

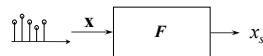
## Nerekurzivni digitalni filtri

Digitalna obradba signala

LS&S - FER

### Primjer - aritmetička sredina

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_M}{M}$$



Interesantan je sustav koji služi za "glačanje" (usrednjavanje) slučajnih varijacija u signalu.

M-point moving average system

$$y[n] = \frac{u[n] + u[n-1] + u[n-2] + \dots + u[n-M+1]}{M} \quad \text{ili}$$

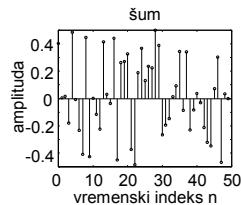
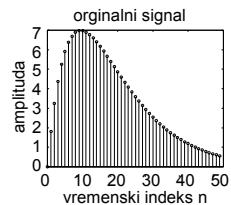
$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} \cdot u[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} \cdot u[n-i] = \sum_{i=0}^{M-1} h[i] \cdot u[n-i]$$

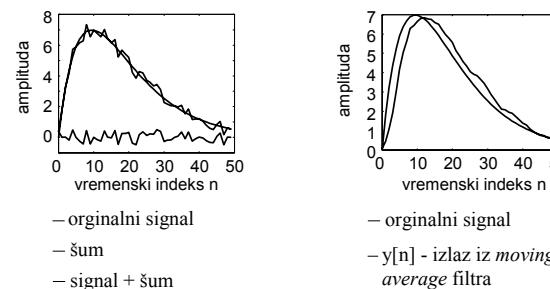
$$h[i]$$

Sustav ima konačan impulsni odziv - FIR sustav

### Primjer - MATLAB



### Primjer - nastavak



### FIR sustav za M=2

Pogledajmo o kojem se sustavu radi:  
Uzmimo M=2

$$y[n] = \sum_{i=0}^1 h[i] \cdot u[n-i] = \left| h[i] = \frac{1}{M} = \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2} \cdot u[n-i] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] =$$

### FIR sustav za M=2 ...

$$y[n] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] = \left| u[n] = e^{j\omega n} \right|$$

$$= \frac{1}{2} (e^{j\omega n} + e^{j\omega(n-1)}) = \frac{1}{2} e^{j\omega n} (1 + e^{-j\omega}) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$$

$$\underline{\underline{H(e^{j\omega})}}$$

### FIR sustav za M=2 ...

Isto pomoću Z-transformacije

$$Y(z) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) \cdot U(z)$$

$$\underline{\underline{H(z)}} \quad \Rightarrow \quad z = e^{j\omega} \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) =$$

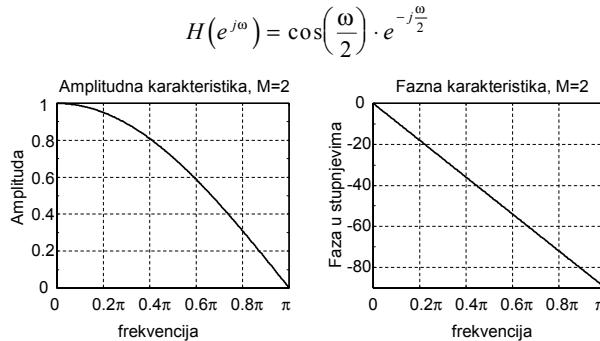
$$= \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} \right) =$$

$$= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \right) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

$$\underline{\underline{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \quad \underline{\underline{\downarrow}}$$

Niskopropusni filter

### FIR sustav za $M=2$ ...



### FIR sustav za proizvoljni $M$

Za proizvoljni  $M$  vrijedi:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot e^{-jn\omega} = \begin{cases} h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\ = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jn\omega} = \dots\dots \\ = \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j(M-1)\frac{\omega}{2}} \end{cases}$$

### FIR sustav za proizvoljni $M$ ...

Amplitudno-fazna karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j(M-1)\frac{\omega}{2}}$$

Amplitudna karakteristika

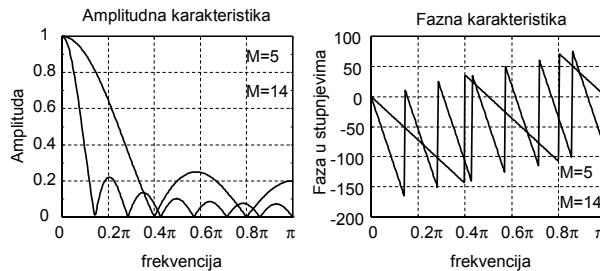
$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \left( \frac{M \cdot \omega}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|$$

Fazna karakteristika

$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1) \cdot \omega}{2} + \pi \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \mu \left( \omega - \frac{2\pi i}{M} \right)$$

gdje je  $\mu(\omega)$  step u  $\omega$

### FIR sustav za proizvoljni $M$ ...



### Grupno kašnjenje

Daljnji parametar za karakterizaciju filtara je grupno kašnjenje.

➡ mjeri linearosti fazne funkcije  
 $\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega}$ , gdje je  $\theta_c(\omega)$  faza

za prije navedeni primjer:

$$\tau(\omega) = \frac{M-1}{2}$$

### Projektiranje FIR filtra

Prepostavimo signal koji je suma kosinusnih signala  
 $u[n] = u_1[n] + u_2[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$

Prepostavimo da želimo sustav (filtrar) koji će:

- gušiti signal  $u_1[n]$  (kosinus kutne frekv. 0,1 rad/sec)
- propuštaći signal  $u_2[n]$  (kosinus kutne frekv. 0,4 rad/sec)

Radi jednostavnosti uzmimo:

- red filtra  $N=2$  (tri uzorka impulsnog odziva)
- impulsni odziv filtra  $h[0] = h[2] = \alpha$   
 $h[1] = \beta$

### Projektiranje FIR filtra ...

Jednadžba diferencija ovog sustava je:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[0] \cdot u[n] + h[1] \cdot u[n-1] + h[2] \cdot u[n-2] = \\ &= \alpha \cdot u[n] + \beta \cdot u[n-1] + \alpha \cdot u[n-2] \end{aligned}$$

a pripadna frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1] \cdot e^{-j\omega} + h[2] \cdot e^{-j2\omega} = \\ &= \alpha \cdot (1 + e^{-j2\omega}) + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\ &= 2\alpha \cdot \left( \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) \cdot e^{-j\omega} + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\ &= (2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta) \cdot e^{-j\omega} \end{aligned}$$

### Projektiranje FIR filtra ...

Amplitudna i fazna karakteristika filtra su

$$|H(e^{j\omega})| = 2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta$$

$$\theta(\omega) = -\omega$$

Iz zahtjeva na filter određujemo  $\alpha$  i  $\beta$

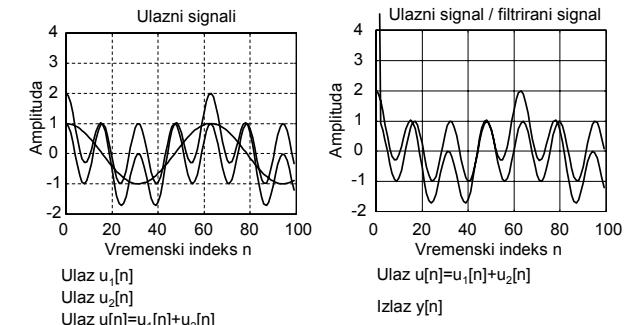
$$\left. \begin{aligned} |H(e^{j0.1})| &= 2\alpha \cdot \cos(0,1) + \beta = 0 \\ |H(e^{j0.4})| &= 2\alpha \cdot \cos(0,4) + \beta = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha &= -6,76195 \\ \beta &= 13,456335 \end{aligned}$$

što daje

$$y[n] = -6,76195 \cdot (u[n] + u[n-2]) + 13,456335 \cdot u[n-1]$$

### Projektiranje FIR filtra ...

Uz pobudu:  $u[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$



## Nerekurzivni digitalni filtri (Projektiranje vremenskim otvorima)

Digitalna obradba signala

LS&S - FER

### Tip 1 FIR filtra

Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet

$$h[n] = h[N-n], \quad 0 \leq n \leq N$$

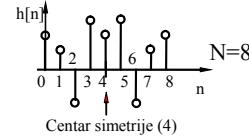
Za daljnje razmatranje pretpostavimo  $N=8$ . U tom slučaju prijenosna funkcija filtra je

$$H(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + h[2] \cdot z^{-2} + h[3] \cdot z^{-3} + h[4] \cdot z^{-4} + h[5] \cdot z^{-5} + h[6] \cdot z^{-6} + h[7] \cdot z^{-7} + h[8] \cdot z^{-8}$$

### Tipovi FIR-filtara ...

#### Tip 1

- simetričan impulsni odziv
- neparan broj uzoraka



$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{N/2} a[m] \cdot \cos(\omega \cdot m) \right\}$$

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right], \quad a[m] = 2 \cdot h\left[\frac{N}{2} - m\right], \quad 1 \leq m \leq \frac{N}{2}$$

$$\tau(\omega) = \frac{N}{2}$$

## FIR-filtri

- Filtri s linearom fazom
- simetrija impulsnog odziva je nužan preduvjet za linearnu fazu
- Ovisno o tipu simetrije impulsnog odziva definiramo četiri tipa FIR filtra sa realnim impulsnim odzivom duljine  $N+1$

## Tipovi FIR-filtara

- > Tip 1 - simetričan impulsni odziv
  - neparan broj uzoraka impulsnog odziva
- > Tip 2 - simetričan impulsni odziv
  - paran broj uzoraka impulsnog odziva
- > Tip 3 - antisimetričan impulsni odziv
  - neparan broj uzoraka impulsnog odziva
- > Tip 4 - antisimetričan impulsni odziv
  - paran broj uzoraka impulsnog odziva

### Tip 1 FIR filtra ...

Prema definiciji tipa 1 FIR filtra za  $N=8$  vrijedi

$$h[0] = h[8], \quad h[1] = h[7], \quad h[2] = h[6], \quad h[3] = h[5],$$

te se prethodni izraz može pojednostaviti

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] \cdot (1 + z^{-8}) + h[1] \cdot (z^{-1} + z^{-7}) + \\ &\quad + h[2] \cdot (z^{-2} + z^{-6}) + h[3] \cdot (z^{-3} + z^{-5}) + h[4] \cdot z^{-4} = \\ &= h[0] \cdot z^{-4} \cdot (z^4 + z^{-4}) + h[1] \cdot z^{-4} \cdot (z^3 + z^{-3}) + \\ &\quad + h[2] \cdot z^{-4} \cdot (z^2 + z^{-2}) + h[3] \cdot z^{-4} \cdot (z + z^{-1}) + h[4] \cdot z^{-4} = \\ &= z^{-4} \cdot \{h[0] \cdot (z^4 + z^{-4}) + h[1] \cdot (z^3 + z^{-3}) + \\ &\quad + h[2] \cdot (z^2 + z^{-2}) + h[3] \cdot (z + z^{-1}) + h[4]\} \end{aligned}$$

### Tip 1 FIR filtra ...

Pripadna frekvencijska karakteristika

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} \cdot [2h[0] \cdot \cos(4\omega) + 2h[1] \cdot \cos(3\omega) + \\ + 2h[2] \cdot \cos(2\omega) + 2h[3] \cdot \cos(\omega) + h[4]]$$

ili u općem slučaju

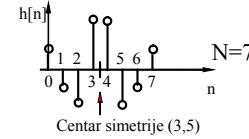
$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{N/2} a[m] \cdot \cos(\omega \cdot m) \right\}$$

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right], \quad a[m] = 2h\left[\frac{N}{2} - m\right], \quad 1 \leq m \leq \frac{N}{2}$$

### Tipovi FIR-filtara ...

#### Tip 2

- simetričan impulsni odziv
- paran broj uzoraka



$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{(N+1)/2} b[m] \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)\right) \right\}$$

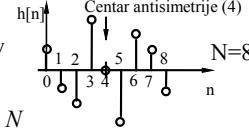
$$b[m] = 2 \cdot h\left[\frac{N+1}{2} - m\right], \quad 1 \leq m \leq \frac{N+1}{2}$$

$$\tau(\omega) = \frac{N}{2}$$

### Tipovi FIR-filtara ...

#### Tip 3

- antisimetričan impulsni odziv
- neparan broj uzoraka



$$h[n] = -h[N-n], \quad 0 \leq n \leq N$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{N/2} c[m] \cdot \cos(\omega \cdot m) \right\}$$

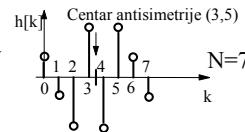
$$c[m] = 2 \cdot h\left[\frac{N}{2} - m\right], \quad 1 \leq m \leq \frac{N}{2}$$

$$\tau(\omega) = \frac{N}{2}$$

## Tipovi FIR-filtara ...

Tip 4

- antisimetričan impulsni odziv
- paran broj uzoraka



$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{(N+1)/2} d[m] \cdot \cos \left( \omega \cdot \left( m - \frac{1}{2} \right) \right) \right\}$$

$$d[m] = 2 \cdot h \left[ \frac{N+1}{2} - m \right], \quad 1 \leq m \leq \frac{N+1}{2}$$

$$\tau(\omega) = \frac{N}{2}$$

## Gibbsov fenomen ...

$h(k)$  se može prikazati kao produkt željenog impulsnog odziva i "otvora" konačnog trajanja

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

gdje je

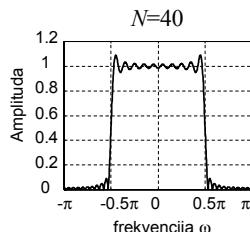
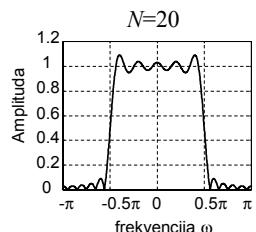
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U frekvencijskoj domeni vrijedi

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) \cdot W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

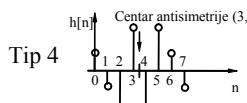
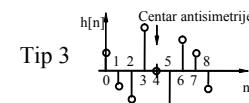
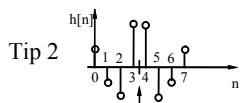
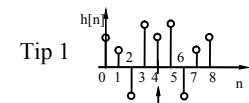
odnosno  $H(e^{j\omega})$  je periodička kontinuirana konvolucija željene prijenosne karakteristike  $H_d(e^{j\omega})$  i Fourierove transformacije vremenskog otvora  $W(e^{j\omega})$ .

## Gibbsov fenomen ...



Za dovoljno velik  $N$  minimalno gušenje u pojasu gušenja je konstantno i iznosi oko 8,9% razlike između amplitudne karakteristike idealnog filtra u pojasu propuštanja i u pojasu gušenja.

## Tipovi FIR-filtara ...



## Gibbsov fenomen

Najizravniji pristup projektiranju FIR filtera je uzimanje konačnog broja uzoraka iz beskonačnog impulsnog odziva idealnog filtra. Neka je  $H_d(e^{j\omega})$  željena idealna prijenosna karakteristika filtra, a  $h_d[n]$  odgovarajući impulsni odziv beskonačnog trajanja

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

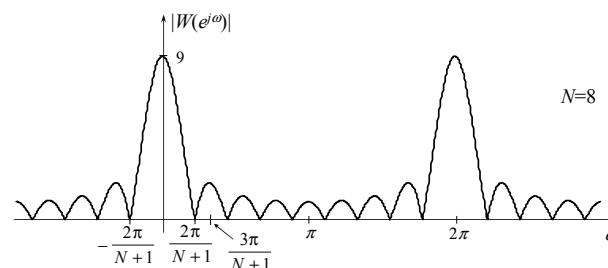
Kauzalni impulsni odziv konačnog trajanja možemo dobiti kao

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

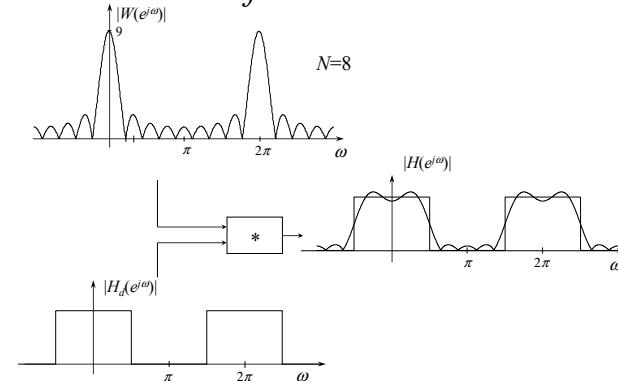
## Gibbsov fenomen ...

Fourierova transformacija vremenskog otvora  $w[n]$  je

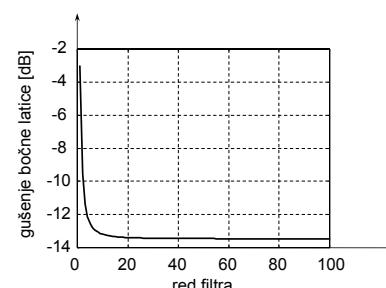
$$W(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^N e^{-jk\omega} = e^{-j\omega \frac{N}{2}} \cdot \frac{\sin \omega(N+1)/2}{\sin \omega/2}$$



## Gibbsov fenomen ...

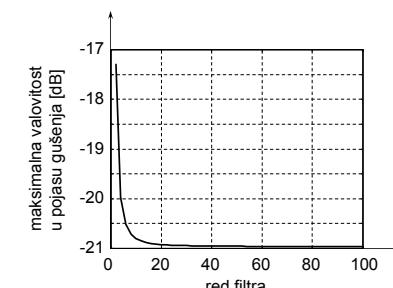


## Gibbsov fenomen ...



Ovisnost gušenja bočne latice o broju uzoraka

## Gibbsov fenomen ...



Ovisnost maksimalne valovitosti u području gušenja o redu filtra

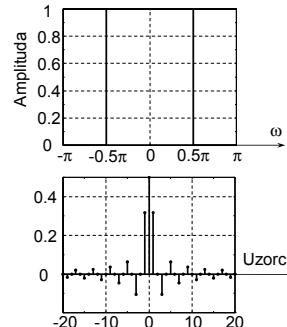
## Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora

- Postupak projektiranja je slijedeći:

- Uzeti idealnu karakteristiku filtra

- Izračunati Fourierovu transformaciju idealne karakteristike filtra

beskonačan impulsni odziv

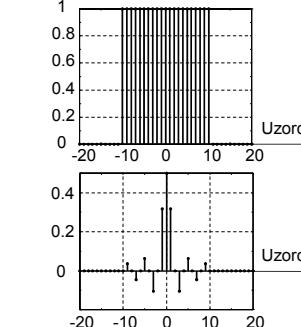


## Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora ...

- Odabrati vremenski otvor (npr. pravokutni vremenski otvor)

- Pomožiti beskonačni impulsni odziv s uzorcima vremenskog otvora

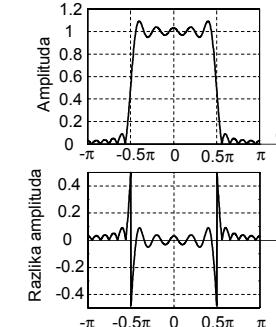
konačan impulsni odziv



## Projektiranje FIR filtara metodom vremenskih otvora ...

- Amplitudno frekvencijska karakteristika idealnog i dobivenog filtra

- greška dobivenog filtra



## Tipovi vremenskih otvora

- Pravokutni
- Bartlettov (trokutni)
- Hannov
- Hammingov
- Blackmanov
- Dolph-Chebyshevlev
- Kaiserov

Fiksni vremenski otvori

Promjenjivi vremenski otvori

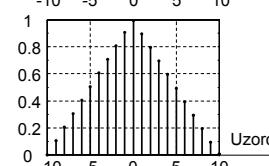
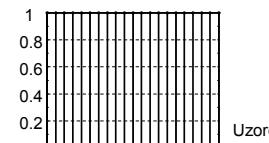
## Fiksni vremenski otvori

Pravokutni vremenski otvor

$$w[n] = 1, \quad -M \leq n \leq M$$

Bartlettov vremenski otvor

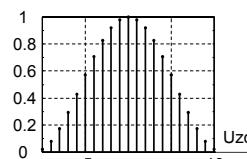
$$w[n] = 1 - \frac{|n|}{M+1}, \quad -M \leq n \leq M$$



## Fiksni vremenski otvori ...

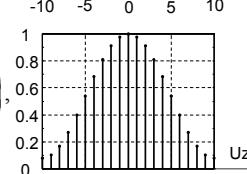
Hannov vremenski otvor

$$w[n] = 0,5 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right), \quad -M \leq n \leq M$$



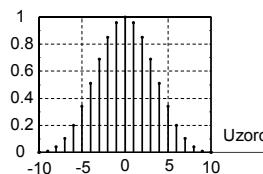
Hammingov vremenski otvor

$$w[n] = 0,54 + 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right), \quad -M \leq n \leq M$$



## Fiksni vremenski otvori ...

Blackmanov vremenski otvor

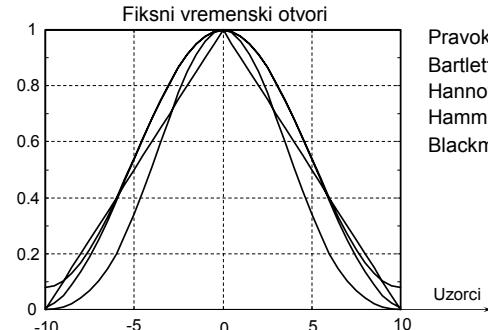


$$w[n] = 0,42 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right), \quad -M \leq n \leq M$$

## Fiksni vremenski otvori ...

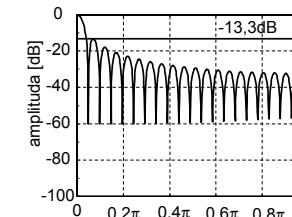
Fiksni vremenski otvori

Pravokutni  
Bartlettov  
Hannov  
Hammingov  
Blackmanov

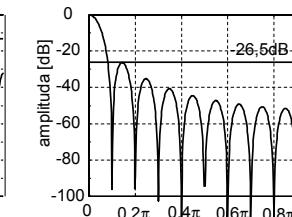


## Fiksni vremenski otvori (amplitudno-frekvencijske karakteristike)

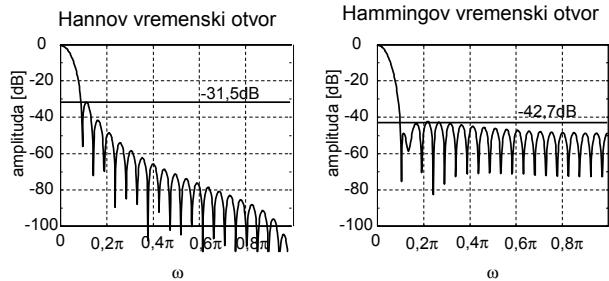
Pravokutni vremenski otvor



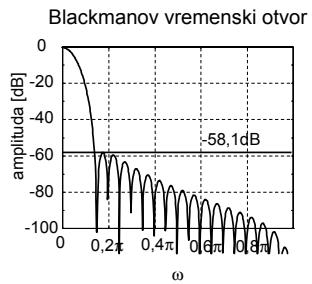
Bartlettov vremenski otvor



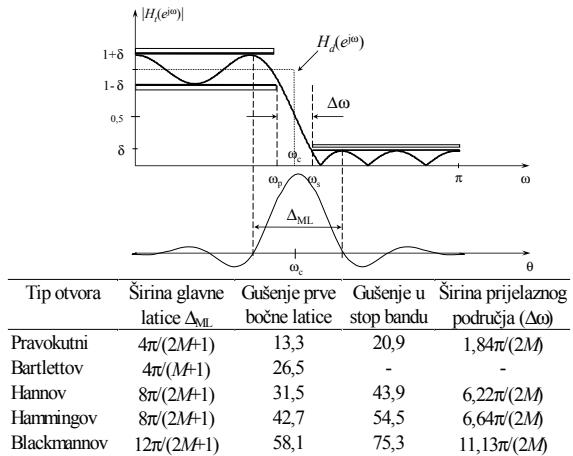
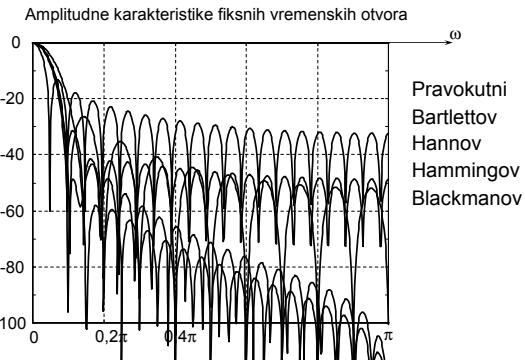
## Fiksni vremenski otvor (amplitudno-frekvencijske karakteristike)



## Fiksni vremenski otvor (amplitudno-frekvencijske karakteristike)

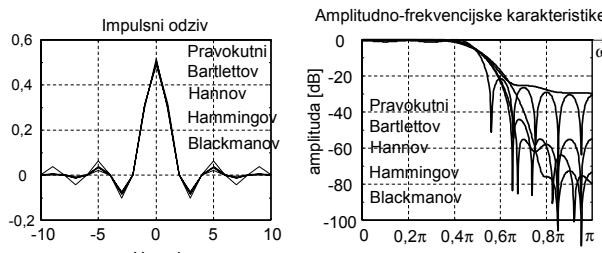


## Fiksni vremenski otвори (amplitudno-frekvencijske karakteristike)



## Fiksni vremenski otvori ...

- primjer:  $2M = N = 20$ ,  $\omega_c = 0,5\pi$



## Promjenjivi vremenski otvor

- Omogućuju kontrolu minimalnog gušenja
- Kod njih se promjenom određenih parametara projektiranju može utjecati na karakteristiku filtra
- Razmotrit ćemo slijedeća dva tipa otvora
  - Dolph-Chebyshev ljev otvor
  - Kaiserov otvor

## Dolph-Chebyshev ljev otvor

$$w[n] = \frac{1}{2M+1} \left[ \frac{1}{\gamma} + 2 \sum_{m=1}^M T_m \left( \beta \cdot \cos \frac{m\pi}{2M+1} \right) \cos \frac{2mn\pi}{2M+1} \right], \quad -M \leq n \leq M$$

gdje je

$$\gamma = \frac{\text{amplituda prve bočne latice}}{\text{amplituda glavne latice}}$$

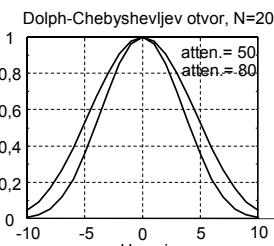
$$\beta = \cosh \left( \frac{1}{2M} \cosh^{-1} \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right)$$

$$T_l(x) = \begin{cases} \cos(l \cdot \cos^{-1} x), & \text{za } |x| \leq 1 \\ \cosh(l \cdot \cosh^{-1} x), & \text{za } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{Chebyshev ljev polinom } l\text{-toga reda}$$

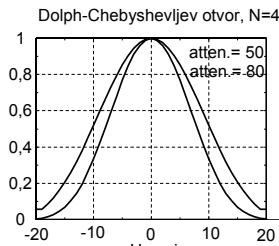
## Dolph-Chebyshev ljev otvor ...

Primjer:

N = 20



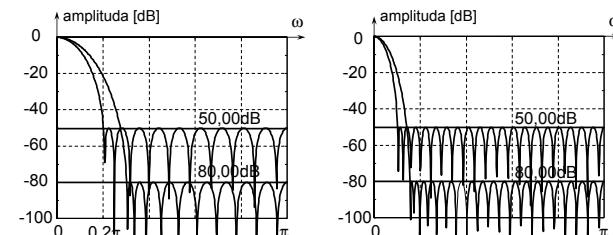
N = 40



## Dolph-Chebyshev ljev otvor ...

N = 20

N = 40



• Veće gušenje → šira glavna latica

• Veći red otvora → uža glavna latica

### Kaiserov otvor

$$w[n] = \frac{I_0\left\{\beta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n}{M}\right)^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$

gdje je  $I_0(u)$  modificirana Bessel-ova funkcija nultog reda prve vrste

$$I_0(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{(u/2)^r}{r!} \right]^2$$

a  $\beta$  parametar koji kontrolira gušenje u području gušenja

### Kaiserov otvor ...

Postoje izrazi za procjenu  $\beta$  i duljine filtra  $N$  u ovisnosti o gušenju u stop bandu  $\alpha_s$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_s - 8.7) & \text{za } \alpha_s > 50 \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21), & \text{za } 21 \leq \alpha_s \leq 50 \\ 0 & \text{za } \alpha_s < 21 \end{cases}$$

$$N \approx \begin{cases} \frac{\alpha_s - 7.95}{14.36 \cdot \Delta f} + 1 & \text{za } \alpha_s > 21 \\ \frac{0.9222}{\Delta f} + 1 & \text{za } \alpha_s \leq 21 \end{cases}$$

### Kaiserov otvor ...

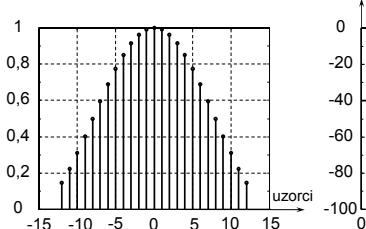
Primjer:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 0,3\pi & \omega_s &= 0,5\pi & \omega_c &= 0,4\pi & N &= 23,3189 \\ \alpha_s &= 40 \text{ dB} & & & & & M &= 12 \\ \beta &= 3,3953 & h_t[n] &= \frac{\sin(\omega_c \cdot n)}{\pi \cdot n} \cdot w[n], \quad -M \leq n \leq M \end{aligned}$$

### Kaiserov otvor ...

$N=24$ , Att.=40dB,  $\omega_p=0,3\pi$ ,  $\omega_s=0,5\pi$ ,  $\omega_c=0,4\pi$

Uzorci otvora



Amp.frek. karakteristika

