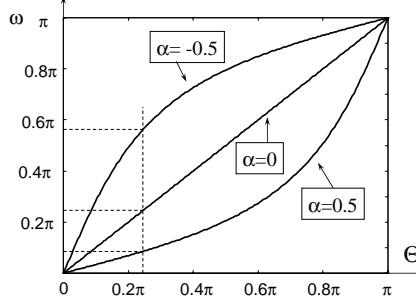


<p><i>Frekvenčijske transformacije u z-domeni</i></p> <p>Digitalna obradba signala</p>	<p><i>Sadržaj</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Frekvenčijske transformacije • Primjer transformacije NP→VP 	<p><i>Frekvenčijske transformacije</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Da li je moguće određenim matematičkim postupcima digitalni niskopropusni (NP) rekurzivni filter, transformirati u preostale tipove filtra : <ul style="list-style-type: none"> • visokopropusni (VP), • pojasnopropusni (PP), • pojasnou branu (PB), • ili NP druge granične frekvencije ? • Korištena transformacija je po tipu vrlo slična bilinearnoj transformaciji.
<p><i>Frekvenčijske transformacije</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Neka je $H_{LP}(Z)$ polazni NP filter koji želimo transformirati u novi filter $H(z)$ koji će imati jednu od željenih karakteristika (NP, VP, PP ili PB). • Z je kompleksna varijabla vezana uz prototip NP filter, dok je z vezan uz transformirani filter. • Definiramo preslikavanje iz Z-ravnine u z-ravninu : $Z^{-1} = G(z^{-1})$ • ... takvo da vrijedi : $H(z) = H_{LP}(Z) _{Z^{-1}=G(z^{-1})}$ • $H(z)$ se dobiva tako da se u izrazu za $H_{LP}(Z)$ svugdje Z^{-1} zamjeni funkcijom $G(z^{-1})$. 	<p><i>Frekvenčijske transformacije</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Zahtjevi na transformaciju $G(z^{-1})$: <ul style="list-style-type: none"> • transformacijom $H_{LP}(Z)$ koji ima racionalnu prijenosnu funkciju, koji je kauzalan i stabilan, želimo dobiti $H(z)$ koji ima ista svojstva. • Da bi to bilo zadovoljeno $G(z^{-1})$ mora biti: <ul style="list-style-type: none"> • racionalna funkcija od z^{-1}, • unutrašnjost jedinične kružnice u Z-ravnini mora preslikati u unutrašnjost jedinične kružnice u z-ravnini, • jedinična kružnica iz Z-ravnine mora se preslikati točno na jediničnu kružnicu u z-ravnini. 	<p><i>Frekvenčijske transformacije</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Za varijable Z i z na jediničnim kružnicama u pripadnim ravninama, na frekvencijama Θ i ω vrijedi: $Z = e^{j\Theta}, \quad z = e^{j\omega}$ • Transformacijom $G(z^{-1})$ slijedi : $e^{-j\Theta} = G(e^{-j\omega}) e^{j\arg G(e^{-j\omega})}$ • Očito je da : $G(e^{-j\omega}) = 1$... pa je odnos između frekvencija Θ i ω dan izrazom: $-\Theta = \arg G(e^{-j\omega})$
<p><i>Frekvenčijske transformacije</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Pokazuje se da funkcije $G(z^{-1})$ koje zadovoljavaju sve tražene zahtjeve imaju općenit oblik: $Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}$ <p>... uz uvjet da $\alpha_k < 1$.</p> • Funkcija $G(z^{-1})$ odgovara prijenosnoj funkciji svepropusnog filtra. 	<p><i>Frekvenčijska transformacija NP→NP</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Najjednostavnija je transformacija NP filtra ponovo u NP filter ali druge granične frekvencije. • $G(z^{-1})$ za ovu transformaciju glasi: $Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$ • Supstitucijom $Z = e^{j\Theta}$, $z = e^{j\omega}$ u gornji izraz : $e^{-j\Theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$ <p>... odnosno :</p> $\omega = \arctan \left[\frac{(1 - \alpha^2) \sin \Theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \Theta} \right]$ 	<p><i>Frekvenčijska transformacija NP→NP</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • ili $\tan \left(\frac{\Theta}{2} \right) = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$

Frekvencijska transformacija NP \rightarrow NP

- Odnos između frekvencija Θ i ω :



10

Frekvencijska transformacija NP \rightarrow PP

- Za PP filter željenih graničnih frekvencija ω_{p1} i ω_{p2} :

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1}$$

- gdje su α i k :

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)} \quad \omega_{p1} < \omega_{p2}$$

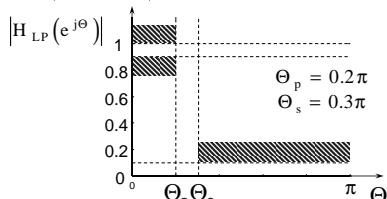
$$k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right)$$

13

Primjer transformacije NP \rightarrow VP

- Krenimo od NP filtra Chebyshev-ljeve aproksimacije tip I sa slijedećim specifikacijama:

$$0.89125 \leq |H_{LP}(e^{j\Theta})| \leq 1, \text{ za } 0 \leq \Theta \leq 0.2\pi \\ |H_{LP}(e^{j\Theta})| \leq 0.17783, \text{ za } 0.3\pi \leq \Theta \leq \pi$$



16

Frekvencijska transformacija NP \rightarrow NP

- Za zadane granične frekvencije Θ_p i ω_p parametar α se nalazi prema slijedećem izrazu :

$$\alpha = \frac{\tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right) - \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right) + \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_p + \omega_p}{2}\right)}$$

- NP filter $H(z)$ s graničnom frekvencijom ω_p nalazi se na osnovu NP filtra $H_{LP}(Z)$, granične frekvencije Θ_p , tako da se svaki Z^{-1} u izrazu za $H_{LP}(Z)$ zamjeni sa $(z^{-1}-\alpha)/(1-\alpha z^{-1})$, gdje je parametar α nađen prema gornjoj formuli.

11

Frekvencijska transformacija NP \rightarrow VP

- Za VP filter željene granične frekvencije ω_p :

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$$

- gdje je α :

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_p - \omega_p}{2}\right)}$$

12

Frekvencijska transformacija NP \rightarrow PB

- Za filter tipa PB željenih gran. frekvencija ω_{p1} i ω_{p2} :

$$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k} z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k} z^{-1} + 1}$$

- gdje su α i k :

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)} \quad \omega_{p1} < \omega_{p2}$$

$$k = \tan\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right)$$

14

Frekvencijske transformacije u z-domeni

Primjer transformacije NP \rightarrow VP

15

Primjer transformacije NP \rightarrow VP

- Specifikacija je zadovoljena filtrom četvrtog reda s prijenosnom funkcijom $H_{LP}(Z)$ definiranom kao:

$$H_{LP}(Z) = 0.001836 \cdot \frac{(1+Z^{-1})^2}{1 - 1.5548Z^{-1} + 0.6493Z^{-2}} \cdot \frac{(1+Z^{-1})^2}{1 - 1.4996Z^{-1} + 0.8482Z^{-2}}$$

- Transformirajmo ovaj filter u VP filter granične frekvencije $\omega_p=0.6\pi$.

$$\alpha = -\frac{\cos[(0.2\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.6\pi)/2]} = -0.38197$$

17

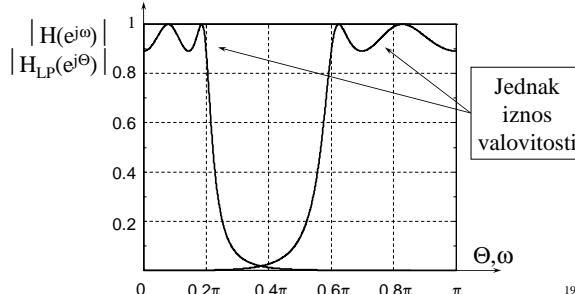
- iz čega slijedi :

$$H(z) = 0.02426 \cdot \frac{(1-z^{-1})^2}{1 + 1.0416z^{-1} + 0.4019z^{-2}} \cdot \frac{(1-z^{-1})^2}{1 + 0.5561z^{-1} + 0.7647z^{-2}}$$

18

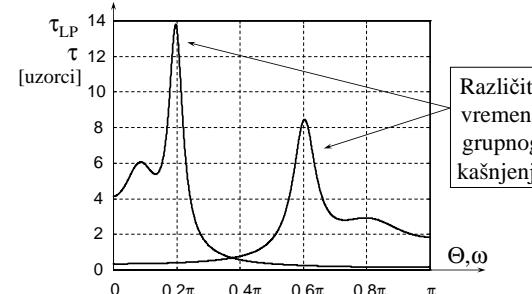
Primjer transformacije NP \rightarrow VP

- Ampl.-frekv. karakteristika $|H_{LP}(e^{j\Theta})|$ i $|H(e^{j\omega})|$



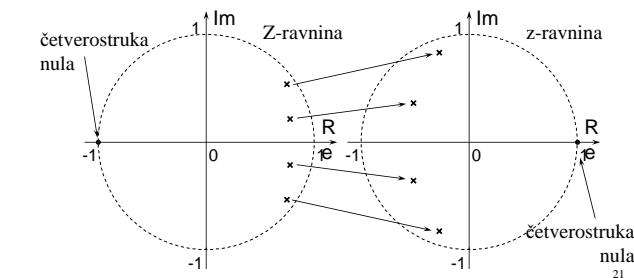
Primjer transformacije NP \rightarrow VP

- Grupno vrijeme kašnjenja od $H_{LP}(e^{j\Theta})$ i $H(e^{j\omega})$



Primjer transformacije NP \rightarrow VP

- Položaj polova i nula filtara $H_{LP}(Z)$ i $H(z)$:



Frekvencijske transformacije

- Postupak stvarne primjene frekvencijskih transformacija :
 - definicija zahtjeva na karakteristiku $H(z)$ konačnog (transformiranog) filtra tipa NP, VP, PP ili PB,
 - na osnovu tog zahtjeva određuju se zahtjevi koje mora zadovoljiti prototip NP filter $H_{LP}(Z)$ čijom će se transformacijom dobiti željeni $H(z)$, (u ovom koraku se mora provesti "frequency prewarping" zbog nelinearne transformacije frekvencije)
 - projektiranje prototipa filtra $H_{LP}(Z)$,
 - transformacija prototipa filtra u konačni filter $H(z)$.

22