Metoda jednakog impulsnog odziva

Digitalna Obradba Signala

LS&S - FER

Metoda jednakog impulsnog odziva

◆ metoda projektiranja IIR filtra transformacijom prijenosne funkcije prototipnog analognog filtra.

◆ osnovna ideja: naći IIR prijenosnu funkciju čiji je impulsni odziv jednak jednoliko otipkanom impulsnom odzivu prototipnog analognog filtra.

Metoda jednakog impulsnog odziva

Neka je $H_a(s)$ prijenosna funkcija kauzalnog i stabilnog analognog filtra. Njegov impulsni odziv je dan inverznom Laplace-ovom transformacijom

$$h_a(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\}$$

Impulsni odziv digitalnog filtra je jednoliko otipkana verzija impulsnog odziva analognog filtra, tj.

$$g[n]=h_a(nT)$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

postupak uzimanja uzoraka ili otipkavanja kontinuiranog signala možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji $h_a(t)$ niza impulsa, čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala

$$h_{as}(t)= \mathrm{S}_T\{h_a(t)\}$$

odnosno

$$h_{as}(t)=h_a(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n\mathrm{T})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h_a(nT)\delta(t-n\mathrm{T})$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T, kao svaka periodična funkcija se dade predstaviti Fourierovim redom, gdje su Fourierovi koeficijenti dani s:

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}dt=\frac{1}{T}$$

slijedi: $$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\frac{2\pi k}{T}t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

pa je: $$h_{as}(t)=h_a(t)\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi k}{T}t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_a(t)e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

Laplaceova transformacija signla $h_{as}(t)$ dana je s:

$$H_{as}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h_{as}(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}h_a(t)\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right)e^{-st}dt=$$

zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$H_{as}(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h_a(t)e^{-(s-j\frac{2\pi k}{T})t}dt}_{H_a(s-j\frac{2\pi k}{T})}$$

konačno

$$H_{as}(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(s-j\tfrac{2\pi k}{T})$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

Laplaceovu transformaciju signla $h_{as}(t)$ možemo izraziti i ovako:

$$H_{as}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h_{as}(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)\delta(t-nT)\right)e^{-st}dt$$

zamjenom redoslijeda sumacije i integracije dobivamo:

$$H_{as}(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)e^{-snT}$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

slijedi

$$H_{as}(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{h_a(nT)}_{g[n]}\left(\underbrace{e^{sT}}_{z}\right)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g[n]z^{-n}=G(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

konačno

$$G(z)\Big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(s-j\tfrac{2\pi k}{T})$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

Tada vrijedi

$$G(z)=\mathcal{Z}\{g[n]\}=\mathcal{Z}\{h_a(nT)\}=\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(s-j\frac{2\pi k}{T}\right)\Bigg|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

Frekvencijsku karakteristiku dobijemo uvrštavanjem $z=e^{j\omega}$:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

Pogledajmo transformaciju $z = e^{sT}$ koja preslikava *s* ravninu u *z* ravninu.

Za $s = \sigma_0 + j\Omega_0$ vrijedi $z = r \cdot e^{j\omega} = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\Omega_0 T}$

odnosno $|z| = r = e^{\sigma_0 T}$

iz ovoga slijedi

imaginarna os u *s* ravnini (σ_0=0) → jedinična kružnica u *z* ravnini (|z|= 1)

lijeva *s* poluravnina (σ_0<0) → unutrašnjost jedinične kružnice u *z* ravnini (|z|= 1)

desna *s* poluravnina (σ_0>0) → izvan jedinične kružnice u *z* ravnini (|z|= 1)

Metoda jednakog impulsnog odziva

zaključak: transformacijom

$$z = e^{sT}$$

polovi stabilnog analognog filtra se preslikavaju u unutrašnjost jedinične kružnice u z ravnini

Metoda jednakog impulsnog odziva

transformacija $z = e^{sT}$ preslikava sve točke u s ravnini dane s

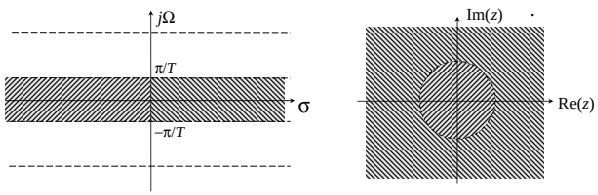
$$s = \sigma_0 + j\Omega_0 + j\frac{2\pi k}{T}$$

u jednu točku u z ravnini

$$z = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\Omega_0 T}$$

Metoda jednakog impulsnog odziva

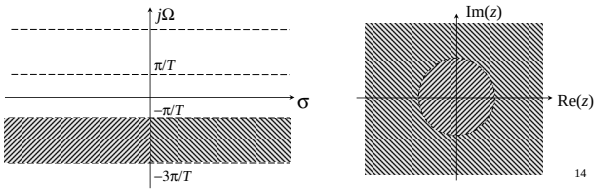
dakle, horizontalni odsječak $-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$ u *s* ravnini se preslikava u cijelu *z* ravninu



Metoda jednakog impulsnog odziva

isto tako horizontalni odsječak $-3\pi/T \le \Omega \le -\pi/T$ u *s* ravnini se preslikava u cijelu *z* ravninu

svaki horizontalni odsječak $(2k-1)\pi/T \le \Omega \le (2k+1)\pi/T$ u *s* ravnini se preslikava u cijelu *z* ravninu



Metoda jednakog impulsnog odziva

dakle, transformacija

$$z = e^{sT}$$

je višestruko preslikavanje iz s ravnine u cijelu z ravninu

Utjecaj preslikavanja s=(1/*T*)ln*z na frekvencijsku karakteristiku*

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi l}{T}\right)$$

Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra je suma posmaknutih kopija frekvencijske karakteristike analognog filtra.

Ako je frekvencijska karakteristika analognog filtra frekvencijski ograničena, tj. ako je

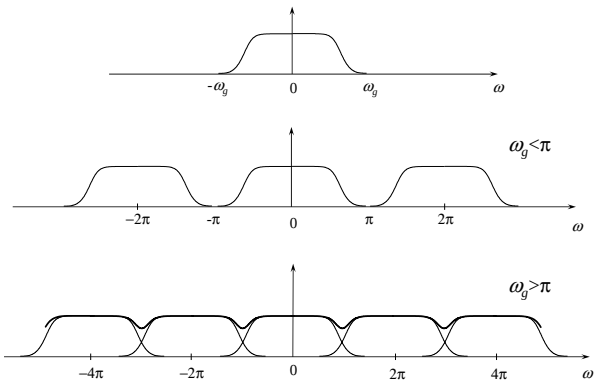
$$H_a(j\Omega) = 0 \quad \text{za} \quad |\Omega| \ge \frac{\pi}{T}$$

tada vrijedi

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \cdot H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad \text{za} \quad |\omega| \le \pi$$

i nema aliasinga.

Ako gornji uvjet nije ispunjen, doći će do preklapanja spektara, odnosno aliasinga.



aliasing

Metoda jednakog impulsnog odziva

- Ne postoji analogni filtar čija je prijenosna karakteristika frekvencijski ograničena.
- U praksi, ako je $|H_a(j\Omega)| \le 0{,}01 H_{max}$ za $\Omega \ge \pi/T$, gdje je $H_{max} = \max(|H_a(j\Omega)|)$ u intervalu $0 \le \Omega \le \pi/T$, može se smatrati da je prijenosna karakteristika "dovoljno" ograničena.

Metoda jednakog impulsnog odziva

- Metoda jednakog impulsnog odziva nije pogodna za projektiranje filtra ako prototipni analogni filtar nema frekvencijski ograničenu prijenosnu karakteristiku, kao što je npr. slučaj s visokopropusnim analognim filtrom.
- ◆ Ako želimo projektirati digitalni filtar čija frekvencijska karakteristika odgovara frekvencijskoj karakteristici analognog filtra do frekvencije $\Omega=\pi/T$, potrebno je odabrati tzv. "guard filter" $H_g(s)$ takav da je produkt $H_a(s)H_g(s)$ frekvencijski ograničen i da vrijedi

$$\left|H_a(j\Omega)\cdot H_g(j\Omega)\right| \approx \left|H_a(j\Omega)\right| \quad \text{za} \quad \Omega<\pi/T$$

$$\left|H_a(j\Omega)\cdot H_g(j\Omega)\right| \approx 0 \quad \text{za} \quad \Omega\geq\pi/T$$

Projektiranje digitalnog filtra metodom jednakog impulsnog odziva

Ako je prijenosna funkcija prototipnog analognog filtra racionalna funkcija

$$H_a(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$H_a(s)$ se može napisati u obliku sume parcijalnih razlomaka

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{s+s_i}$$

Impulsni odziv filtra se dobije inverznom Laplace-ovom transformacijom

$$h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{-s_i t}$$

Projektiranje ...

Impulsni odziv digitalnog filtra dobijemo otipkavanjem impulsnog odziva analognog filtra svakih T:

$$g(n)=\sum_{i=1}^{N}K_i e^{-s_i nT}=\sum_{i=1}^{N}K_i\left(e^{-s_i T}\right)^n$$

z transformacija impulsnog odziva je

$$G(z)=\mathcal{Z}\left(g(n)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}K_i\left(e^{-s_i T}\right)^n\right]\cdot z^{-n}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i z}{z-e^{-s_i T}}$$

Dobili smo racionalnu funkciju po z, i to je prijenosna funkcija digitalnog filtra.

Projektiranje ...

Gornje jednadžbe vrijede ako prijenosna funkcija analognog filtra ima jednostruke polove. U slučaju dvostrukih polova, tj. ako se pri rastavu prijenosne funkcije analognog filtra na parcijalne razlomke pojavi član oblika $\dfrac{K_i}{\left(s+s_i\right)^2}$

odgovarajući član u prijenosnoj funkciji digitalnog filtra ima oblik $\dfrac{K_i\cdot T\cdot e^{-s_i T}\cdot z}{\left(z-e^{-s_i T}\right)^2}$

Projektiranje ...

U slučaju pola (n+1)-og reda, tj. parcijalnog razlomka oblika

$$\frac{K_i}{\left(s+s_i\right)^{n+1}}$$

odgovarajući član prijenosne funkcije digitalnog filtra je

$$K_i\cdot\frac{T^n\cdot(-z)^n}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{z-e^{-s_i T}}\right)$$

Projektiranje ...

Za slučaj analognog filtra s kompleksnim parom polova $s_{i_{1,2}}=-\beta\pm j\lambda$ vrijedi:

- ako je analogna prijenosna funkcija

$$H_a(s)=\frac{\lambda}{\left(s+\beta\right)^2+\lambda^2}$$

digitalna prijenosna funkcija dobivena metodom jednakog impulsnog odziva je

$$G(z)=\frac{z\cdot e^{-\beta T}\cdot\sin\lambda T}{z^2-2\cdot z\cdot e^{-\beta T}\cdot\cos\lambda T+e^{-2\beta T}}$$

Projektiranje ...

- ako je analogna prijenosna funkcija

$$H_a(s)=\frac{s+\beta}{\left(s+\beta\right)^2+\lambda^2}$$

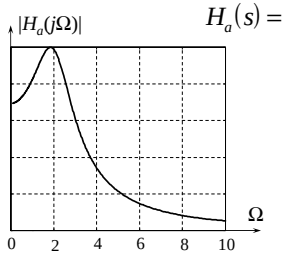
odgovarajuća digitalna prijenosna funkcija je

$$G(z)=\frac{z^2-z\cdot e^{-\beta T}\cdot\cos\lambda T}{z^2-2\cdot z\cdot e^{-\beta T}\cdot\cos\lambda T+e^{-2\beta T}}$$

Primjer - projektiranje

Neka je prijenosna funkcija analognog filtra dana s

$$H_a(s)=\frac{16\cdot(s+2)}{(s+3)\cdot\left(s^2+2s+5\right)}$$



Amplitudno-frekvencijska karakteristika analognog filtra $|H_a(j\Omega)|$

Primjer - projektiranje ...

Rastavom na parcijalne razlomke dobijemo

$$H_a(s)=-\frac{2}{s+3}+\frac{2s+14}{s^2+2s+5}=-\frac{2}{s+3}+\frac{2s+14}{(s+1)^2+2^2}$$

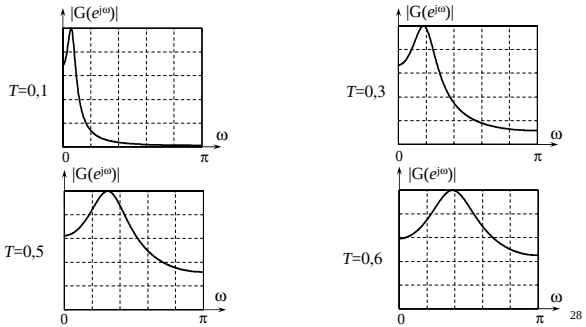
$$H_a(s)=-\frac{2}{s+3}+2\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+6\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Koristeći dane formule dobijemo prijenosnu funkciju digitalnog filtra

$$G(z)=\frac{-2z}{z-e^{-3T}}+\frac{2z^2+z\cdot e^{-T}\cdot(6\cdot\sin 2T-2\cdot\cos 2T)}{z^2-2\cdot z\cdot e^{-T}\cdot\cos 2T+e^{-2T}}$$

Primjer - projektiranje ...

Amplitudno-frekvencijske karakteristike digitalnog filtra $|G(e^{j\omega})|$ za različite frekvencije otipkavanja, odnosno različite T:



Projektiranje - sažetak

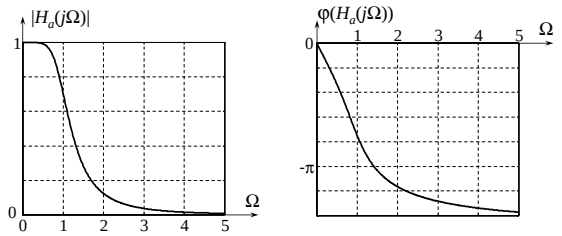
- Ako je specifikacija filtra dana u digitalnoj domeni, specifikacija prototipnog analognog filtra se dobije frekvencijskom transformacijom $\Omega=\omega/T$.
- Projektirati prototipni analogni filtar $H_a(s)$.
- Rastaviti prijenosnu funkciju analognog filtra na parcijalne razlomke. Tako dobivamo koeficijente K_i i s_i.
- Izračunati prijenosnu funkciju digitalnog filtra $G(z)$.

Svojstva filtra projektiranog metodom jednakog impulsnog odziva

- Broj polova digitalnog filtra jednak je broju polova analognog filtra.
- Digitalni filtar je stabilan ako je prototipni analogni filtar bio stabilan.
- Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra je periodizirana frekvencijska karakteristika analognog filtra.
- Kaskada dva digitalna filtra projektirana metodom jednakog impulsnog odziva nema impulsni odziv jednak impulsnom odzivu kaskade dva analogna prototipa. Drugim riječima, filtar mora biti projektiran u jednom koraku.

Primjer 1

Butterworth, niski propust, 3. red $\quad H_a(s)=\dfrac{1}{(s+1)\cdot(s^2+s+1)}$



Primjer 1 - nastavak

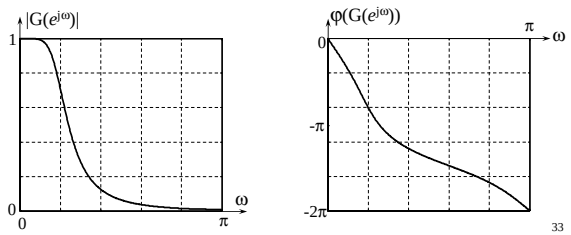
Prijenosna funkcija digitalnog filtra projektiranog metodom jednakog impulsnog odziva je

$$G(z)=\frac{z^{-1}\cdot\left[e^{-T}+e^{-T/2}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right)\right]+z^{-2}\cdot e^{-T}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right]}{1-z^{-1}\cdot\left[2e^{-T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+e^{-T}\right]+z^{-2}\cdot\left[e^{-T}+2\cdot e^{-3T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right]-z^{-3}\cdot e^{-2T}}$$

Primjer 1 - nastavak

Za $T=\pi/5=0{,}628$ prijenosna funkcija digitalnog filtra je

$$G(z)=\frac{0{,}1271\cdot z^{-1}+0{,}2367\cdot z^{-2}}{1-1{,}7833\cdot z^{-1}+1{,}2003\cdot z^{-2}-0{,}2846\cdot z^{-3}}$$



Primjer 2

Što bi se dogodilo da smo u prethodnom primjeru filtar projektirali kao kaskadu dva digitalna filtra projektirana metodom jednakog impulsnog odziva

uz prototipne analogne filtre $\quad H_{a1}(s)=\dfrac{1}{s+1}$ i $H_{a2}(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$?

$$G_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}\cdot e^{-T}}$$

$$G_2(z)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{z^{-1}\cdot e^{-T/2}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)}{1-z^{-1}\cdot 2\cdot e^{-T/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+e^{-T}}$$

Primjer 2 - nastavak

Kaskada ova dva digitalna filtra ima prijenosnu funkciju

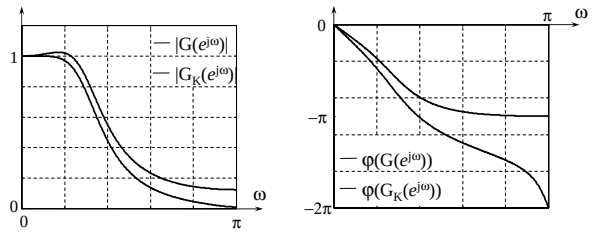
$$G_K(z)=G_1(z)\cdot G_2(z)=\frac{z^{-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot e^{-T/2}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)}{1-z^{-1}\cdot\left[2e^{-T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+e^{-T}\right]+z^{-2}\cdot\left[e^{-T}+2\cdot e^{-3T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right]-z^{-3}\cdot e^{-2T}}$$

$$\neq$$

Prijenosna funkcija filtra u prethodnom primjeru bila je

$$G(z)=\frac{z^{-1}\cdot\left[e^{-T}+e^{-T/2}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right)\right]+z^{-2}\cdot e^{-T}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right]}{1-z^{-1}\cdot\left[2e^{-T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)+e^{-T}\right]+z^{-2}\cdot\left[e^{-T}+2\cdot e^{-3T/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right]-z^{-3}\cdot e^{-2T}}$$

Primjer 2 - nastavak



Amplitudna i fazna karakteristika filtara $G_K(z)$ i $G(z)$ uz $T=1$

Projektiranje rekurzivnog digitalnog filtra bilinearnom transformacijom

Digitalna obradba signala

Sadržaj

- Bilinearna transformacija
- Svojstva bilinearne transformacije
- Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

Bilinearna transformacija

- Transformira vremenski kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom $H_c(s)$ u vremenski diskretni sustav, H(z)
- Kako riješiti problem aliasinga koji postoji kod transformacije jednakih impulsnih odziva ?

  $\Rightarrow$ ... transformacija mora preslikati svaku točku iz s-ravnine u jedinstvenu točku u z-ravnini i obratno
- Bilinearnom transformacijom se cijela $j\Omega$ os u s-ravnini ($-\infty < \Omega < +\infty$) prevodi u jedan obilazak jedinične kružnice u z-ravnini ($-\pi < \omega < \pi$)

Bilinearna transformacija

- ... definirana algebarskom trasformacijom između varijabli s i z

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

- Ako je vremenski kontinuiran sustav zadan prijenosnom funkcijom $H_c(s)$, tada se supstitucijom varijable s sa gore navedenim izrazom dobiva H(z) vremenski diskretnog sustava :

$$H(z) = H_c\left[\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]$$

Bilinearna transformacija

- Izraz za bilinearnu transformaciju dobiven je iz trapezne formule za numeričku integraciju.
- ... pretpostavimo vrem. kont. sustav prvog reda

$$H_c(s) = \frac{b}{s+a}\ , \quad \text{odnosno} \quad y'(t) + ay(t) = bu(t)$$

- korištenjem trapezne formule integral y(t)

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

se može u točkama t=nT i t_0=(n-1)T aproksimirati sa:

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'((n-1)T)\right] + y((n-1)T)$$

Bilinearna transformacija

- evaluacijom diferencijalne jednadžbe za t=nT slijedi:

$$y'(nT) = -ay(nT) + bu(nT)$$

- što uvrštenjem u izraz za trapeznu aproksimaciju integrala daje jednadžbu diferencija:

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y[n] - \left(1-\frac{aT}{2}\right)y[n-1] = \frac{bT}{2}\left(u[n]+u[n-1]\right)$$

- z transformacijom gornje jednadžbe dobiva se:

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}\left(1+z^{-1}\right)U(z)$$

Bilinearna transformacija

- slijedi prijenosna funkcija vrem. diskr. sustava H(z):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(bT/2)\left(1+z^{-1}\right)}{1+aT/2-(1-aT/2)z^{-1}}$$

- ... odnosno

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

- Usporedbom s početnom

$$H_c(s) = \frac{b}{s+a}$$

$\Rightarrow$ slijedi :

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Bilinearna transformacija

- Postupak projektiranja digitalnog filtra H(z):
  1. Definiranje zahtjeva na digitalni filter (specifikacija)
  2. Inverznom bilinearnom transformacijom dobivaju se zahtjevi na pripadni analogni filter
  3. Projektiranje analognog filtra $H_c(s)$ koji zadovoljava tražene specifikacije
  4. Bilinearnom transformacijom od $H_c(s)$ dobiva se traženi H(z)

Projektiranje rekurzivnog digitalnog filtra bilinearnom transformacijom

Svojstva bilinearne transformacije

Svojstva bilinearne transformacije

- neka su kompleksne varijable s i z zadane kao:

$$z = re^{j\omega}, \qquad s = \sigma + j\Omega$$

- ... transformacijom

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+2r\cdot\cos\omega+r^2} + j\frac{2r\cdot\sin\omega}{1+2r\cdot\cos\omega+r^2}\right)$$

$\Rightarrow$ slijedi :

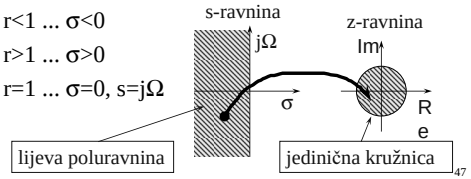
$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+2r\cdot\cos\omega+r^2}\right), \quad \Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{2r\cdot\sin\omega}{1+2r\cdot\cos\omega+r^2}\right)$$

Svojstva bilinearne transformacije

- promotrimo realni dio varijable s:

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+2r\cdot\cos\omega+r^2}\right)$$

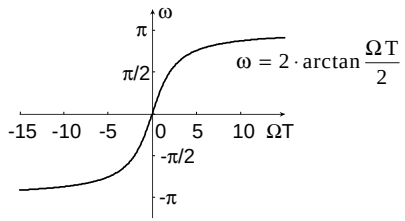
- ... pošto je nazivnik uvijek veći ili jednak od nule, predznak od σ ovisi isključivo o r i to :
  - za r<1 ... σ<0
  - za r>1 ... σ>0
  - za r=1 ... σ=0, s=jΩ

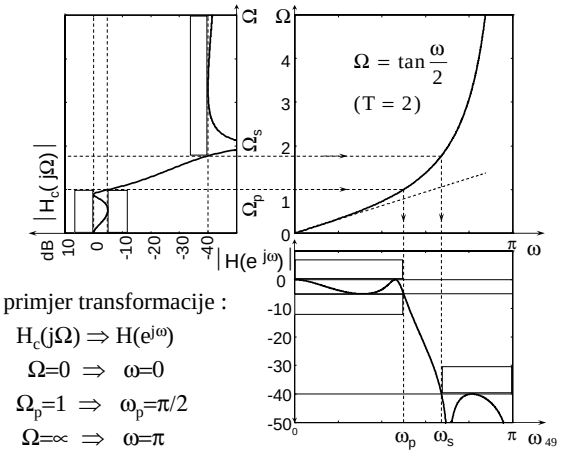


Svojstva bilinearne transformacije

- slučaj za r=1 (z na jediničnoj kružnici) :

$$\sigma = 0, \quad \Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega}\right) = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$





- primjer transformacije :

$H_c(j\Omega) \Rightarrow H(e^{j\omega})$

$\Omega=0 \;\Rightarrow\; \omega=0$

$\Omega_p=1 \;\Rightarrow\; \omega_p=\pi/2$

$\Omega=\infty \;\Rightarrow\; \omega=\pi$

Projektiranje rekurzivnog digitalnog filtra bilinearnom transformacijom

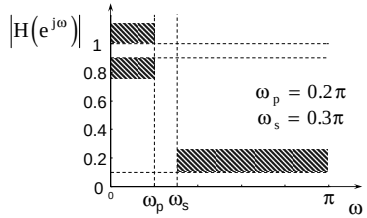
Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Specifikacija niskopropusnog digitalnog filtra

$$0.9 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1 \;,\; \text{za } 0 \le \omega \le 0.2\pi$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0.1 \;,\; \text{za } 0.3\pi \le \omega \le \pi$$



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Inverznom bilinearnom transformacijom specifikacije digitalnog filtra dobivaju se zahtjevi na pripadni analogni filter (engl. *frequency prewarping*)

$$\omega_p = 0.2\pi \;\Rightarrow\; \Omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = \frac{0.65}{T}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \;\Rightarrow\; \Omega_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2} = \frac{1.02}{T}$$

- ... parametar T će se u postupku bilinearne transformacije funkcije $H_c(s)$ u H(z) pokratiti, pa ga je moguće proizvoljno odabrati, npr T=1

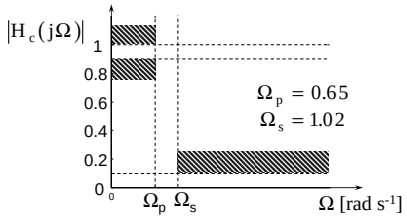
$$\Omega_p = 0.65\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \Omega_s = 1.02\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Specifikacija pripadnog niskopropusnog analognog filtra :

$$0.9 \le \left|H_c(j\Omega)\right| \le 1 \;,\; \text{za } 0 \le \Omega \le 0.65$$

$$\left|H_c(j\Omega)\right| \le 0.1 \;,\; \text{za } 1.02 \le \Omega < \infty$$



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Odaberemo npr. Butterworthovu aproksimaciju kod projektiranja analognog NP filtra
- Kvadrat amplitudno-frekvencijske karakteristike takvog filtra dan je izrazom :

$$\left|H_c(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- $\left|H_c(j\Omega)\right|^2$ je monotono padajuća funkcija od Ω tako da se na osnovu specifikacije na $H_c(j\Omega)$ dobivaju dvije nejednadžbe :

$$\left|H_c(0.65j)\right|^2 \ge 0.81$$

$$\left|H_c(1.02j)\right|^2 \le 0.01$$

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- ... nađimo Ω_c i N za slučaj jednakosti :

$$1+\left(\frac{0.65}{\Omega_c}\right)^{2N}=\frac{1}{0.81}\ ,\qquad 1+\left(\frac{1.02}{\Omega_c}\right)^{2N}=\frac{1}{0.01}$$

- Eliminacijom Ω_c dobivamo izraz za N :

$$N=\frac{\log\left(\frac{1}{0.81}-1\right)-\log\left(\frac{1}{0.01}-1\right)}{2(\log 0.65-\log 1.02)}=6.07138$$

- N je red filtra i mora biti cijeli broj pa odabiremo prvi veći cijeli broj ... N=7

$$\Omega_c=0.65\left(\frac{1}{0.81}-1\right)^{-\frac{1}{2N}}=0.721$$

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Na osnovu kvadrata amplitudno-frekvencijske karakteristike sada treba odrediti H(s) filtra

$$|H_c(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}=H_c(j\Omega)\cdot H_c(-j\Omega)$$

- Supstitucijom Ω=s/j slijedi:

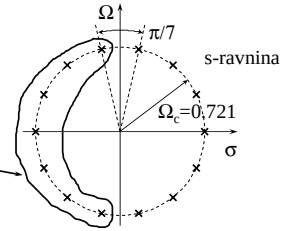
$$H_c(s)\cdot H_c(-s)=\frac{1}{1+\left(-\frac{s^2}{\Omega_c^{\,2}}\right)^N}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{2N}(s-s_k)}$$

- Korijeni nazivnika dobivaju se rješavanjem:

$$(-1)^N s^{2N}=-\Omega_c^{\,2N}$$

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Polovi funkcije $H_c(s)\cdot H_c(-s)$ u s ravnini ... jednoliko raspoređeni po kružnici polumjera Ω_c
- Polovi u lijevoj poluravnini pripadaju prijenosnoj funkciji filtra $H_c(s)$.



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Uparivanjem konjugirano-kompleksnih parova dobiva se $H_c(s)$ oblika:

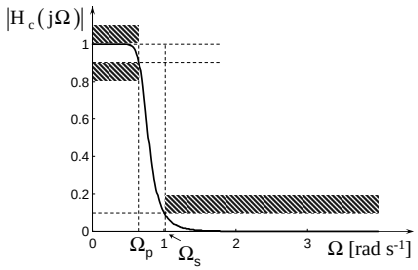
$$H_c(s)=(0.721)^7\frac{1}{s+0.721}\cdot\frac{1}{s^2+0.3209s+0.5198}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{s^2+0.8991s+0.5198}\cdot\frac{1}{s^2+1.2992s+0.5198}$$

- Provjera za rubove prijelaznog područja $s=j\Omega_p$ i $s=j\Omega_s$

$$|H_c(0.65j)|=0.9$$
$$|H_c(1.02j)|=0.0878\le 0.1$$

Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Ampl.-frekv. karakteristika projektiranog vremenski kontinuiranog Butterworthovog filtra $H_c(s)$



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Bilinearna transformacija funkcije $H_c(s)$ u H(z) zamjenom s sa $2(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$

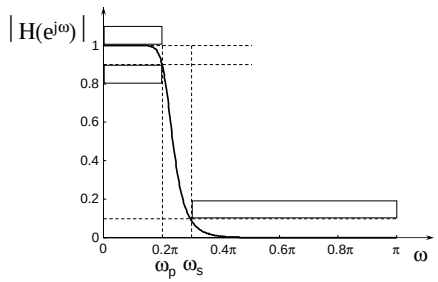
$$H(z)=(0.721)^7\frac{0.3675(1+z^{-1})}{1-0.47z^{-1}}\cdot\frac{0.1937(1+z^{-1})^2}{1-1.3485z^{-1}+0.7513z^{-2}}\cdot$$
$$\cdot\frac{0.1583(1+z^{-1})^2}{1-1.1017z^{-1}+0.4308z^{-2}}\cdot\frac{0.1405(1+z^{-1})^2}{1-0.9778z^{-1}+0.2699z^{-2}}$$

- Provjera za rubove prijelaz. područja $z=e^{j\omega_p}$ i $z=e^{j\omega_s}$

$$\left|H(e^{0.2\pi j})\right|=0.9$$
$$\left|H(e^{0.3\pi j})\right|=0.0884\le 0.1$$

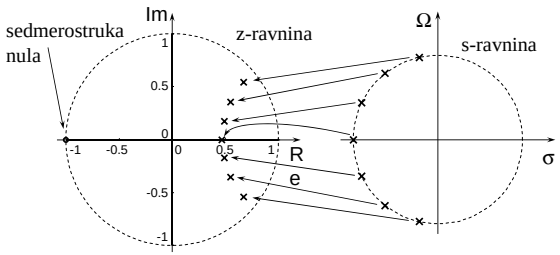
Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Ampl.-frekv. karakteristika vremenski diskretnog Butterworthovog filtra H(z)



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Položaj polova i nula vremenski diskretnog Butterworthovog filtra H(z)



Primjer projektiranja digitalnog IIR filtra

- Grupno vrijeme kašnjenja filtra $H_c(s)$ i H(z)