Obradba signala u blokovima i obradba uzorak po uzorak

Digitalna obradba signala

Sadržaj

- Obradba po blokovima
  - Direktni oblik, konvolucijska tablica, matrični oblik
  - Zrcali i pomakni oblik
  - Blokovi beskonačne duljine
  - Preklopi i zbroji metoda
- Obradba uzorak po uzorak

Obradba po blokovima

- prikupljanje uzoraka u blokove

- FIR filtracija signala konačnog trajanja
- brza konvolucija dugačkih signala razloženih u kraće blokove
- DFT/FFT
- analiza i sinteza govora
- obradba slike

Obradba uzorak po uzorak

- DSP algoritam za svaki uzorak signala

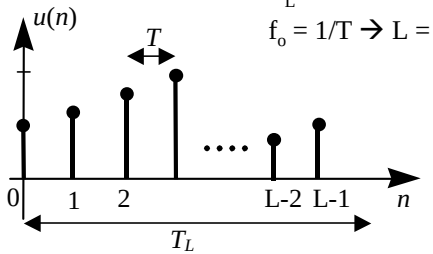
- filtracija dugačkih signala u stvarnom vremenu
- audio efekti
- sustavi regulacije
- adaptivna obradba signala

Obradba po blokovima

- Definicija bloka

$T_L = LT$

$f_o = 1/T \rightarrow L = T_L f_o$



Konvolucijska sumacija

- diskretni sustav moguće je opisati pomoću konvolucijske sumacije

- vrijedi samo za linearne vremenski nepromjenjive (LTI) sustave

Izvod konvolucijske sumacije

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\delta(n-m)$$

$$y(n) = \mathrm{H}[u(n)] = \mathrm{H}\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\delta(n-m)\right]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\mathrm{H}[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)h(n-m)$$

Ekvivalentni oblici zapisa konvolucijske sumacije

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)h(n-m)$$

zamjena $l = n - m$:

$$y(n) = \sum_{l=+\infty}^{-\infty} u(n-l)h(l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} u(n-l)h(l)$$

za $l = m$ slijedi: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(n-m)h(m)$

Ekvivalentni oblici zapisa konvolucijske sumacije (2)

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m h_{n-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m u_{n-m}$$

$$y_n = \sum_{m} u_m h_{n-m} = \sum_{m} h_m u_{n-m}$$

- suma indeksa $m + n - m = n$
- zamjena: $i = m$, $j = n - m$

$$y(n) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} u_i h_j$$

Direktni oblik konvolucije

- Kauzalni FIR filtar M-tog reda:
  $\mathbf{h} = [h_0, h_1, ..., h_M]$, $L_h = M + 1$

- Koje je područje vrijednosti od n i m?

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)u(n-m)$$

- Iz definicije h(n) i u(n) slijedi:

$$0 \le m \le M$$
$$0 \le n - m \le L - 1$$

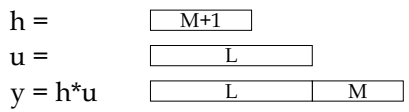
Direktni oblik konvolucije

$$0 \le m \le M \qquad (*)$$
$$0 \le n - m \le L - 1 \qquad (**)$$
$$m \le n \le L - 1 + m \qquad (** + m)$$
$$0 \le m \le n \le L - 1 + m \le L - 1 + M \qquad (*),(**)$$
$$0 \le n \le L + M - 1 \qquad (*),(**)$$

- iz toga slijedi: $L_y = L + M$

Direktni oblik konvolucije

- Blok izlaznog signala: $\mathbf{y} = [y_0, y_1, ..., y_{L-1+M}]$
- odziv je duži od ulaza za M uzoraka:



Direktni oblik konvolucije:
Koje je područje vrijednosti m za svaki n?

- Iz definicije h(n) i u(n):

$$0 \le m \le M \qquad (*)$$
$$0 \le n - m \le L - 1 \qquad (**)$$

- dobivamo: $-(L-1) \le m - n \le 0 \qquad (** \cdot (-1))$
- pribrojimo n: $n - L + 1 \le m \le n$
- Dakle, m mora zadovoljiti dvije nejednadžbe: $n - L + 1 \le m \le n$, $0 \le m \le M \qquad (*)$

Direktni oblik konvolucije:
Koje je područje vrijednosti m za svaki n?

$$n - L + 1 \le m \le n$$
$$0 \le m \le M \qquad (*)$$

- Iz ove dvije nejednadžbe slijedi:

$$\max(0, n - L + 1) \le m \le \min(n, M)$$

$$y(n) = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{\min(n,M)} h(m)u(n-m)$$

za $n = 0, 1, ..., L + M - 1$

Direktni oblik konvolucije (primjer)

- FIR filtra reda 3
- ulazni signal od 5 uzoraka
- izlazni blok je duljine 5+3 (indeksi od 0 do 7)
- $\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2, h_3]$
- $\mathbf{u} = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4]$
- $\mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7]$

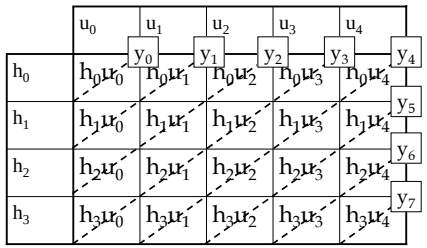
$$y(n) = \sum_{m=\max(0,n-4)}^{\min(n,3)} h(m)u(n-m) \qquad n = 0, 1, 2, ..., 7$$

Direktni oblik konvolucije (primjer)

$$\begin{aligned}
y_0 &= h_0u_0 \\
y_1 &= h_0u_1 + h_1u_0 \\
y_2 &= h_0u_2 + h_1u_1 + h_2u_0 \\
y_3 &= h_0u_3 + h_1u_2 + h_2u_1 + h_3u_0 \\
y_4 &= h_0u_4 + h_1u_3 + h_2u_2 + h_3u_1 \\
y_5 &= h_1u_4 + h_2u_3 + h_3u_2 \\
y_6 &= h_2u_4 + h_3u_3 \\
y_7 &= h_3u_4
\end{aligned}$$

Konvolucijska tablica

- Svaki uzorak y_n je suma svih mogućih produkata h_i i u_j za koje vrijedi i + j = n



Matrični oblik

- $\mathbf{y} = \mathbf{Hu}$ gdje je matrica H sastavljena iz koeficijenata inpulsnog odziva filtra
- ulazni vektor je duljine L
- izlazni vektor je duljine L+M
- **H** je pravokutna matrica dimenzija (L+M)xL
- stupce od **H** tvore zakašnjele replike bloka impulsnog odziva **h**
- **H** je Toeplitzova matrica

Matrični oblik

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$$

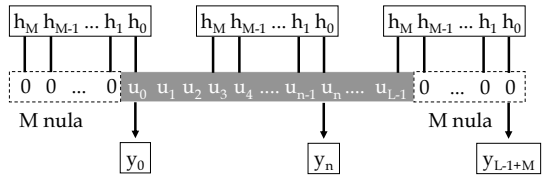
Alternativni matrični oblik

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_1 & u_0 & 0 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \\ 0 & u_4 & u_3 & u_2 \\ 0 & 0 & u_4 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{h}$$

- dimenzija od U je (L+M)x(M+1)

Zrcali i pomakni oblik (Flip-and-Slide Form)

- Vrlo česta i očigledna interpretacija konvolucije
- Impuslni odziv filtra se zrcali
- pa se posmiče preko ulaznog niza



Zrcali i pomakni oblik

- prvih M uzoraka izlaznog bloka naziva se prijelazni odziv (input-on transient) ili utitravanje filtra
- stacionarno stanje (steady state) filtra je za $M \le n \le L - 1$

  $y_n = h_0 u_n + h_1 u_{n-1} + ... + h_M u_{n-M}$
- zadnjih M uzoraka za $L \le n \le L - 1 + M$ naziva se istitravanje filtra (input-off transient)

Stacionarni odziv i utitravanje/istitravanje FIR filtra

- za filtar M-tog reda i ulazni blok duljine L moguće su ove vrijednosti indeksa odziva $0 \le n \le L - 1 + M$
- tri različite granice konvolucijske sumacije za tri dijela izlaznog bloka*:
  - utitravanje filtra $0 \le n < M$
  - stacionarno stanje $M \le n \le L - 1$
  - istitravanje filtra $L - 1 < n \le L - 1 + M$

*uz pretpostavku da je duljina filtra mnogo kraća od duljine ulaznog bloka: M +1 < L, tj. M < L – 1

Stacionarni odziv i utitravanje/istitravanje FIR filtra - granice konvolucijske sumacije

- donja granica sumacije je max (0, n – L + 1), a gornja granica je min (n, M)
- utitravanje filtra $0 \le n < M < L - 1$

  max (0, n – L + 1) = 0, min (n, M) = n
- stacionarno stanje $M \le n \le L - 1$

  max (0, n – L + 1) = 0, min (n, M) = M
- istitravanje filtra $M < L - 1 < n \le L - 1 + M$

  max (0, n – L + 1) = n – L + 1, min (n, M) = M

*uz pretpostavku da je duljina filtra mnogo kraća od duljine ulaznog bloka: M +1 < L, tj. M < L – 1

Stacionarni odziv i utitravanje/istitravanje FIR filtra - granice konvolucijske sumacije

$$y_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n} h_m u_{n-m} & \text{za } 0 \le n < M & \text{utitravanje} \\ \sum_{m=0}^{M} h_m u_{n-m} & \text{za } M \le n \le L - 1 & \text{stac. stanje} \\ \sum_{m=n-L+1}^{M} h_m u_{n-m} & \text{za } L - 1 < n \le L - 1 + M & \text{istitravanje} \end{cases}$$

*uz pretpostavku da je duljina filtra mnogo kraća od duljine ulaznog bloka: M +1 < L, tj. M < L – 1

Konvolucija blokova signala beskonačne duljine

- filtar beskonačne duljine, konačan ulazni signal

  $M = \infty$, $L < \infty$
- filtar konačne duljine, beskonačan ulazni signal

  $M < \infty$, $L = \infty$
- filtar beskonačne duljine, beskonačan ulazni signal

  $M = \infty$, $L = \infty$
- u sva tri slučaja $0 \le n < \infty$

Konvolucija blokova signala beskonačne duljine – granice konvolucijske sumacije

$$y_n = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{\min(n,M)} h_m u_{n-m}$$

- kada $L \rightarrow \infty$ max (0, n – L + 1) = 0
- kada $M \rightarrow \infty$ min (n, M) = n

Konvolucija blokova signala beskonačne duljine – granice konvolucijske sumacije

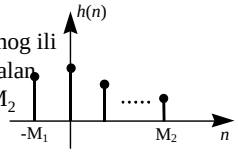
$$y_n = \sum_{m=\max(0,n-L+1)}^{n} h_m u_{n-m} \quad \text{za } M = \infty,\ L < \infty$$

$$y_n = \sum_{m=0}^{\min(n,M)} h_m u_{n-m} \quad \text{za } M < \infty,\ L = \infty$$

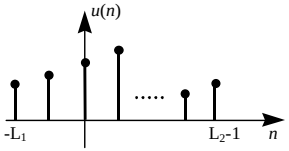
$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_m u_{n-m} \quad \text{za } M = \infty,\ L = \infty$$

Opći slučaj

- impulsni odziv filtra konačnog ili beskonačnog trajanja, kauzalan ili nekauzalan: $-M_1 \le n \le M_2$



- blok ulaznog signala konačnog ili beskonačnog trajanja: $-L_1 \le n \le L_2-1$



Opći slučaj – granice konvolucijske sumacije

$$y(n) = \sum_{m} h(m)u(n-m)$$

$-M_1 \le m \le M_2$ (*)

$-L_1 \le n - m \le L_2 - 1$ (**)

$n - L_2 + 1 \le m \le n + L_1$ (**)

$\Downarrow$ (*),(**)

$\boxed{\max(-M_1,\ n - L_2 + 1) \le m \le \min(n + L_1,\ M_2)}$

$m - L_1 \le n \le L_2 - 1 + m$

$\Downarrow$ (*),(**)

$\boxed{-M_1 - L_1 \le n \le L_2 - 1 + M_2}$

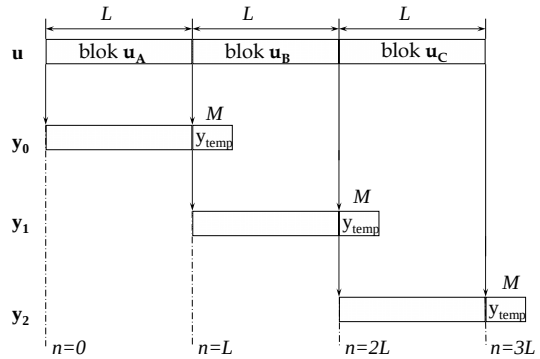
Opći slučaj – granice konvolucijske sumacije

$$y(n) = \sum_{m=\max(-M_1,n-L_2+1)}^{\min(n+L_1,M_2)} h(m)u(n-m)$$

Preklopi i zbroji metoda (Overlap-Add)

- za vrlo dugačke (ili beskonačne) signale
- ulazni signal se podijeli u kraće blokove duljine L:
  $\mathbf{u} = \mathbf{u_A}, \mathbf{u_B}, \mathbf{u_C}...$
- izlazni blokovi duljine L+M se preklapaju
  $\mathbf{y_0} = \mathbf{h} * \mathbf{u_A}$
  $\mathbf{y_1} = \mathbf{h} * \mathbf{u_B}$
  $\mathbf{y_2} = \mathbf{h} * \mathbf{u_C}$
- potrebno je zbrojiti dijelove koji se preklapaju

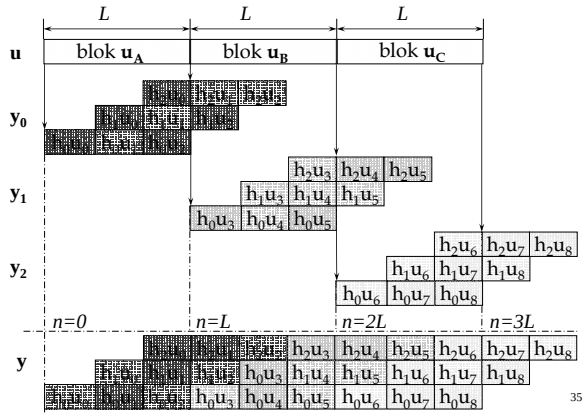
Preklopi i zbroji metoda



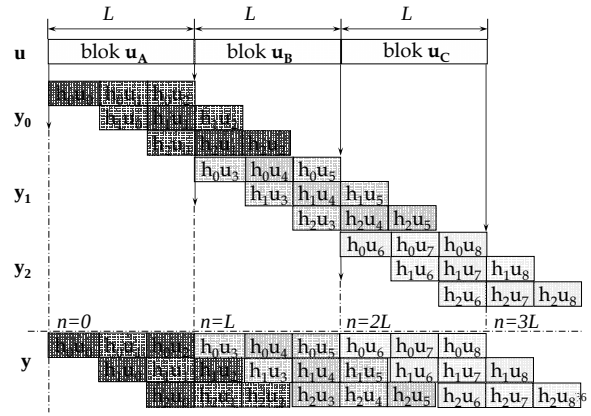
Preklopi i zbroji metoda - primjer

- Neka je ulazni "dugački" signal u(n) = $[u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8]$
- Razložimo ulazni signal na blokove duljine L=3
- Neka je filtar reda M = 2

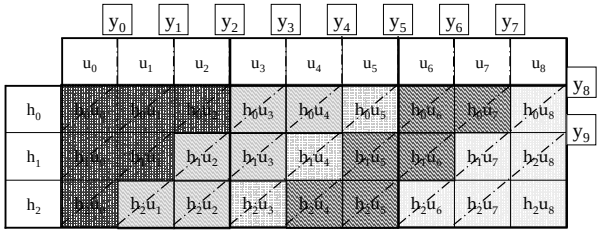
Preklopi i zbroji metoda



Preklopi i zbroji metoda



Preklopi i zbroji metoda - primjer



Obradba uzorak po uzorak

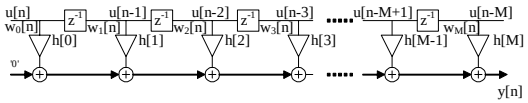
- kontinuirana obradba uzoraka
- realizacije u stvarnom vremenu
- elementarni funkcijski blokovi
  - zbrajalo
  - množilo
  - element za kašnjenje

Obradba uzorak po uzorak – direktni oblik

- realizacija slijedi direktno iz konvolucijske sumacije za M < ∝, L = ∝

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} h[m]u[n-m]$$

- odgovara joj blok dijagram:



Obradba uzorak po uzorak – direktni oblik

- uvode se varijable stanja $w_0(n)$, $w_1(n)$, $w_2(n)$, ..., $w_M(n)$

$w_0(n) = u(n)$

$w_1(n) = u(n-1) = w_0(n-1)$

$w_2(n) = u(n-2) = w_1(n-1)$

$w_3(n) = u(n-3) = w_2(n-1)$

...

$w_M(n) = u(n-M) = w_{M-1}(n-1)$

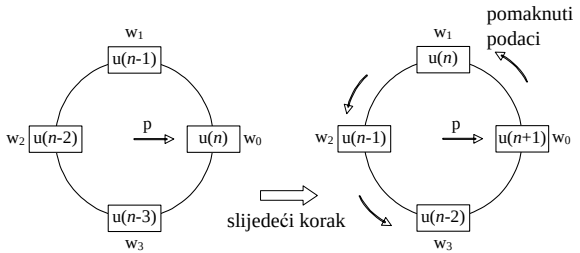
Obradba uzorak po uzorak – direktni oblik

- Novi zapis konvolucije:

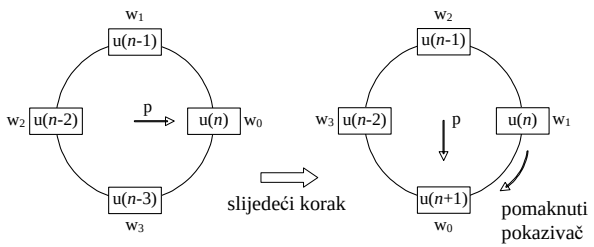
$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)w_m(n)$$

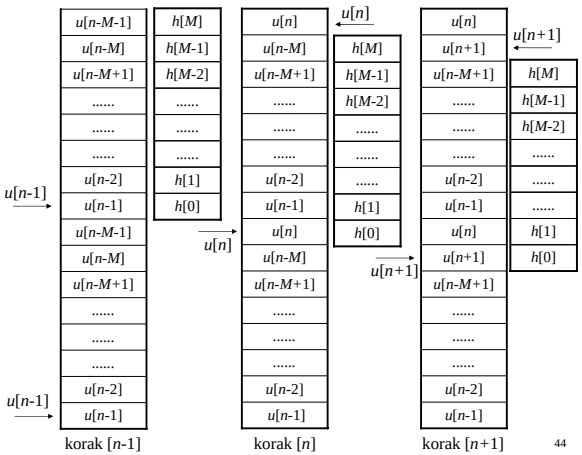
- Prednost je da se svi članovi sumacije odnose na isti n
- i svi su dostupni za obradbu u koraku n.
- $w_0(n)$ je trenutni ulazni uzorak
- $w_i(n)$, i = 1, ..., M su trenutni iznosi elemenata za kašnjenje

Cirkularni međuspremnici



Modulo M+1 cirkularni međuspremnik





Literatura

- Rabiner:A Simplified Computational Algorithm for Implementing FIR Digital Filters; IEEE Trans. Vol. ASSP-25, No. 3, 1977. P.259-261
- Sophocles J. Orfanidis: Introduction to Signal Processing (poglavlje 4: FIR Filtering and Convolution)

Linearna, periodična i cirkularna konvolucija

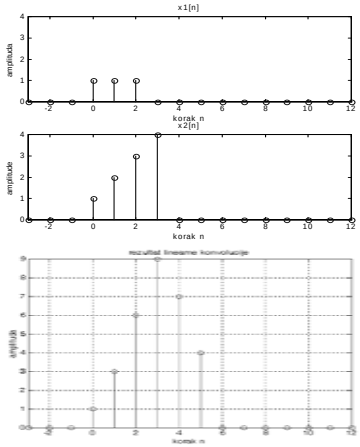
- Do sada smo, prešutno, razmatrali linearnu konvoluciju.
- Ilustrirajmo je još jednim primjerom:
- Neka su zadani diskretni nizovi :

$x_1[n]$=[1 1 1 0]

$x_2[n]$=[1 2 3 4]

Linearna konvolucija ovih nizova je:

$$y_{Lin}[n]=\sum_{j=0}^{N-1} x_1[j]\cdot x_2[n-j] \quad \text{za } 0\le n\le 2N-2$$



Periodična i cirkularna kovolucija

- Za periodične nizove $\tilde{x}_1[n]$ i $\tilde{x}_2[n]$ perioda N definiramo periodičnu konvoluciju

$$\tilde{y}[n]=\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{x}_1[j]\tilde{x}_2[n-j]$$

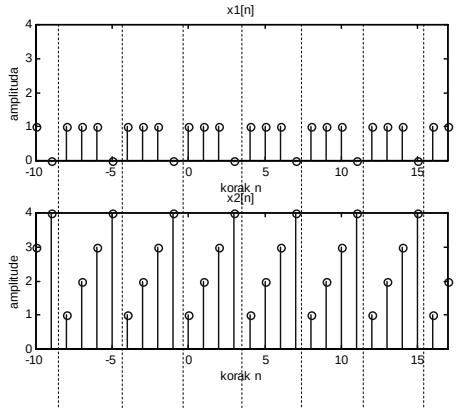
Bitna razlika u odnosu na izračunavanje linearne konvolucijske sumacije za aperiodske nizovne je da se ovdje sumacija izvršava u intervalu $0\le j\le N$-1.

Periodična i cirkularna konvolucija

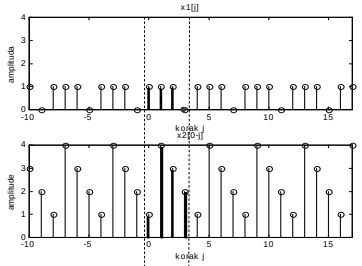
- Periodiziramo li nizove $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dobiti ćemo

$\tilde{x}_1[n]$ i $\tilde{x}_2[n]$

Ovi nizovi su prikazani kako slijedi:

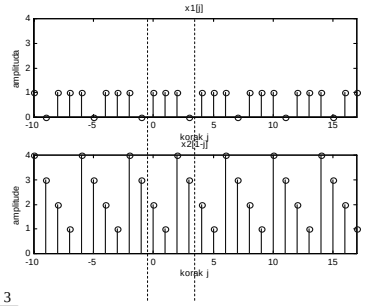


Izračunavanje periodične konvolucije



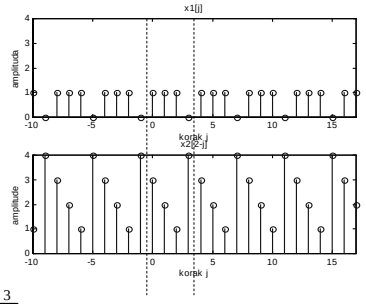
$$y[0]=\sum_{j=0}^{3}\tilde{x}_1[j]\cdot\tilde{x}_2[0-j]=1*1+1*4+1*3+0*2=8$$

Izračunavanje periodične konvolucije



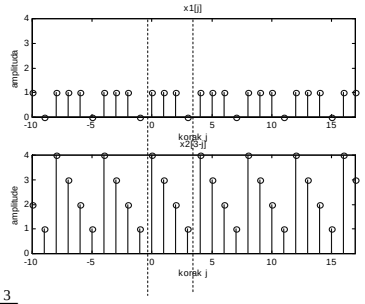
$$y[1]=\sum_{j=0}^{3}\tilde{x}_1[j]\cdot\tilde{x}_2[1-j]=1*2+1*1+1*4+0*3=7$$

Izračunavanje periodične konvolucije



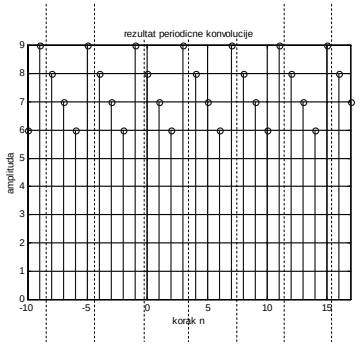
$$y[2]=\sum_{j=0}^{3}\tilde{x}_1[j]\cdot\tilde{x}_2[2-j]=1*3+1*2+1*1+0*4=6$$

Izračunavanje periodične konvolucije



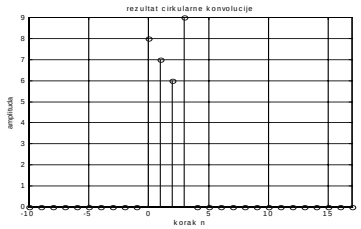
$$y[3]=\sum_{j=0}^{3}\tilde{x}_1[j]\cdot\tilde{x}_2[3-j]=1*4+1*3+1*2+0*1=9$$

Izračunavanje periodične konvolucije



Cirkularna konvolucija

- Cirkularnom konvolucijom nazivamo jednu periodu periodične konvolucije, pa za prethodni primjer slijedi:



Cirkularna konvolucija

- Periodična konvolucija je:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{x}_1[j]\tilde{x}_2[n-j]$$

Ako se ograničimo samo na jedan period slijedi:

$$y_C[n] = \sum_{j=0}^{N-1} x_1[j] \cdot x_2[\langle n-j \rangle_N] \text{ za } 0 \le n \le N-1$$

Očigledno je da je dovoljno promatrati jedan period za $\tilde{x}_1[j]$ i $\tilde{x}_2[n-j]$

Cirkularna konvolucija

- Jednom periodu linearno pomaknutog niza

$$\tilde{x}_2[n-j]$$

odogvara cirkularni pomak aperiodskog niza $x_2[n\text{-}j]$ što je prikazano s

$$x_2[\langle n-j \rangle_N]$$

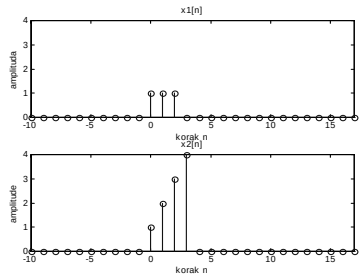
a to odgovara računanju rednog broja koraka po modulu N.

Cirkularna konvolucija

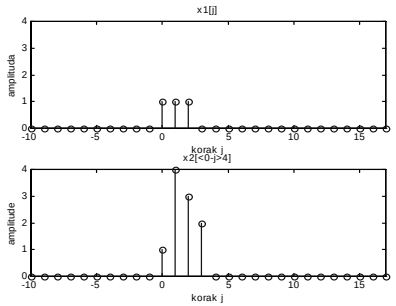
- Iz svega je vidljivo da se cirkularna konvolucija (koja će biti duljine N uzoraka) može primjeniti za dva aperiodska niza duljine N.

Primjer cirkularne konvolucije

- Zadani nizovi $x_1[n]$=[1 1 1 0] i $x_2[n]$=[1 2 3 4].

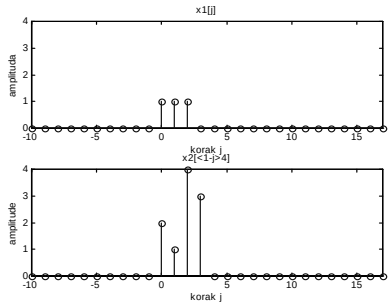


Izračunavanje cirkularne konvolucije



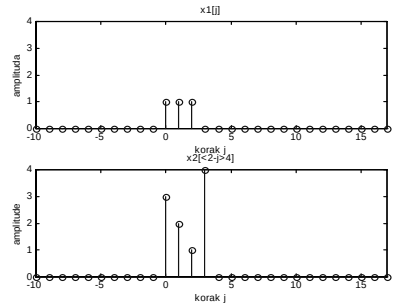
$$y[0] = \sum_{j=0}^{3} \tilde{x}_1[j] \cdot \tilde{x}_2[0-j] = 1*1+1*4+1*3+0*2 = 8$$

Izračunavanje cirkularne konvolucije



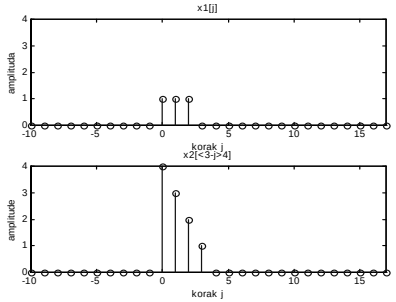
$$y[1] = \sum_{j=0}^{3} \tilde{x}_1[j] \cdot \tilde{x}_2[1-j] = 1*2+1*1+1*4+0*3 = 7$$

Izračunavanje cirkularne konvolucije



$$y[2] = \sum_{j=0}^{3} \tilde{x}_1[j] \cdot \tilde{x}_2[2-j] = 1*3+1*2+1*1+0*4 = 6$$

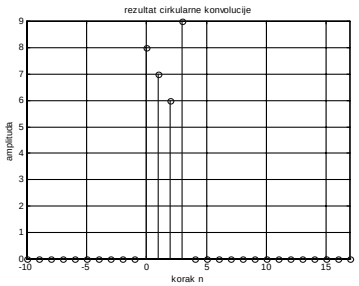
Izračunavanje cirkularne konvolucije



$$y[3]=\sum_{j=0}^{3}\tilde{x}_1[j]\cdot\tilde{x}_2[3-j]=1*4+1*3+1*2+0*1=9$$

Izračunavanje cirkularne konvolucije

- i konačno finalni rezultat konvolucijske sumacije



Izračunavanje linearne konvolucije pomoću cirkularne konvolucije

$x_1[j]$ = [1 1 1 0 0 0 0 0];

$x_2[j]$ = [1 2 3 4 0 0 0 0];

$x_2[0\text{-}j]$ = [1 0 0 0 0 4 3 2]; $\Rightarrow y[0] = 1$

$x_2[1\text{-}j]$ = [2 1 0 0 0 0 4 3]; $\Rightarrow y[1] = 3$

$x_2[2\text{-}j]$ = [3 2 1 0 0 0 0 4]; $\Rightarrow y[2] = 6$

$x_2[3\text{-}j]$ = [4 3 2 1 0 0 0 0]; $\Rightarrow y[3] = 9$

$x_2[4\text{-}j]$ = [0 4 3 2 1 0 0 0]; $\Rightarrow y[4] = 7$

x_2[5-j] = [0 0 4 3 2 1 0 0]; $\Rightarrow y[5] = 4$

x_2[6-j] = [0 0 0 4 3 2 1 0]; $\Rightarrow y[6] = 0$

Izračunavanje linearne konvolucije pomoću cirkularne konvolucije