Analogni električki filtri

Digitalna obradba signala

Sadržaj

- Definicija filtra
- Prijenosna funkcija filtra
- Frekvencijska karakteristika
- Primjer analognog filtra
- Tipovi filtara
  - Selektivni filtri
  - Filtarski korektori

Analogni električki filtri

1. Definicija filtra

Definicija filtra

- Filtar je naprava ili sistem koji na određeni unaprijed propisani način vrši konverziju veličina na svojim ulazima u veličine na svojim izlazima.
- Cilj: umanjiti neželjena svojstva ulaznih veličina
  zadržati ili istaknuti željena svojstva.
- **Električki filtar je sistem čije su ulazne i izlazne veličine električki signali.**
- **Njegova funkcija je da na propisani način promjeni karakteristike spektra ulaznog signala.**
- Termin "električki" vezan je za karakter signala kojeg se tim filtrom obrađuje (ne ovisi o načinu izvedbe).

Analogni električki filtri

2. Prijenosna funkcija filtra

Prijenosna funkcija filtra

- Električki filtar je sistem, pa ga je u tom smislu moguće definirati kao skup specifikacija kojima su određeni odnosi između njegovih ulaza i izlaza.

Sistem s jednim ulazom x(t) i jednim izlazom y(t)

Prijenosna funkcija filtra

- Za linearni i vremenski nepromjenjiv sistem odnos između ulaza i izlaza sistema definiran je konvolucijskim integralom

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

- ... gdje su :
  - h(t) **impulsni odziv** sistema,
  - x(t) **ulaz**, **poticaj** ili **pobuda**
  - y(t) **izlaz** ili **odziv** sistema

Prijenosna funkcija filtra

- S matematičkog gledišta sustav je moguće shvatiti kao operator koji djeluje na funkciju ulaza, što se može opisati izrazom :

$$y(t) = F\{x(t)\}$$

... gdje je F operator.

- Laplaceovom transformacijom konvolucijskog integrala dobiva se odnos ulaznog i izlaznog signala u frekvencijskoj domeni :

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

... gdje je H(s) prijenosna funkcija filtra

Prijenosna funkcija filtra

- Prijenosna funkcija H(s) definirana je kao omjer Laplace-ovih transformacija izlaznog i ulaznog signala

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Opći oblik električkog filtra koji se razmatra je električka mreža sastavljena od konačnog broja elemenata koji su:
  - koncentrirani,
  - linearni,
  - vremenski nepromjenjivi.

Prijenosna funkcija filtra

- Za takve sustave ulazno-izlazne odnose moguće je definirati diferencijalnom jednadžbom N-tog reda oblika:

$$b_N \frac{d^N y}{dt^N} + b_{N-1}\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}} + \ldots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y =$$
$$= a_M \frac{d^M x}{dt^M} + a_{M-1}\frac{d^{M-1}x}{dt^{M-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x$$

- ... gdje su b_i (i=0,N) i a_j (j=0,M) realni koeficijenti.
- Lapalce-ovom transformacijom slijedi:

$$b_N s^N Y(s) + b_{N-1} s^{N-1} Y(s) + \ldots + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) =$$
$$= a_M s^M X(s) + a_{M-1} s^{M-1} X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s)$$

Prijenosna funkcija filtra

- Separacijom X(s) i Y(s) moguće je prijenosnu funkciju H(s) izraziti kao:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_M s^M + a_{M-1}s^{M-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \ldots + b_1 s + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i s^i}{\sum_{j=0}^{N} b_j s^j}$$

- Funkcija H(s) je realna racionalna funkcija kompleksne frekvencije s, koju je moguće prikazati u obliku omjera dvaju polinoma s realnim koef. :

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Prijenosna funkcija filtra

- H(s) je moguće prikazati i u slijedećem obliku:

$$H(s) = k\frac{(s-s_{oM})(s-s_{oM-1})\ldots(s-s_{o2})(s-s_{o1})}{(s-s_{pN})(s-s_{pN-1})\ldots(s-s_{p2})(s-s_{p1})} = k\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-s_{oi})}{\prod_{j=1}^{N}(s-s_{pj})}$$

- gdje su :
  - s_{oi} (i = 1,…,M) korijeni polinoma u brojniku P(s) ili **nule prijenosne funkcije,**
  - s_{pj} (j = 1,…,N) korijeni polinoma u nazivniku Q(s) ili **polovi prijenosne funkcije**,
  - k ... realna konstanta jednaka k = a_M/b_N.

Prijenosna funkcija filtra

- U oba slučaja korijeni mogu biti realni ili kompleksni.
- Svaki kompleksni korijen ima odgovarajući konjugirano kompleksni par, pa se uparivanjem, H(s) može prikazati u obliku:

$$H(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(s^2 + 2\sigma_{oi}s + \Omega_{oi}^2\right)\prod_{i=2r+1}^{M}(s-\sigma_{oi})}{\prod_{j=1}^{t}\left(s^2 + 2\sigma_{pj}s + \Omega_{pj}^2\right)\prod_{j=2t+1}^{N}(s-\sigma_{pj})}$$

- ili ...

$$H(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{r}\left(s^2 + \frac{\Omega_{oi}}{q_{oi}}s + \Omega_{oi}^2\right)\prod_{i=2r+1}^{M}(s-\sigma_{oi})}{\prod_{j=1}^{t}\left(s^2 + \frac{\Omega_{pj}}{q_{pj}}s + \Omega_{pj}^2\right)\prod_{j=2t+1}^{N}(s-\sigma_{pj})}$$

Prijenosna funkcija filtra

- s je kompleksna varijabla, tj. s=σ +jΩ , pa je onda i funkcija H(s) kompleksna veličina za neki proizvoljni broj s.
- U uvjetima stacionarnog stanja sinusne pobude, varijabla s postaje jednaka jΩ , pa i prijenosna funkcija H(s) postaje H(jΩ).
- H(jΩ) se naziva **kompleksnom frekvencijskom karakteristikom filtra**.

$$H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\Phi(\Omega)}$$

- Osnovna funkcija električkih filtara sadržana je upravo u obliku frekvencijske karakteristike H(jΩ).

Analogni električki filtri

3. Frekvencijska karakteristika

Frekvencijska karakteristika

- Promjene koje električki filtar treba unijeti u spektar ulaznog signala najčešće se svode na prigušenje ili eliminaciju određenih nepoželjnih frekvencijskih komponenti tog signala.
- Za zadani ulazni signal x(t) s pripadnim frekvencijskim spektrom X(jΩ), $X(j\Omega) = |X(j\Omega)|e^{j\Phi x(\Omega)}$

  ... spektar izlaznog signala određen je izrazom :

$$Y(j\Omega) = |Y(j\Omega)|e^{j\Phi y(\Omega)} = H(j\Omega)\cdot X(j\Omega)$$

  ... kao umnožak spektra signala i prijenosne funkcije.

Frekvencijska karakteristika

- Za module i faze vrijede slijedeći izrazi: $|Y(j\Omega)| = |H(j\Omega)|\cdot|X(j\Omega)|$, $\Phi_Y(\Omega) = \Phi(\Omega) + \Phi_X(\Omega)$
- Modul prijenosne funkcije električkog filtra često se izražava preko svoje logaritamske mjere :

$$\ln H(j\Omega) = \ln|H(j\Omega)| - j\Phi(\Omega) = \alpha_N(\Omega) - j\Phi(\Omega)$$

  ... gdje se funkcija $\alpha_N(\Omega)$ naziva se **logaritamskom mjerom pojačanja filtra** i izražava u Neperima [N].
- Ako se modul logaritmira po dekadskoj bazi dobiva se logaritamska mjera pojačanja izražena u [dB]

$$\alpha(\Omega) = 20\log|H(j\Omega)| = 8.686\cdot\alpha_N(\Omega)$$

Frekvencijska karakteristika

- Pored fazno frekvencijske karakteristike $\Phi(\Omega)$, često se koristi i funkcija grupnog vremena kašnjenja $T_g(\Omega)$ definirana kao:

$$T_g(\Omega) = -\frac{d\Phi(\Omega)}{d\Omega}$$

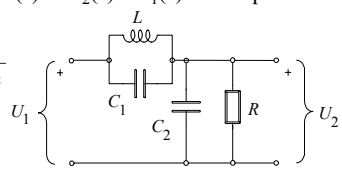
Analogni električki filtri

4. Primjer analognog filtra

Primjer analognog filtra

- Prijenosna funkcija $H(s) = U_2(s) / U_1(s)$ mreže prema slici glasi:

$$H(s) = k\,\frac{s^2 + \Omega_o^2}{s^2 + \frac{\Omega_p}{q_p}s + \Omega_p^2}$$



- .... gdje su :

$$k = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad \Omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

$$\Omega_p = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} \qquad q_p = R\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}}$$

Primjer analognog filtra

- Uz vrijednosti elemenata $R = 1\ k\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\ nF$ i $L = 0.5\ mH$, prijenosna funkcija H(s) glasi:

$$H(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s^2 + 2\cdot 10^{12}}{s^2 + 0.5\cdot 10^6 s + 10^{12}}$$

- Polovi funkcije su :

$$s_{p1,2} = -\frac{1}{4}\cdot 10^6 \pm j\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot 10^6$$

- ... a njene nule :

$$s_{o1,2} = \pm j\sqrt{2}\cdot 10^6$$

Primjer analognog filtra

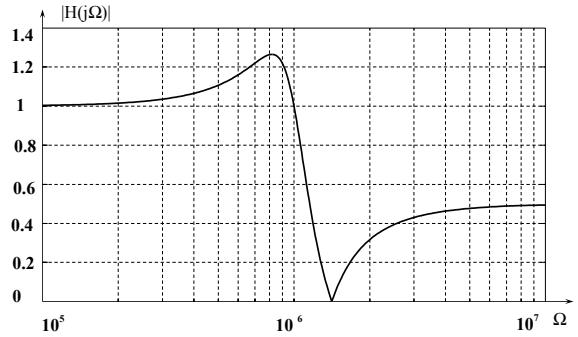
- Uvrštenjem $s = j\Omega$ u prijenosnu funkciju H(s) dobiva se kompleksna frekvencijska karakteristika filtra $H(j\Omega)$:

$$H(j\Omega) = k\,\frac{\Omega_o^2 - \Omega^2}{-\Omega^2 + j\frac{\Omega_p}{q_p}\Omega + \Omega_p^2}$$

- Amplitudno frekvencijska karakteristika je modul gornjeg izraza:

$$|H(j\Omega)| = k\,\frac{\left|\Omega_o^2 - \Omega^2\right|}{\sqrt{\left(\Omega_p^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega_p}{q_p}\Omega\right)^2}}$$

Primjer - amplitudno / frekv. karakteristika



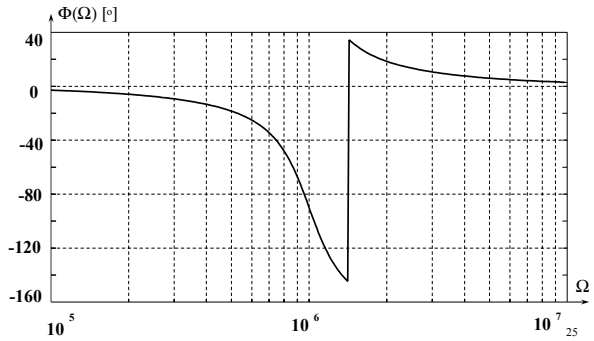
Primjer analognog filtra

- Fazno frekvencijska karakteristika filtra glasi:

$$\Phi(\Omega) = \pi S(\Omega - \Omega_o) - \mathrm{arctg}\,\frac{\left(\frac{\Omega_p}{q_p}\Omega\right)}{\left(\Omega_p^2 - \Omega^2\right)}$$

- Nule na imaginarnoj osi uzrokuju skok u faznoj karakteristici na frekvenciji $\Omega = \Omega_o$, što je posljedica promjene predznaka funkcije $H(j\Omega)$ na toj frekvenciji.

Primjer - fazno / frekvencijska karakteristika



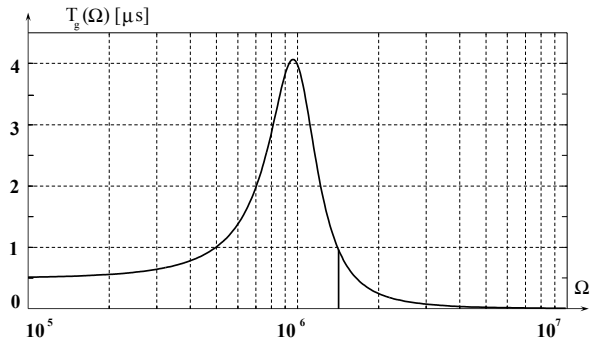
Primjer analognog filtra

- Karakteristika grupnog kašnjenja $T_g(\Omega)$, dobije se deriviranjem izraza za fazu po frekvenciji Ω :

$$T_g(\Omega) = -\pi\delta(\Omega - \Omega_o) + \frac{\left(\Omega_p^2 + \Omega^2\right)\cdot\Omega_p / q_p}{\left(\Omega_p^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(\Omega_p\Omega / q_p\right)^2}$$

- Diracov δ-impuls u točki $\Omega = \Omega_o$, posljedica je skoka u fazi, odnosno postojanja nula prijenosne funkcije na imaginarnoj osi.

Primjer - grupno vrijeme kašnjenja



Analogni električki filtri

5. Tipovi filtara

Tipovi filtara

- Filtre je moguće obzirom na oblik frekvencijske karakteristike podijeliti u dvije skupine :
  - **selektivni filtri**
  - **korektori**
- Kod selektivnih filtara oblik $|H(j\Omega)|$ je takav da je moguće jasno razlikovati frekvencijska područja u kojima je ulazni signal prigušen od onih u kojima je on propušten.

Selektivni filtri

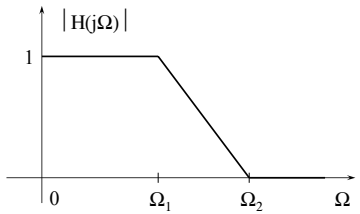
- **Područje propuštanja** filtra ...
  - pojas frekvencija u kojem amplitudno frekvencijska karakteristika ima vrijednost približno jednaku 1,
  - komponente pobudnog signala čije su frekvencije unutar tog pojasa pojavljuju na izlazu filtra sa približno istom amplitudom kao i na ulazu.
- **Područje gušenja** filtra ...
  - pojas frekvencija u kojem je amplitudno frekvencijska karakteristika približno jednaka nuli,
  - frekvencijske komponente ulaznog signala koje se nalaze unutar tog pojasa nisu propuštene na izlaz.

Selektivni filtri

- Amplitudno frekvencijska karakteristika $|H(j\Omega)|$ je funkcija bez diskontinuiteta, pa je prijelaz između područja propuštanja i područja gušenja kontinuiran.
- **Prijelazno područje** filtra ...
  - područje frekvencija na prijelazu između područja propuštanja i područja gušenja.
- Obzirom na položaj svakog od spomenutih područja na frekvencijskoj osi, moguće je razlikovati 4 osnovna tipa selektivnih filtara.

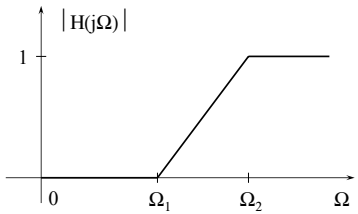
Nisko propusni (NP) filtar

- područje propuštanja za $0 < \Omega < \Omega_1$,
- područje gušenja za $\Omega_2 < \Omega < \infty$,
- vrijedi : $\Omega_1 < \Omega_2$.



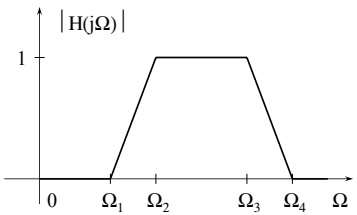
Visoko propusni (VP) filtar

- područje propuštanja za $\Omega_2 < \Omega < \infty$,
- područje gušenja za $0 < \Omega < \Omega_1$,
- vrijedi : $\Omega_1 < \Omega_2$.



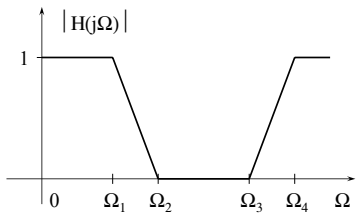
Pojasno propusni (PP) filtar

- područje propuštanja za $\Omega_2 < \Omega < \Omega_3$,
- područja gušenja za $0 < \Omega < \Omega_1$ i $\Omega_4 < \Omega < \infty$,
- vrijedi : $\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \Omega_4$.



Pojasna brana (PB)

- područje propuštanja za $0 < \Omega < \Omega_1$ i $\Omega_4 < \Omega < \infty$,
- područja gušenja za $\Omega_2 < \Omega < \Omega_3$,
- vrijedi : $\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3 < \Omega_4$.

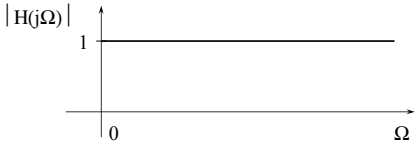


Filtarski korektori

- Za razliku od selektivnih filtara, nemaju jasno definirana područja propuštanja odnosno područja gušenja.
- Služe za korekciju frekvencijske karakteristike nekog drugog sustava.
- Obzirom na činjenicu dali korigiraju amplitudno/frek. ili fazno/frek. karakteristiku sustava dijele se na:
  - amplitudne korektore i
  - fazne korektore

Fazni korektori

- Najčešće se koriste svepropusni filtri,
  - amplitudno/frek. karakteristika im je ravna u cijelom frekvencijskom području,
  - sve su frekvencijske komponente signala prenesene bez prigušenja, ali su fazno pomaknute prema definiranim filtarskim specifikacijama.



Literatura

- Prof. dr. sc. Neven Mijat, Zavodska skripta: Električki filtri, FER, ZESOI 1994.

Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

Digitalna obradba signala

Sadržaj

- Projektiranje analognih filtera
- Butterwothova aproksimacija
- Chebyshevljeva aproksimacija (Tip I)
- Chebyshevljeva aproksimacija (Tip II)
- Eliptička ili Cauerova aproksimacija

Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

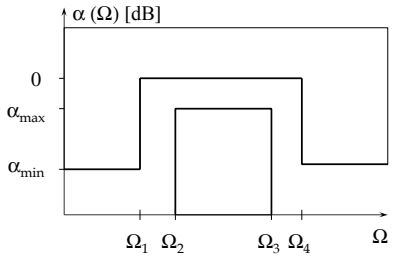
1. Projektiranje analognih filtera

Projektiranje analognih filtera

- Projektiranje analognog filtra kreće od definicije zahtjeva koji taj filter mora zadovoljiti:
  - granice u području propuštanja,
  - granice u području gušenja.
- Problem aproksimacije svodi se na nalaženje frekv. karakteristike koja zadovoljava traženi zahtjev.
- Takav sustav mora biti :
  - ostvarljiv
  - što nižeg reda
  - stabilan

Projektiranje analognih filtera

- Primjer specifikacije amplitudne karakteristike pojasno propusnog filtra



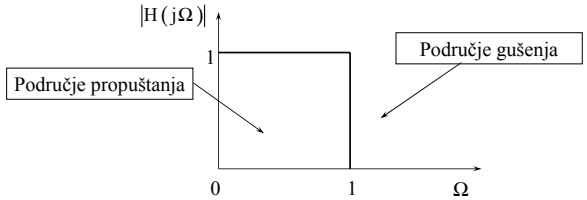
Projektiranje analognih filtera

- Kod većine postupaka aproksimacije polazi se od idealne karakteristike nisko-propusnog (NP) filtra.
- Frekvencijskim transformacijama ta se nisko propusna karakteristika transformira u bilo koju željenu karakteristiku:
  - visoko propusnu (VP),
  - pojasno propusnu (PP),
  - pojasnu branu (PB).
- Frekvencijska os prototip NP filtra je normirana na graničnu frekvenciju, Ω_c=1.

Prototip NP analogni filter

- Amplitudna karakteristika idealnog normiranog NP filtra dana je izrazom:

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 1 & \text{za } |\Omega| < 1 \\ 0 & \text{za } |\Omega| > 1 \end{cases}$$



Amplitudno frekvencijska karakteristika

- Za filter zadan prijenosnom funkcijom H(s)

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{Re[H(j\Omega)]^2 + Im[H(j\Omega)]^2}$$

odnosno ...

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{H(j\Omega)\cdot H(-j\Omega)}$$

- U postupku aproksimacije pogodno je koristiti karakterističnu funkciju K(s):

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+|K(j\Omega)|^2}}$$

Karakteristična funkcija K(s)

- K(s) ... racionalana funkcija kompleksne varijable s

$$K(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- $|K(j\Omega)|$ približno jednak 0 u području propuštanja
  što veći u području gušenja
- Krajnji cilj je nalaženje prijenosne funkcije filtra

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Polinomi kompl. varijable s

- Ostvarljivost H(s)
- Stabilnost H(s)

Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

2. Butterworthova aproksimacija

Butterworthova aproksimacija

- Karakteristična funkcija je zadana kao:

$$|K_N(j\Omega)|^2 = C^2\Omega^{2N}$$

N ... stupanj prijenosne funkcije

- ... slijedi amplitudno/frekv. karakteristika filtra :

$$|H_N(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+C^2\Omega^{2N}}}$$

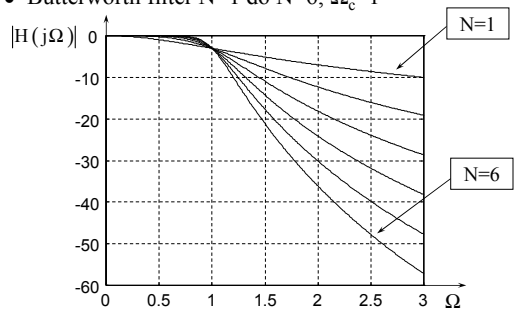
- Uz graničnu frekvenciju Ω_C definiranu kao :

$$|H_N(j\Omega_C)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C^2 = \Omega_C^{-2N}$$

$$|H_N(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\Omega/\Omega_C)^{2N}}}$$

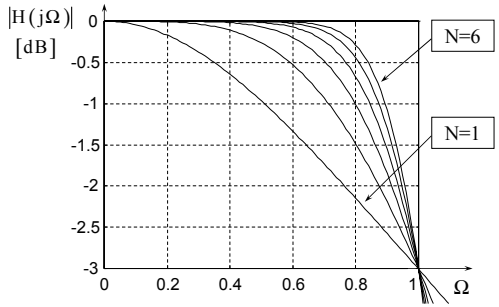
Butterworthova aproksimacija

- Butterworth filter N=1 do N=6, Ω_c=1



Butterworthova aproksimacija

- Područje propuštanja N=1 do N=6, Ω_c=1



Svojstva Butterworthove aproksimacija

- Neovisno o redu filtra N vrijedi:

$\Omega = 0 \ldots\ldots \quad |H(j0)| = 1$

$\Omega = \Omega_C \ldots \quad |H(j\Omega_C)| = 1/\sqrt{2}$

$\Omega = \infty \ldots\ldots \quad |H(j\infty)| = 0$

- Amplitudno/frekv. karakteristika filtra je monotono padajuća porastom frekvencije Ω od 0 prema ∞.
- Prvih 2N-1 derivacija kvadrata amplitudno/frekv. karakteristike u točki Ω=0 su jednake 0 za N-ti red.
- Takva karakteristika se naziva maksimalno glatkom.
- U području gušenja amplitudno/frekv. karakteristika u logaritamskom mjerilu pada linearno (20N dB po dek.)

Prijenosna funkcija Butterworthovog filtra

- Na osnovu kvadrata amplitudno frekvencijske karakteristike treba odrediti H(s) filtra :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = H(j\Omega)\cdot H(-j\Omega)$$

- Supstitucijom Ω=s/j slijedi:

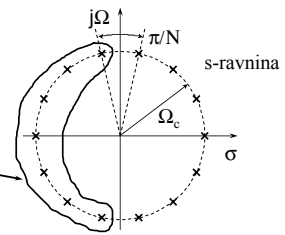
$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\left(-\frac{s^2}{\Omega_c^2}\right)^N} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{2N}(s-s_k)}$$

- Korjeni nazivnika dobivaju se rješavanjem:

$$(-1)^N s^{2N} = -\Omega_c^{2N}$$

Položaj polova Butterworthovog filtra

- Polovi funkcije H(s) ·H(-s) u s ravnini ... jednoliko raspoređeni po kružnici polumjera Ω_c
- Polovi u lijevoj poluravnini pripadaju prijenosnoj funkciji filtra H(s).



Prijenosna funkcija Butterworthovog filtra

- Uparivanjem konjugirano kompleksnih parova polova dobiva se prijenosna funkcija općeg oblika :

$$H(s)=\begin{cases} H_0\prod_{k=1}^{N/2}\dfrac{1}{s^2+(\Omega_{0k}/q_k)s+\Omega_{0k}^2} & \text{... N paran} \\ \dfrac{H_0}{s-s_{(N+1)/2}}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\dfrac{1}{s^2+(\Omega_{0k}/q_k)s+\Omega_{0k}^2} & \text{... N nep.}\end{cases}$$

- Za normirani filter Ω_C=1 vrijedi Ω_{0k}=1 za svaki k, a

$$q_k=\frac{1}{2\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)},\quad k=\begin{cases}1,\ldots,N/2 & \text{za N paran}\\ 1,\ldots,(N-1)/2 & \text{za N nep.}\end{cases}$$

Prijenosna funkcija Butterworthovog filtra

- Primjer za N=5 i Ω_C=1 :

Pol Re	Pol Im	q_k	Faktori nazivn.
-1	0	--	s+1
-0.80902	±0.58779	0.61803	s^2+1.61803s+1
-0.30902	±0.95106	1.61803	s^2+0.61803s+1

Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

3. Chebyshevljeva aproksimacija (Tip I)

Chebyshevljeva aproksimacija

- Karakteristična funkcija zadana je kao:

$$|K_N(j\Omega)|^2=\varepsilon^2T_N^2(\Omega)$$

... gdje je $T_N(\Omega)$ polinom Chebysheva N-tog stupnja u varijabli Ω definiran kao :

$$T_N(\Omega)=\cos(N\Phi)$$
$$\cos(\Phi)=\Omega$$

- Kod Butterworthove aproksimacije nule karakteristične funkcije $|K(j\Omega)|$ su sve u Ω=0.
- Boljim rasporedom nula kod funkcije $T_N^2(\Omega)$ postiže se poklapanje s idealnom karakteristikom u više točaka u području propuštanja.

Chebyshevljevi polinomi

- Izraz za $T_N(\Omega)$ moguće je pisati i kao:

$$T_N(\Omega)=\cos(N\cdot\arccos(\Omega))$$

- Navedeni izraz vrijedi za -1<Ω<1 dok se za $|\Omega|$>1 moraju koristiti hiperbolne funkcije :

$$T_N(\Omega)=\begin{cases}\cos(N\cdot\arccos(\Omega)) & \text{za } |\Omega|\le 1\\ \mathrm{ch}(N\cdot\mathrm{Arcch}(\Omega)) & \text{za } |\Omega|>1\end{cases}$$

- Za Chebyshevljeve polinome vrijedi slijedeća rekurzivna formula :

$$T_N(\Omega)=2\Omega T_{N-1}(\Omega)-T_{N-2}(\Omega)$$

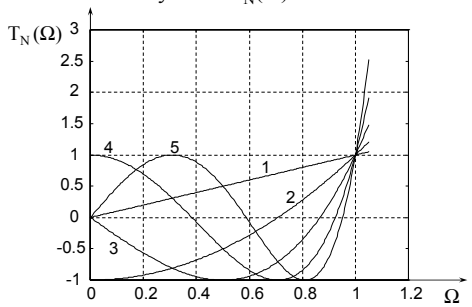
Chebyshevljevi polinomi

- Korištenjem rekurzivne formule i poznavanjem prva dva polinoma $T_0(\Omega)$ i $T_1(\Omega)$ lako se nalaze preostali:

$$T_0(\Omega)=1$$
$$T_1(\Omega)=\Omega$$
$$T_2(\Omega)=2\Omega^2-1$$
$$T_3(\Omega)=4\Omega^3-3\Omega$$
$$T_4(\Omega)=8\Omega^4-8\Omega^2+1$$
$$T_5(\Omega)=16\Omega^5-20\Omega^3+5\Omega$$

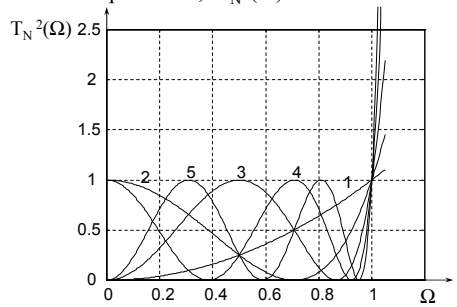
Chebyshevljevi polinomi

- Polinomi Chebysheva $T_N(\Omega)$ za N=1 do N=5



Chebyshevljevi polinomi

- Kvadrat polinoma, $T_N^2(\Omega)$ za N=1 do N=5



Svojstva Chebyshevljevih polinoma

- $|T_N(\Omega)|\le 1$ za $-1\le\Omega\le 1$,
- $T_N(\Omega)\to\infty$ kada $\Omega\to\infty$,
- $T_N(\Omega)\to\infty$ kada $\Omega\to-\infty$ za parni N ,
- $T_N(\Omega)\to-\infty$ kada $\Omega\to-\infty$ za neparni N ,
- $T_N(\Omega)$ je parna funkcija od Ω za parni N , odnosno neparna za neparni N ,
- u intervalu $-1\le\Omega\le 1$ polinom $T_N(\Omega)$ ima jednaku valovitost s ekstremima jednakim +1 odnosno -1.

Filter sa Chebyshevljevom aproksimacijom

- Amplitudno frekvencijska karakteristika normiranog filtra s Chebyshevljevom aproksimacijom dana je izrazom :

$$|H_N(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}}$$

- Konstanta ε određuje iznos valovitosti R_p u području propuštanja filtra:

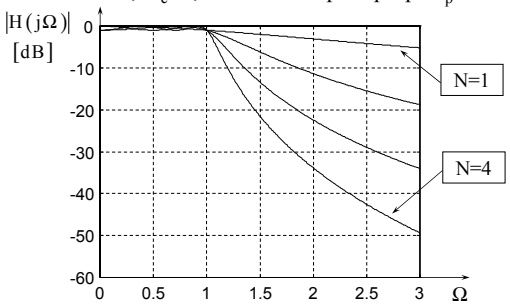
$$R_p = 10\log(1+\varepsilon^2), \quad [dB]$$

odnosno

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}$$

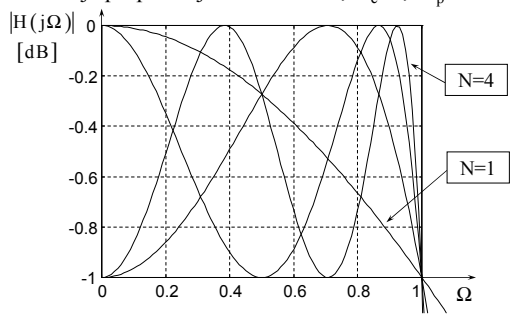
Chebyshev tip I aproksimacija

- N=1 do N=4, Ω_c=1, valovitost u pod. prop. R_p=1dB



Chebyshev tip I aproksimacija

- Područje propuštanja N=1 do N=4, Ω_c=1, R_p=1dB



Svojstva Chebyshevljeve aproksimacija

- Svojstva filtra sa Chebyshevljevom aproksimacijom:

$$\Omega = 0\ldots\ldots \quad |H(j0)| = \begin{cases} 1 & \text{N neparan} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & \text{N paran} \end{cases}$$

$$\Omega = 1\ldots \quad |H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\Omega = \infty\ldots\ldots \quad |H(j\infty)| = 0$$

- Amplitudno/frekv. karakteristika filtra je monotono padajuća porastom frekvencije Ω od 1 prema ∞.

$$|H_N(j\Omega)| \approx \frac{1}{\varepsilon T_N(\Omega)} \approx \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}\Omega^N}, \quad \text{za } \Omega >> 1$$

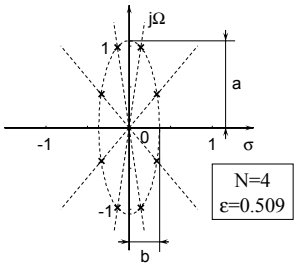
Položaj polova Chebyshevljevog filtra

- Polovi funkcije H(s) ·H(-s) u s ravnini
- ... nalaze se na elipsi

$$a = ch\left(\frac{1}{N}Arcsh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$b = sh\left(\frac{1}{N}Arcsh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

- Polovi u lijevoj poluravnini pripadaju prijenosnoj funkciji filtra H(s).



Prijenosna funkcija Chebyshevljevog filtra

- Parametri polova Ω_{0k} i q_k dobivaju se uparivanjem konjugirano kompleksnih parova kao:

$$\Omega_{0k} = \sqrt{sh^2(\phi) + \cos^2\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)}$$

$$q_k = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{\cos^2\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)}{sh^2(\phi)}}}{2\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)} \qquad k = \begin{cases} 1..N/2 & \text{za N paran} \\ 1..(N-1)/2 & \text{za N nep.} \end{cases}$$

- gdje je ϕ dan izrazom:

$$\phi = \frac{1}{N}Arcsh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon^2}}\right)$$

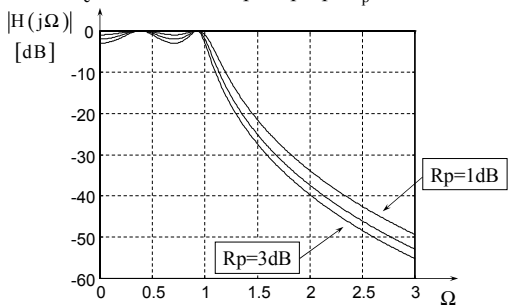
Prijenosna funkcija Chebyshevljevog filtra

- Primjer za N=4 i Ω_c=1, R_p=1dB (ε=0.509):

Pol Re	Pol Im	q_k	Ω_{0k}	Faktori nazivnika
-0.33687	±0.40733	0.78455	0.52858	s^2+0.67374s+0.27940
-0.13954	±0.98338	3.55904	0.99323	s^2+0.27907s+0.98651

Chebyshev tip I aproksimacija

- N=4, Ω_c=1, valovitost u pod. prop. R_p=1dB, 2dB i 3dB

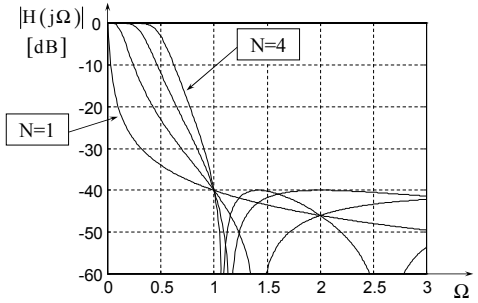


Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

4. Chebyshevljeva aproksimacija (Tip II)

Chebyshev tip II aproksimacija

- N=1 do N=4, Ω_c=1, valovitost u pod. guš. R_s=40dB

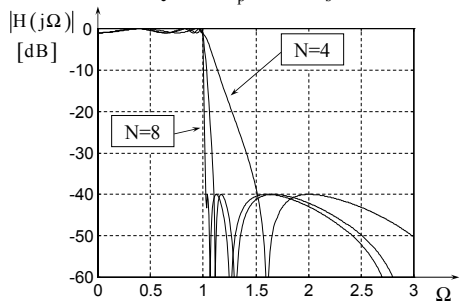


Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara

5. Eliptička (Cauer) aproksimacija

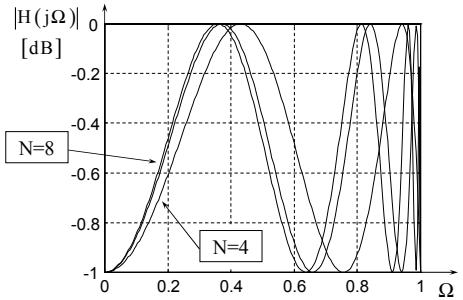
Eliptička (Cauer) aproksimacija

- N=4, 6 i 8, Ω_c=1, R_p=1dB, R_s=40dB



Eliptička (Cauer) aproksimacija

- N=4, 6 i 8, Ω_c=1, R_p=1dB, R_s=40dB, podr. propuštanja



Literatura

- Prof. dr. Neven Mijat, Prof. dr. Vladimir Čosić, Zavodska skripta: Postupci aproksimacije prijenosnih funkcija električkih filtara, FER, ZESOI 1993