjem Matlab funkcija `abs( )` (za amplitudni) i `angle( )` (za fazni spektar). Osim toga izračunati realni i imaginarni dio spektra Matlab funkcijama `real( )` i `imag( )`.

d) Broj točaka N u koliko se izračunava DFT unijeti korištenjem naredbe `input`. Kod testiranja, može se odabrati N=4. Napraviti vektor k s indeksima DFT-a u rasponu $0 \le k \le N-1$.

e) Prema dijelu rješenja zadatka iz pripreme pod 2) realizirati u Matlabu diskretni niz $x_D[n]$ koji predstavlja ulaz u DFT, a dobiven je iz $x[n]$. Potrebni broj nula do ukupnih N točaka ostvariti pomoću naredbe **`zeros(1,N-3)`** (originalni niz ima 3 uzorka) te ih postaviti na pravo mjesto u vektoru.

f) Izračunati DFT korištenjem naredbe `fft(`x_D`,`N`)` koja izračunava DFT u N točaka bilo pomoću učinkovitog FFT postupka ako je N potencija broja 2, bilo normalno na manje učinkovit način ako je N neki drugi broj.

g) Korištenjem istih naredbi kao u točki c) izračunati amplitudu i fazu te realni i imaginarni dio **DFT uzoraka**.

h) Slijede naredbe za prikaz. **Prije svake slike** pozvati funkciju **`figure`** za otvaranje novog prikaza. Na **prvoj slici** prikazati niz x_D pomoću naredbe `stem` uz odgovarajuće indekse `n=[0:N-1]`.

i) Na **drugoj slici** pomoću naredbe `subplot` (kojom se prikazuje više odvojenih grafova na jednoj slici) prikazati amplitudu i fazu DTFT-a i DFT uzoraka na način kako slijedi. Kod prikaza najprije sa `subplot(2,1,1)` pristupiti **prvom (gornjem) grafu**. Korištenjem naredbe oblika `plot(X1,Y1,'-',X2,Y2,'o')` na grafu prikazati **amplitudu DTFT-a punom linijom ('-') te amplitudu DFT-a simbolom ('o').** Os apscisa za DTFT je vektor *om*, a za DFT bi trebao biti vektor *k*. Međutim, da bi obje amplitudne karakteristike mogli prikazati na istom grafu što želimo učiniti, moramo vrijednosti indeksa DFT-a k, $0 \le k \le N-1$ prikazati kao funkciju frekvencije *om*, $0 \le \omega < 2\pi$, tj. kao **`k*2*pi/N`**. Broj točaka se naravno ne mijenja. Sa `ylabel('staviti_text')` označiti y-os ovog grafa da se zna što prikazuje. Pristupiti zatim sa `subplot(2,1,2)` **donjem grafu** i na analogan način prikazati **faze DTFT-a i DFT uzoraka**. Na kraju izgenerirati naslov za cijelu sliku koji ispiše vrijednosti korištenih K i N. Za to se koristi naredba **`str=sprintf('K=%d, N=%d',K,N);`**, koja će vrijednosti K i N ubaciti u string `str`, a zatim taj string treba postaviti na sliku naredbom **`title(str)`**.

j) Analogno prethodnom koraku, na **trećoj slici** na isti način kao pod stavkom i) prikazati **realne i imaginarne dijelove DTFT-a i DFT uzoraka**.

2. Izvesti program uz N=4 i promotriti dobivene prikaze. Zatim izvesti program uz N=16. Što se promijenilo sa prikazom DFT-a ?

Vizuelno provjeriti da li za DFT (kao i za DTFT) vrijede svojstva realnog niza opisana u stavci I. teoretskog dijela vježbe. Kako moraju izgledati amplituda, faza, te realni i imaginarni dio DFT-a s obzirom na indeks 0?

Izvesti program uz N=1024. Sjetiti se da je DTFT prikazan također u N=1024 točke. Kako sada izgledaju prikazi ? Čemu bi općenito težio DFT kada bi se broj uzoraka povećavao do beskonačnosti ?

MATLAB PROGRAM ZA IZRAČUNAVANJE DFT-A KOSINUSNOG NIZA

3. Napisati MATLAB program (skriptu) kojim se izračunava DFT beskonačno periodičnog, vremenski diskretnog kosinusnog niza $\tilde{x}[n] = \cos(\omega_0 n) = \cos(2\pi m/P \cdot n)$, u N točaka gdje varijabla m može poprimiti vrijednosti $0 \le m \le P/2-1$, a P je osnovni period niza. **Teoretska podloga dana je u stavci V. teoretskog dijela vježbe.** Raditi u skladu s uputama koje slijede.

a) Frekvencija kosinusnog niza ω_0 neka je definirana preko brojeva P i m, kako se vidi iz gornjeg izraza za $\tilde{x}[n]$. Ostvariti unos P i m korištenjem naredbe `input`.

b) Da bi se mogao raditi DFT, beskonačni niz treba ograničiti u vremenu na dužinu L. To se izvodi primjenom vremenskog otvora, a u ovom zadatku koristit će se najjednostavniji, pravokutni otvor. Broj L, te broj točaka N u koliko se izračunava DFT unijeti korištenjem naredbe `input`. Realizirati vektor n s indeksima vremenskog niza, $0 \le n \le L-1$ te vektor k s indeksima DFT-a, $0 \le k \le N-1$.

c) Izračunati skraćeni niz od $\tilde{x}[n]$ u L točaka, $x_L[n]$, uz indekse u vektoru n. S obzirom da se koristi pravokutni otvor dovoljno je samo izračunati niz za L indeksa. Da je korišten neki drugi tip otvora, trebalo bi pomnožiti uzorke signala i otvora.

d) Izračunati DFT niza $x_L[n]$ u N točaka uz indekse u vektoru k.

e) Izračunati amplitudu, fazu, te realni i imaginarni dio uzoraka DFT-a.

f) Na **prvoj slici** (kao i do sada prethodno pozvati naredbu `figure`) prikazati skraćeni kosinusni niz $x_L[n]$ pomoću naredbe `stem` uz odgovarajuće vremenske indekse.

g) Analogno prikazima u programu iz 1. zadatka, naredbom `subplot` prikazati na **drugoj slici amplitudu i fazu DFT-a**, a na **trećoj realni i imaginarni dio DFT**. Obzirom da treba prikazati samo uzorke DFT-a, zamijeniti `plot` naredbu, naredbom `stem`. U naslovu slike neka su ispisane vrijednost korištenih N, L i m.

4. Izvesti program uz slijedeće parametre: ***P*=*L*=*N*=10, *m*=1** i promotriti slike. Nakon toga izvesti program uz iste P, L i N, ali za ***m* odabirati redom 2 pa 5**. Svaki put se generiraju po tri nove slike.

Proučiti i usporediti slike koje prikazuju diskretni niz. Zatim proučiti slike koje prikazuju pripadne amplitude DFT uzoraka. Na koji način izgled amplitude DFT-a ovisi o broju m? Koje je značenje broja m u smislu periodičnosti diskretnog niza na L uzoraka?

____

____

Zatvoriti sve postojeće slike naredbom **`close all`**. Izvesti program uz parametre: ***P*=*L*=*N*=10, *m*=1**. Pogledati diskretni niz. U glavi ga periodizirajte. Kakav je izgled tog periodiziranog niza s obzirom na simetričnost oko ishodišta? Pogledati amplitude i faze te realni i imaginarni dio DFT uzoraka s obzirom na simetričnost (misli se na simetričnost oko ishodišta – vidjeti svojstvo DFT-a pod II). Obratiti pažnju na veličine na y-osi. Jako male vrijednosti ($<10^{-13}$) ukazuju na to da se u stvari radi o vrijednostima koje bi trebale biti jednake nula, ali to nisu zbog numeričkih pogrešaka prilikom računanja. Ako su dakle bilo realni bilo imaginarni ili čak oba dijela DFT-a veoma mali brojevi, fazna vrijednost koja se izračunava na temelju njih nema smisla te se u prikazima ponaša nepredvidivo.

____

____

Izvesti sada program još uz ***N*=20 i *N*=40**, a ostale parametre zadržati istima i usporediti pripadne amplitude DFT uzoraka. Kako to da amplituda DFT-a uz veći N ima uzorke koje ne očekujemo s obzirom na postojanje samo jedne harmonijske komponente na frekvenciji ω_0? Što se događa povećavanjem broja uzoraka u kojima se radi DFT?

____

____

Zatvoriti sve postojeće slike. Izvesti program uz parametre: ***P*=*L*=*N*=10, *m*=1.4**, te promotriti dobivene slike. Kada m nije cijeli broj, a ostali parametri su jednaki, to znači da na tom broju uzoraka nema cijeli broj perioda kosinusa. Kako se to odražava na izgled amplitude i faze te realnog i imaginarnog dijela DFT uzoraka ? Skicirati kako bi izgledao niz nastao periodiziranjem postojećih N uzoraka niza u vremenu. Prokomentirati.

____

____

FREKVENCIJSKA KARAKTERISTIKA REALNIH SIGNALA OTIPKANIH NA DSP MAKETI

5. U komandnom prozoru MATLAB-a pokrenuti program **vj2** unosom naredbe **vj2 <ENTER>**. Prije toga je potrebno ući u direktorij vj2. Za usporedbu matematički konstruiranih signala sa signalima otipkanim s DSP makete sa padajućeg menija u gornjem desnom uglu odabrati opciju **Otipkavanje signala.** Odabrati frekvenciju signala **900 Hz** i **sinusni** valni oblik (ovo su parametri po kojima će MATLAB konstruirati željeni idealni signal). Korištenjem tipke **Prijenos programa na maketu** prenosi se program za otipkavanje signala na DSP maketu (prije prijenosa programa upaliti maketu i sačekati da prođe proces inicijalizacije). Na maketi podesiti **sinusni** valni oblik uz frekvenciju **900 Hz** (ovo je željeni realni signal koji dobivamo iz funkcijskog generatora). Na DSP maketi pritisnuti tipku 'interrupt' čime se zaustavlja izvršavanje programa uz spremanje otipkanih uzorka u memoriju DSP procesora. Tipkom **Prijenos podataka s makete** prenose se otipkani uzorci s

DSP makete u memoriju računala. Usporedba signala se provodi u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

U vježbi se može odabrati da li se za ograničenje beskonačnog niza koristi pravokutni ili jedan nešto drugačiji otvor koji se naziva Blackmanov (vremenski otvori su detaljnije diskutirani u Vježbi 3.). Izgled ovog otvora u vremenskoj domeni je takav da u množenju sa signalom, sam signal nije skokovito prekinut već je postepeno prigušen prema rubovima promatranog intervala. Nadalje, djelovanje ovog otvora u frekvencijskoj domeni je takvo da su bočne latice otvora manjih amplituda pa se time može bolje istaknuti spektralni sastav signala, što se može i vidjeti. Prilikom izračunavanja spektra signala moguće je koristiti Blackman-ov vremenski otvor (aktiviranjem opcije **Korištenje vremenskog otvora**) radi poboljšanja karakteristike dobivenog spektra.

Za otipkani, odnosno konstruirani signal opisati razlike odnosno sličnosti u vremenskoj, odnosno frekvencijskoj domeni. Opisati utjecaj vremenskog otvora na spektar signala.

Ponoviti postupak za **pravokutni** signal frekvencije **900 Hz**. (odabrati željenu frekvenciju i valni oblik u aplikaciji, resetirati DSP maketu, prenijeti program na DSP maketu, odabrati željeni valni oblik i frekvenciju na DSP maketi, na maketi pritisnuti tipku ‘interrupt’, prenijeti podatke s DSP makete u računalo). Precrtati spektar otipkanog pravokutnog signala iz funkcijskog generatora i na sliku upisati porijeklo i teoretski očekivani iznos svake pojedine komponente koja se na slici ističe. Objasniti pojavu komponenti koje nisu bile teoretski očekivane.

Ponoviti postupak za **pravokutni** signal frekvencije **50 Hz**. Precrtati jednu do dvije periode otipkanog i konstruiranog signala u vremenu. Do promjene valnog oblika pravokutnog (a i trokutnog signala) dolazi zbog postojanja izmjenične, AC veze (serijski kondenzator) na ulazu u maketu. Frekvencijska karakteristika takvog ulaznog kruga je oblika visokog propusta, ali ono što posebno treba naglasiti jest da je **fazna karakteristika izrazito nelinearna** do cca. 500 Hz. Zbog nelinearnosti faze za prvih nekoliko harmonika u pravokutnom signalu dolazi do faznih izobličenja koja uzrokuju dobiveni valni oblik. Uz istu frekvenciju ponoviti postupak za **trokutni** i **sinusni** signal na ulazu. Zašto promjena valnog oblika nije vidljiva kod sinusnog signala?

Zašto je na višim frekvencijama ulaznog signala gore promatrani efekt manje izražen?

Za one koje žele znati i više

MATLAB APLIKACIJA - DFS POMAKNUTOG NIZA

6. Ova vježba kao i sve koje slijede se također rade u programu **vj2**. Svojstvo DFS-a koje će se ovdje promatrati je utjecaj pomaka niza u vremenu na koeficijente DFS-a (stavka III. teoretskog dijela vježbe). Na padajućem izborniku u gornjem desnom kutu odabrati opciju **Pomak niza** čime će program generirati pravokutni periodični vremenski niz na osnovu zadanog broja uzoraka po periodi i širine bloka jedinica. Pored toga generira se isti takav signal, ali pomaknut u vremenu za zadani broj koraka. Parametri koji definiraju oba signala su broj uzoraka po periodi signala (N), širina bloka jedinica (M) te pomak u broju uzoraka između signala (m). Za početak odabrati kombinaciju $\boldsymbol{N}$**=16**, $\boldsymbol{M}$**=2**, $\boldsymbol{m}$**=1**.

Proučiti pripadne DFS koeficijente (realni dio, imaginarni dio, modul, faza). Opisati uočena svojstva. Napisati izraz za fazni pomak te uvrstiti gore navedene koeficijente. Da li rezultati proračuna odgovaraju rezultatima dobivenim u MATLABU ?

Ponoviti postupak za različite vrijednosti parametara N, M i m te diskutirati rezultate.

MATLAB APLIKACIJA - DFT VREMENSKI SKALIRANOG NIZA

7. Za promatranje utjecaja vremenskog skaliranja niza na DFS koeficijente (stavka IV. teoretskog dijela vježbe) odabrati opciju **Skaliranje niza**. Ovom opcijom generiramo periodični niz čiji je jedan period duljine N=64 oblika Gauss-ovog zvona. Promjenom parametra σ (sigma) mijenja se širina zvona što odgovara skaliranju signala u vremenu. Parametar je moguće unijeti numerički (u intervalu [.01;10] ili preko pomične trake (engl. slide bar). Za početak odabrati vrijednost σ**=1**. Program prikazuje, za odabrani parametar, signal u vremenskoj domeni te pripadne module DFS koeficijenata. Opisati prikazane slike.

Ponoviti postupak za **σ=.01** i **σ=10**. Kakav je sada odnos između oblika vremenskog signala i pripadnih modula DFS koeficijenata? Eksperimentirati i s drugim vrijednostima parametra σ.

MATLAB APLIKACIJA - UTJECAJ SIMETRIČNOSTI VREMENSKOG NIZA NA KOEFICIJENTE DFS-A

8. Ovdje će se proučavati svojstva DFS-a vezana uz simetričnost odnosno antisimetričnost realnih nizova (stavka II. teoretskog dijela vježbe). Unutar grafičkog sustava odabrati opciju **Simetrični/antisim. niz**. Spomenuta svojstva će se proučavati na periodičnom nizu s dva bloka jedinica za simetrični slučaj, odnosno jedan blok jedinica i jedan blok minus jedinica za antisimetrični slučaj. Ostali uzorci vremenskog niza (signala) su nula. Ukoliko se odabere **16** uzoraka po periodi signala, **2** uzorka u bloku jedinica i **simetričan signal**, program će izgenerirati simetričan vremenski niz duljine 16, koji ima dva uzorka lijevo i dva uzorka desno od nule jednaka jedan, a sve ostale nula. Za tako definirani signal na donje dvije slike prikazan je iznos pripadnih koeficijenata DFS rastava. Opisati opažena svojstva DFS razvoja ovakvog signala (svojstva realnog dijela, imaginarnog dijela, modula i faze).

Ponoviti postupak za antisimetrični signal. Varirati broj uzoraka po periodi signala te širinu bloka jedinica.
