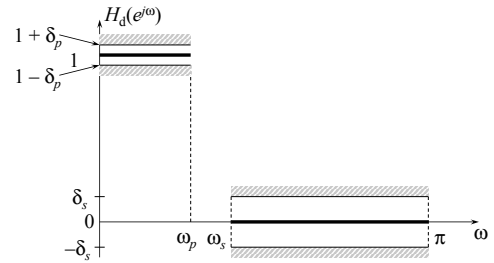
Projektiranje optimalnih FIR filtara

Digitalna obradba signala

Valovitost kod filtara

- Filtri dobiveni metodom vremenskih otvora
  - valovitost definirana vrstom vremenskog otvora
  - nemogućnost kontrole nad valovitostima u pojedinim frekvencijskim područjima
- Filtri dobiveni korištenjem adaptivnih vremenskih otvora (Kaiser, Dolph-Chebyshev)
  - omogućuju kontrolu minimalnog gušenja
- Optimalni FIR filtri
  - kontrola valovitosti za svako pojedino područje

Specifikacija optimalnog niskog propusta



Neki od parametara N, δ_s, δ_p, ω_p, ω_s su fiksirani, a iterativnim postupcima se podešavaju ostali parametri.

Numeričko projektiranje FIR filtara

- $H(e^{j\omega})$ - frekvencijska karakteristika digitalnog filtra $H(z)$ koja aproksimira željenu frekvencijsku karakteristiku $D(e^{j\omega})$.
- Primjenjuje se iterativni postupak.

Numeričko projektiranje FIR filtara

- Iterativno se određuju koeficijenti H(z) tako da je razlika $H(e^{j\omega})$ i $D(e^{j\omega})$ preko zatvorenih subintervala od $0 \le \omega \le \pi$ minimalna.
- Greška aproksimacije dana je s:

$$\mathrm{E}(\omega) = W(e^{j\omega})[H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega})]$$

gdje je $W(e^{j\omega})$ težinska funkcija

Numeričko projektiranje FIR filtara

- **Chebyshev** ili **minimax kriterij:** Minimizira se maksimalna vrijednost greške:

$$\varepsilon = \max_{\omega \in R} |\mathrm{E}(\omega)|$$

gdje je R skup razdvojenih frekvencijskih područja unutar $0 \le \omega \le \pi$ za koje je $D(e^{j\omega})$ definiran.
- Na primjer, za niski propust R to područje je unija $[0, \omega_p]$ i $[\omega_s, \pi]$.

Projektiranje FIR filtara jednake valovitosti (equiripple)

- FIR filtri linearne faze projektirani na temelju maksimalne greške

$$\varepsilon = \max_{\omega \in R} |\mathrm{E}(\omega)|$$

nazivaju se ***equiripple* FIR filtri**
- Za minimizirani ε funkcija greške E(ω) karakterizirana je jednakom valovitošću u području R

Projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Opći oblik frekvencijske karakteristike kauzalnog FIR filtra duljine N=2M + 1 je:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega} e^{j\beta} \breve{H}(\omega), \quad \beta = 0 \text{ ili } \pi/2$$

gdje je $\breve{H}(\omega)$ amplitudna karakteristika realna funkcija od ω.
- Funkcija greške je tada dana s:

$$\mathrm{E}(\omega) = W(\omega)[\breve{H}(\omega) - D(\omega)]$$

gdje je $D(\omega)$ željena amplitudna karakteristika a $W(\omega)$ pozitivna težinska funkcija

Projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- **Parks-McClellan algoritam** – Temelji se na iterativnom podešavanju koeficijenata $\breve{H}(\omega)$ dok maksimum pogreške E(ω) ne postane minimalan.
- Ako maksimum od E(ω) u području $\omega_a \le \omega \le \omega_b$ iznosi ε_o, tada za apsolutnu grešku vrijedi:

$$|\breve{H}(\omega) - D(\omega)| \le \frac{\varepsilon_o}{|W(\omega)|}, \quad \omega_a \le \omega \le \omega_b$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Za projektiranje filtra

$$D(\omega)=\begin{cases}1, & \text{za pojas propuštanja}\\ 0, & \text{za pojas gušenja}\end{cases}$$

- $\breve{H}(\omega)$ treba zadovoljiti gornji zahtjev s valovitošću $\pm\delta_p$ u pojasu propuštanja i valovitošću δ_s u pojasu gušenja.

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Zato težinska funkcija može biti izabrana kao

$$W(\omega)=\begin{cases}1, & \text{u pojasu propuštanja}\\ \delta_p/\delta_s, & \text{u pojasu gušenja}\end{cases}$$

ili

$$W(\omega)=\begin{cases}\delta_s/\delta_p, & \text{u pojasu propuštanja}\\ 1, & \text{u pojasu gušenja}\end{cases}$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- **Tip 1. -** $\breve{H}(\omega)=\sum_{n=0}^{M}a[n]\cos(\omega n)$

gdje je

$$a[0]=h[M],\quad a[n]=2h[M-n],\quad 1\le n\le M$$

- **Tip 2. -** $\breve{H}(\omega)=\sum_{n=1}^{(2M+1)/2}b[n]\cos\left(\omega(n-\tfrac{1}{2})\right)$

gdje je

$$b[n]=2h[\frac{2M+1}{2}-n],\quad 1\le n\le\frac{2M+1}{2}$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- **Tip 3. -** $\breve{H}(\omega)=\sum_{n=1}^{M}c[n]\sin(\omega n)$

gdje je

$$c[n]=2h[M-n],\quad 1\le n\le M$$

- **Tip 4. -** $\breve{H}(\omega)=\sum_{n=1}^{(2M+1)/2}d[n]\sin\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)$

gdje je

$$d[n]=2h[\frac{2M+1}{2}-n],\quad 1\le n\le\frac{2M+1}{2}$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Amplitudna karakteristika za sva četiri tipa FIR filtra s linearnom fazom može biti prikazana kao

$$\breve{H}(\omega)=Q(\omega)A(\omega)$$

gdje je

$$Q(\omega)=\begin{cases}1, & \text{za tip 1.}\\ \cos(\omega/2), & \text{za tip 2.}\\ \sin(\omega), & \text{za tip 3.}\\ \sin(\omega/2), & \text{za tip 4.}\end{cases}$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

te $\quad A(\omega)=\sum_{n=0}^{L}\tilde{a}[n]\cos(\omega n)$

gdje je

$$\tilde{a}[n]=\begin{cases}a[n], & \text{za tip 1.}\\ \tilde{b}[n], & \text{za tip 2.}\\ \tilde{c}[n], & \text{za tip 3.}\\ \tilde{d}[n], & \text{za tip 4.}\end{cases}$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

za

$$L=\begin{cases}M, & \text{za tip 1.}\\ \frac{2M-1}{2}, & \text{za tip 2.}\\ M-1, & \text{za tip 3.}\\ \frac{2M-1}{2}, & \text{za tip 4.}\end{cases}$$

Što su $\tilde{b}[n]$, $\tilde{c}[n]$ i $\tilde{d}[n]$?

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Što je $\tilde{b}[n]$?
- Za tip 2 vrijedi

$$\breve{H}(\omega)=\sum_{n=1}^{(2M+1)/2}b[n]\cos\left(\omega(n-\frac{1}{2})\right)$$

gdje je $b[n]=2h[\frac{2M+1}{2}-n],\quad 1\le n\le\frac{2M+1}{2}$

- Moguća je transformacija koja vodi na

$$\breve{H}(\omega)=\cos\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{(2M-1)/2}\tilde{b}[n]\cos(\omega n)$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

$$\breve{H}(\omega)=\cos\frac{\omega}{2}\sum_{n=0}^{(2M-1)/2}\tilde{b}[n]\cos(\omega n)$$

- U kakvoj su vezi $b[n]$ i $\tilde{b}[n]$?

$$b[\frac{2M+1}{2}]=\frac{1}{2}\tilde{b}[\frac{2M-1}{2}]$$

$$b[n]=\frac{1}{2}\left(\tilde{b}[n]+\tilde{b}[n-1]\right)\qquad 2\le n\le\frac{2M-1}{2}$$

$$b[1]=\frac{1}{2}\left(\tilde{b}[1]+\tilde{b}[0]\right)$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Modificirani oblik funkcije greške je

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\omega) &= W(\omega)[Q(\omega)A(\omega) - D(\omega)] \\ &= W(\omega)Q(\omega)[A(\omega) - \frac{D(\omega)}{Q(\omega)}] \\ &= \widetilde{W}(\omega)[A(\omega) - \widetilde{D}(\omega)] \end{aligned}$$

uz notaciju

$$\widetilde{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$$

$$\widetilde{D}(\omega) = D(\omega)/Q(\omega)$$

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- <u>Optimizacijski problem</u> - Odrediti $\tilde{a}[n]$ koji minimiziraju maksimalnu vrijednost ε od:

$$\mathrm{E}(\omega) = \widetilde{W}(\omega)[\sum_{n=0}^{L} \tilde{a}[n]\cos(\omega n) - \widetilde{D}(\omega)]$$

za specificirano frekvencijsko područje $\omega \in R$

- Kada su određeni $\tilde{a}[n]$ računaju se odgovarajući koeficijenti originala $A(e^{j\omega})$. Iz njih se tada određuju $h[n]$.

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- <u>Alternacijski teorem</u> -

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{L} \tilde{a}(n)\cos(\omega n)$$

je najbolje jedinstveno rješenje u minimizaciji ε

$$\varepsilon = \max_{\omega \in R} |\mathrm{E}(\omega)| = \max_{\omega \in R} |W(\omega)[Q(\omega)A(\omega) - D(\omega)]|$$

ako i samo ako postoje najmanje $L + 2$ točke $\{\omega_i\}$, $0 \le i \le L+1$, takve da je $\omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{L+1}$ i $\mathrm{E}(\omega_i) = -\mathrm{E}(\omega_{i+1})$, $|\mathrm{E}(\omega_i)| = \varepsilon$ za $0 \le i \le L+1$.

Numeričko projektiranje FIR filtara - primjer

- Primjer niskopropusnog FIR filtra tipa 1. reda $N = 12$. U ovom slučaju je $\widetilde{H}(\omega) = A(\omega)$.
- Neka je:

$R = [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$

$\widetilde{D}(\omega) = D(\omega) = 1$ i $\widetilde{W}(\omega) = W(\omega) = 1$ za $\omega \in [0, \omega_p]$

$\widetilde{D}(\omega) = D(\omega) = 0$ i $\widetilde{W}(\omega) = W(\omega) = 2$ za $\omega \in [\omega_s, \pi]$

- Težinska funkcija definira da će valovitost u pojasu gušenja biti polovica valovitosti u pojasu propuštanja.

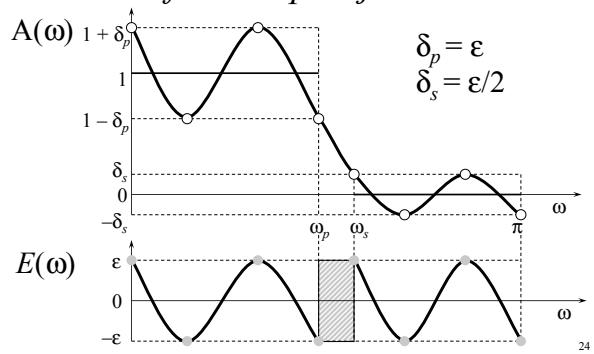
Numeričko projektiranje FIR filtara - primjer

- Ekstremi od $\mathrm{E}(\omega)$ su u $\omega = \omega_i$, $0 \le i \le L + 1$ i u njima je $\dfrac{dE(\omega)}{d\omega} = 0$
- Za $\omega \in [0, \omega_p]$ i za $\omega \in [\omega_s, \pi]$ $\widetilde{D}(\omega)$ i $\widetilde{W}(\omega)$ su konstante pa vrijedi

$$\frac{dE(\omega)}{d\omega} = \frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0 \quad \text{za} \quad \omega = \omega_i$$

pa za naš primjer vrijedi…

Numeričko projektiranje FIR filtara - primjer



Numeričko projektiranje FIR filtara - primjer

- Za naš primjer je L = N/2 = 6 pa A(ω) sadrži sedam nepoznanica:

$$\tilde{a}[0], \tilde{a}[1], \tilde{a}[2], \ldots, \tilde{a}[6]$$

- Broj točaka ekstrema je L + 2 = 8:

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{7=L+1}$$

- Metoda pronalaženja optimalnog filtra svodi se na iterativni postupak određivanja frekvencija ekstrema.

Numeričko projektiranje FIR filtara jednake valovitosti

- Po alternacijskom teoremu znamo da će optimalni filtar $A(e^{j\omega})$ zadovoljavati sljedeće jednakosti

$$\widetilde{W}(\omega_i)[A(\omega_i) - \widetilde{D}(\omega_i)] = (-1)^i \varepsilon, \ 0 \le i \le L+1$$

koje napisane u matričnom obliku su

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cdots & \cos(L\omega_0) & -1/\widetilde{W}(\omega_0) \\ 1 & \cos(\omega_1) & \cdots & \cos(L\omega_1) & 1/\widetilde{W}(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_L) & \cdots & \cos(L\omega_L) & (-1)^{L-1}/\widetilde{W}(\omega_L) \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \cdots & \cos(L\omega_{L+1}) & (-1)^{L}/\widetilde{W}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}[0] \\ \tilde{a}[1] \\ \vdots \\ \tilde{a}[L] \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{D}(\omega_0) \\ \widetilde{D}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widetilde{D}(\omega_L) \\ \widetilde{D}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix}$$

Remez-algoritam

- Matrična jednadžba može biti riješena za nepoznanicu $\tilde{a}[i]$ i ε ako su unaprijed poznate $L + 2$ frekvencije ekstrema.
- Remez-algoritam se koristi da bi se odredile pozicije frekvencija ekstrema.

Remez-algoritam

- Postupci kod Remez-algoritma su slijedeći:
  1) proizvoljni odabir početnih ekstremalnih frekvencija,
  2) računanje ε iz prije dane matrične jednakosti,
  3) računanje $A(e^{j\omega})$ provlačenjem Lagrangeovog polinoma kroz $L + 1$ od $L + 2$ odabrane točke ekstrema,
  4) određivanje novih točaka ekstrema od $A(e^{j\omega})$ odnosno funkcije pogreške $E(e^{j\omega})$.

Remez-algoritam

- Iterativni postupak se ponavlja dok se ε u dva uzastopna koraka ne promijeni za neku zadanu malu vrijednost.
- Tada je ε željena pogreška aproksimacije po minimax kriteriju.
- U algoritmu se u svakom koraku implicitno mijenjaju sve vrijednosti uzoraka impulsnog odziva $h[n]$, ali se stvarne vrijednosti $h[n]$ eksplicitno uopće ne računaju.
- Na kraju se iz uzoraka funkcije dobivene interpolacijom polinomom pomoću DFT-a računaju uzorci $h[n]$.

Remez-algoritam

- Optimalni FIR filtri imaju najmanju valovitost δ za definirano prijelazno područje $[\omega_s, \omega_p]$.
- Rezultirajuća valovitost je za niski propust u području gušenja $\delta_p = \delta$, a u području propuštanja $\delta_s = K\delta$.
- Za procjenu potrebnih broja uzoraka $N + 1$ za ostvarenje nisko propusnog filtra zadanog prijelaznog područja i valovitosti može se koristiti slijedeći izraz:

$$N = \frac{-10\log_{10}(\delta_s\delta_p) - 13}{2{,}324(\omega_p - \omega_s)}$$

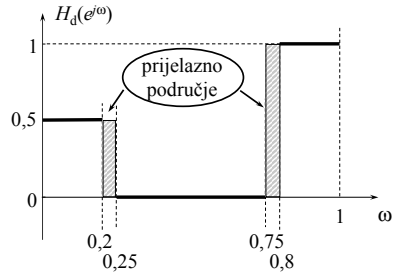
- Moguće je realizirati različite i vrlo složene tipove filtara.

Korištenje MATLAB funkcije `remez()`

- Funkcija `remez()` služi za realizaciju višepojasnih optimalnih FIR filtara s proizvoljnim omjerom valovitosti u pojasevima.
- Poziv funkcije: `b = remez(N, f, m, wt)`
  - `b` – vektor dužine $N + 1$ s uzorcima impulsnog odziva,
  - `N` – red filtra,
  - `f` – vektor s frekvencijama u rasponu [0, 1] (1 predstavlja pola frekvencije otipkavanja),
  - `m` – magnitude željene frekv. karakteristike,
  - `wt` – vektor s težinskim faktorima.

Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Primjer željene frekvencijske karakteristike:



Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Definicije varijabli potrebnih za ostvarenje primjera željene frekvencijske karakteristike:

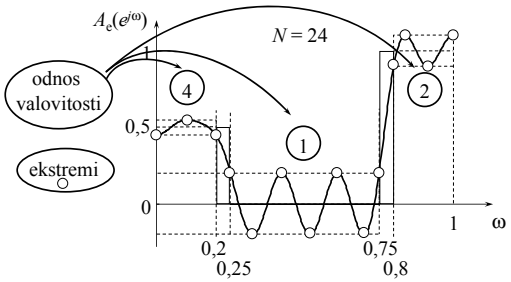
```
N = 24
f = [0   0.2 0.25 0.75 0.8 1]
m = [0.5 0.5 0    0    1   1]
w = [4 1 2]
```

- Poziv funkcije `remez()`:

```
b = remez(N, f, m, w)
```

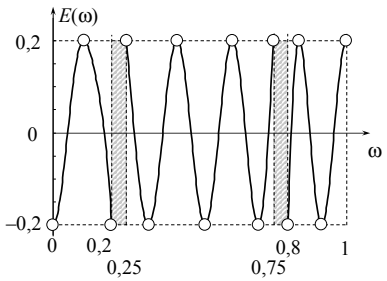

Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Dobivena optimalna frekvencijska karakteristika:



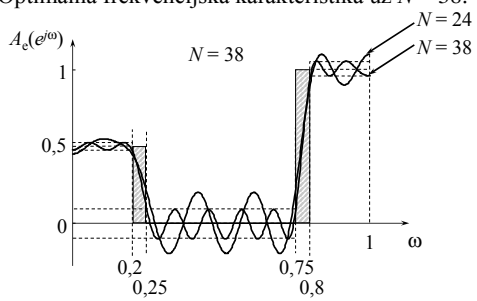
Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Konačna pogreška $\delta = \delta_s \approx 0.2$.



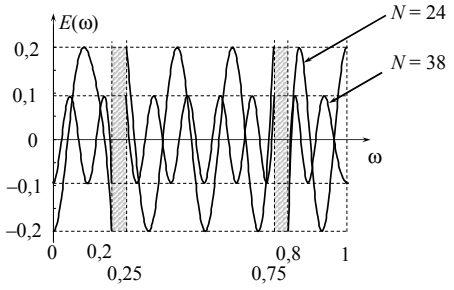
Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Optimalna frekvencijska karakteristika uz $N = 38$:



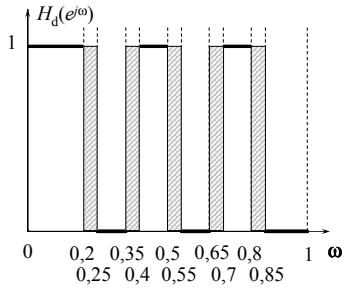
Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Konačna pogreška uz $N = 38$, $\delta = \delta_s \approx 0{,}1$.



Primjer korištenja MATLAB funkcije `remez()`

- Primjer u MATLAB-u:



Matlab primjeri (primjer i filtdemo)