

FIR i IIR filtarske strukture

Digitalna obradba signala

Sadržaj

- FIR strukture
 - direktna realizacija
 - transponirana realizacija
 - FIR filtri linearne faze
 - kaskadna realizacija
- IIR strukture
 - direktne I i II realizacije
 - transponirana direktna II realizacija
 - kaskadna realizacija
 - paralelna realizacija

2

Filtarske strukture

- konvolucijska sumacija može biti korištena u realizaciji diskretnih vremenski stalnih linearnih sustava (LTI – linear time invariant)
- neprikladna za IIR filtre zbog beskonačne duljine impulsnog odziva
- realizacija IIR filtera se temelji na izravnoj implementaciji jednadžbe diferencija odnosno prijenosne funkcije

3

Filtarske strukture

- ulazno izlazni model IIR filtra prepostavlja konačnu sumu produkata

$$y[n] = -\sum_{m=1}^N a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^M b_m u[n-m]$$
- s druge strane, FIR filtri se mogu realizirati konvolucijskom sumacijom koja je konačna suma produkata

$$y[n] = \sum_{m=0}^N h[m]u[n-m]$$

4

Filtarske strukture

- realizacija LTI digitalnih filtera može biti, ovisno o primjeni, programska ili sklopovska
- u oba slučaja vrijednosti uzorka signala i vrijednosti filtarskih koeficijenata prikazuju se s konačnom preciznosti

5

Filtarske strukture

- međutim, direktna implementacija digitalnih filtera temeljena bilo na jednadžbi diferencija bilo na konačnoj konvolucijskoj sumaciji često može rezultirati nezadovoljavajućim performansama zbog aritmetike konačne preciznosti
- od praktičnog je interesa razviti alternativne realizacije i izabrati strukture koje daju zadovoljavajuće performanse uz aritmetiku konačne preciznosti

6

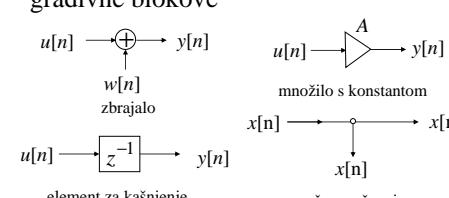
Filtarske strukture

- strukturalni prikaz pomoću elementarnih blokova - blok dijagram - je prvi korak u sklopovskoj ili programskoj realizaciji LTI digitalnih filtera
- blok dijagram omogućava dobar uvid o odnose unutarnjih varijabli te ulaza i izlaza

7

Elementi blok dijagrama

- računalne algoritme za realizaciju digitalnih filtera moguće je pogodno prikazati pomoću blok dijagrama koristeći elementarne gradivne blokove



8

Blok dijagrami

prednosti prikaza sustava pomoću blok dijagrama

- (1) jednostavno je napisati računalni algoritam uvidom u blok dijagram
- (2) jednostavno je analizirati blok dijagram kako bi se odredio eksplicitni odnos ulaza i izlaza

9

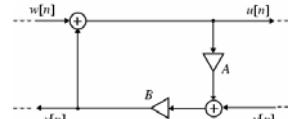
Blok dijagrami

- (3) jednostavan je preustroj blok dijagrama kako bi se izgradio "ekvivalentni" blok dijagram koji vodi na različite računalne algoritme
- (4) jednostavno je definirati zahtjeve na sklopovlje za realizaciju
- (5) jednostavno je razviti prikaze blok dijagrama izravno iz prijenosne funkcije

10

Problem petlji bez elemenata za kašnjenje

- fizička realizacija filtarskih struktura je nemoguća ako postoje petlje u blok dijagramu koje ne sadrže elemente za kašnjenje
- ilustrirajmo ovaj problem na slijedećem primjeru



11

Problem petlji bez elemenata za kašnjenje

- analiza ove strukture vodi na

$$u[n] = w[n] + y[n]$$

$$y[n] = B(v[n] + Au[n])$$
 što kombinacijom rezultira u

$$y[n] = B(v[n] + A(w[n] + y[n]))$$
- izračunavanje trenutne vrijednosti $y[n]$ zahtjeva poznavanje iste vrijednosti

12

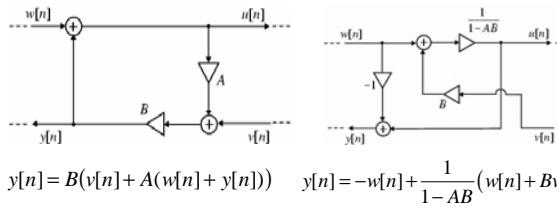
Problem petlji bez elemenata za kašnjenje

- ovo je fizički nemoguće postići zbog konačnog vremena potrebnog za izvođenje aritmetičkih operacija na digitalnom računalu
- potrebno je detektirati postojanje takvih petlji o nekoj strukturi i odgovarajućim postupkom ih ukloniti ne narušavajući ukupne ulazno izlazne odnose

13

Problem petlji bez elemenata za kašnjenje

- uklanjanje se postiže zamjenom dijela strukture s ekvivalentnom realizacijom koja ne sadrži petlju bez elemenata za kašnjenje
- primjer jedne takve realizacije



$$y[n] = B(v[n] + A(w[n] + y[n])) \quad y[n] = -w[n] + \frac{1}{1-AB}(w[n] + Bv[n])$$

14

Ekvivalentne strukture

- Postupak transponiranja blok dijagrama
 - okrenuti sve tokove signala
 - zamijeniti sve čvorove račvanja sa zbrajalima i obrnuto
 - zamijeniti ulazni i izlazni čvor
- sve ostale metode za gradnju ekvivalentnih struktura temelje se na specifičnom algoritmu za svaku strukturu

16

Ekvivalentne strukture

- postoji zapravo beskonačan broj ekvivalentnih struktura koje realiziraju istu prijenosnu karakteristiku
- zato je nemoguće razviti sve ekvivalentne realizacije
- ovdje ćemo se ograničiti samo na najčešće korištene strukture

17

Ekvivalentne strukture

- korištenjem aritmetike beskonačne preciznosti bilo koja realizacija digitalnih filtera ponašala bi se identično za bilo koju ekvivalentnu strukturu
- međutim, u praksi, zbog konačne duljine riječi, specifična realizacija se može ponašati potpuno drugačije od svoje ekvivalentne realizacije

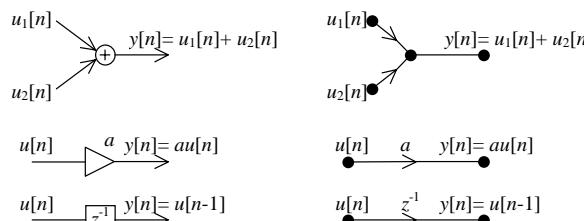
18

Ekvivalentne strukture

- važno je stoga izabrati strukturu koja pokazuje najmanju osjetljivost na efekte kvantizacije u slučaju korištenja aritmetike konačne preciznosti
- očigledan pristup u pronaalaženju takve strukture temelji se na analizi utjecaja konačne duljine riječi i aritmetike konačne preciznosti za veliki broj ekvivalentnih struktura čime je omogućen izbor najpovoljnije

19

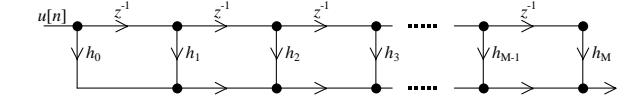
Pojednostavljeno crtanje blok dijagrama



20

Direktna realizacija FIR filtra

$$y[n] = \sum_{m=0}^M h_m u[n-m]$$



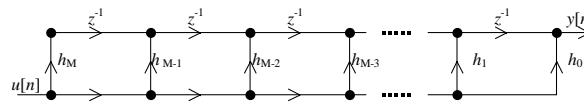
21

Transponirana struktura

$$y[n] = \sum_{m=0}^2 h_m u[n-m] = h_0 u[n] + h_1 u[n-1] + h_2 u[n-2]$$

22

Transponirana struktura



23

Strukture za FIR filtre linearne faze

- 4 tipa FIR filtara linearne faze

- Tip I: $h[n] = h[M-n]$ $0 \leq n \leq M$, M je paran
 Tip II: $h[n] = h[M-n]$ $0 \leq n \leq M$, M je neparan
 Tip III: $h[n] = -h[M-n]$ $0 \leq n \leq M$, M je paran
 Tip IV: $h[n] = -h[M-n]$ $0 \leq n \leq M$, M je neparan

24

Strukture za FIR filtre linearne faze

- za tipove I i III možemo pisati:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^M h[m] u[n-m] = \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[m] u[n-m] + h[\frac{M}{2}] u[n-\frac{M}{2}] + \sum_{m=\frac{M}{2}+1}^M h[m] u[n-m] * \\ &\quad * \text{uvodimo zamjenu} \\ m_1 &= M-m \\ \text{iz čega slijedi: } &\sum_{m=\frac{M}{2}-1}^0 h[M-m] u[n-M+m] = \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-m] u[n-M+m] \\ y[n] &= \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[m] u[n-m] + h[\frac{M}{2}] u[n-\frac{M}{2}] + \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-m] u[n-M+m] \end{aligned}$$

25

Strukture za FIR filtre linearne faze

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[m] u[n-m] + h[\frac{M}{2}] u[n-\frac{M}{2}] + \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[M-m] u[n-M+m]$$

- za Tip I vrijedi: $h[n] = h[M-n]$, M je paran

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[m] \{u[n-m] + u[n-M+m]\} + h[\frac{M}{2}] u[n-\frac{M}{2}]$$

- za Tip III vrijedi: $h[n] = -h[M-n]$, M je paran

$$h[\frac{M}{2}] = 0 \quad y[n] = \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}-1} h[m] \{u[n-m] - u[n-M+m]\}$$

26

Strukture za FIR filtre linearne faze

- za Tip II vrijedi: $h[n] = h[M-n]$, M je neparan

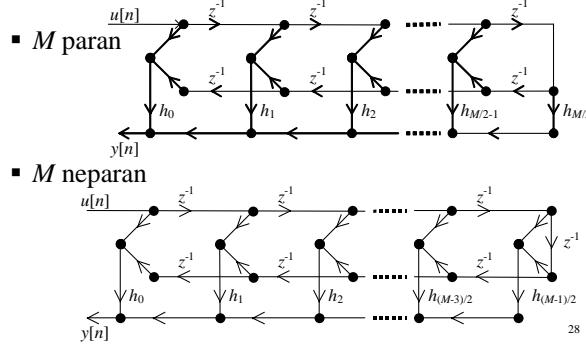
$$y[n] = \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} h[m] \{u[n-m] + u[n-M+m]\}$$

- za Tip IV vrijedi: $h[n] = -h[M-n]$, M je neparan

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\frac{M-1}{2}} h[m] \{u[n-m] - u[n-M+m]\}$$

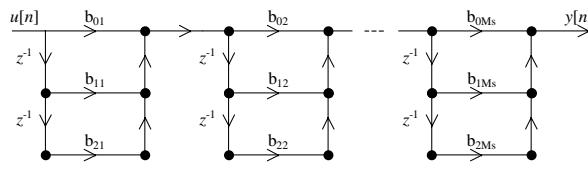
27

Strukture za FIR filtre linearne faze



Kaskadna realizacija FIR filtara

- pa je izgled cijele strukture:



Kaskadna realizacija FIR filtara

- razbijanje transfer funkcije $H[z]$ na sekcije drugog reda

$$H[z] = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{m=1}^{M_s} (b_{0m} + b_{1m}z^{-1} + b_{2m}z^{-2})$$

- gdje je M_s najveći cijeli broj sadržan u $(M+1)/2$

$$u[n] = u_1[n] \boxed{H_1(z)} \frac{y_1[n]}{u_2[n]} \boxed{H_2(z)} \frac{y_2[n]}{u_3[n]} \dots \frac{y_{M_s-1}[n]}{u_{M_s}[n]} \boxed{H_{M_s}(z)} \frac{y_{M_s}[n]}{}$$

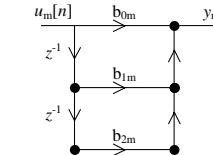
29

Kaskadna realizacija FIR filtara

- realizacija

$$H_m(z) = b_{0m} + b_{1m}z^{-1} + b_{2m}z^{-2}$$

$$y_m[n] = b_{0m}u_m[n] + b_{1m}u_m[n-1] + b_{2m}u_m[n-2]$$



30

Polifazna realizacija FIR filtara

- izvršimo li grupiranje na slijedeći način:

$$\begin{aligned} H(z) &= (h[0] + h[3] \cdot z^{-3} + h[6] \cdot z^{-6}) \\ &\quad + z^{-1}(h[1] + h[4] \cdot z^{-3} + h[7] \cdot z^{-6}) \\ &\quad + z^{-2}(h[2] + h[5] \cdot z^{-3} + h[8] \cdot z^{-6}) \end{aligned}$$

- uvođenjem notacije:

$$E_0(z) = h[0] + h[3] \cdot z^{-1} + h[6] \cdot z^{-2}$$

$$E_1(z) = h[1] + h[4] \cdot z^{-1} + h[7] \cdot z^{-2}$$

$$E_2(z) = h[2] + h[5] \cdot z^{-1} + h[8] \cdot z^{-2}$$

- slijedi:

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1}E_1(z^3) + z^{-2}E_2(z^3)$$

34

Polifazna realizacija FIR filtara

- polifazna dekompozicija $H(z)$ – paralelna struktura
- postupak dekompozicije za kauzalni FIR filter reda $M=8$

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + h[2] \cdot z^{-2} + h[3] \cdot z^{-3} + h[4] \cdot z^{-4} + \\ &\quad + h[5] \cdot z^{-5} + h[6] \cdot z^{-6} + h[7] \cdot z^{-7} + h[8] \cdot z^{-8} \end{aligned}$$

- izvršimo grupiranje na slijedeći način:

$$\begin{aligned} H(z) &= (h[0] + h[2] \cdot z^{-2} + h[4] \cdot z^{-4} + h[6] \cdot z^{-6} + h[8] \cdot z^{-8}) \\ &\quad + (h[1] \cdot z^{-1} + h[3] \cdot z^{-3} + h[5] \cdot z^{-5} + h[7] \cdot z^{-7}) \end{aligned}$$

32

Polifazna realizacija FIR filtara

$$\begin{aligned} H(z) &= (h[0] + h[2] \cdot z^{-2} + h[4] \cdot z^{-4} + h[6] \cdot z^{-6} + h[8] \cdot z^{-8}) \\ &\quad + z^{-1}(h[1] + h[3] \cdot z^{-2} + h[5] \cdot z^{-4} + h[7] \cdot z^{-6}) \end{aligned}$$

- uvođenjem notacije:

$$E_0(z) = h[0] + h[2] \cdot z^{-2} + h[4] \cdot z^{-4} + h[6] \cdot z^{-6} + h[8] \cdot z^{-8}$$

$$E_1(z) = h[1] + h[3] \cdot z^{-2} + h[5] \cdot z^{-4} + h[7] \cdot z^{-6}$$

- možemo pisati:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)$$

33

Polifazna realizacija FIR filtara

- prikazana dekompozicija $H(z)$ naziva se polifazna dekompozicija
- u općem slučaju polifazna dekompozicija na L grana je oblika

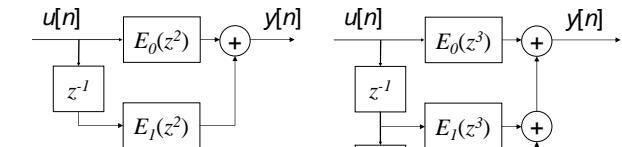
$$H(z) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} E_m(z^L)$$

- gdje je

$$E_m(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{M}{L} \rfloor} h[Ln+m]z^{-n} \quad \text{za } 0 \leq m \leq L-1$$

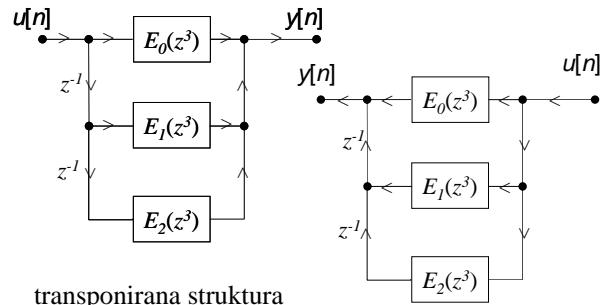
$\lfloor \frac{M}{L} \rfloor$ cijelobrojna vrijednost od $\frac{M}{L}$

Polifazna realizacija FIR filtara



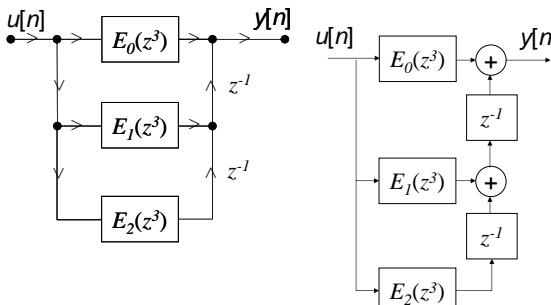
36

Polifazna realizacija FIR filtera



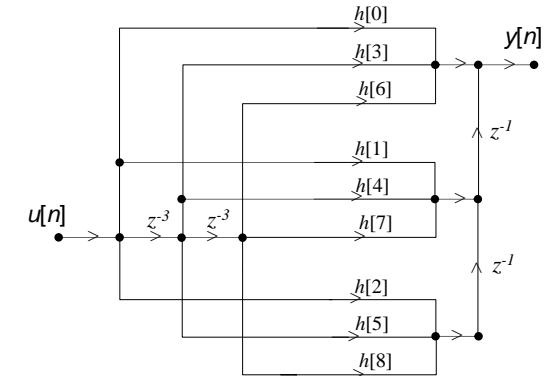
37

Polifazna realizacija FIR filtera



38

Polifazna realizacija FIR filtera



39

Realizacija IIR filtera

$$y[n] = -\sum_{m=1}^N a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^M b_m u[n-m]$$

- Z transformacijom pišemo prijenosnu funkciju:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

- polinomi od z^{-1} u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

40

Realizacija IIR filtera

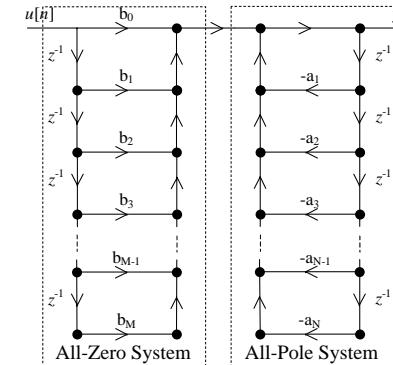
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

- nule od $H(z)$:
- polovi od $H(z)$:

$$H_1(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

41

Direktna I realizacija IIR filtra



42

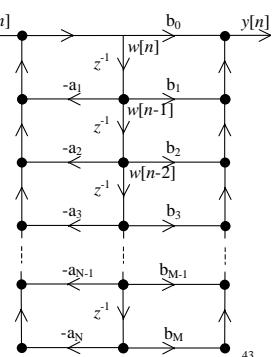
Direktna II realizacija IIR filtra

- kompaktnija struktura jer vrijedi:

$$w[n] = -\sum_{m=1}^N a_m w[n-m] + u[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m w[n-m]$$

- $M+N+1$ množenja
- $M+N$ zbrajanja
- max(M, N) memorijskih lokacija



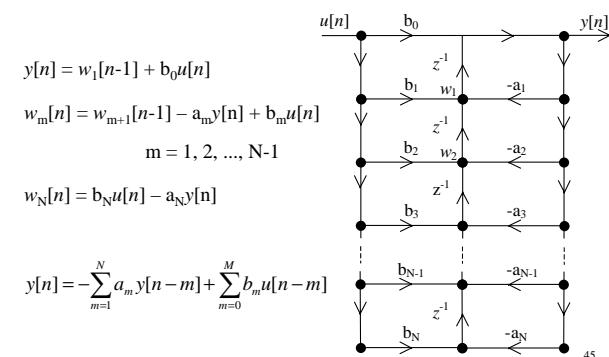
43

Nedostaci direktnih realizacija IIR filtera

- izuzetno osjetljive na promjene koeficijenata
- nisu preporučljive u praktičnim aplikacijama
 - kvantizacija koeficijenata
 - aritmetika konačne duljine riječi

44

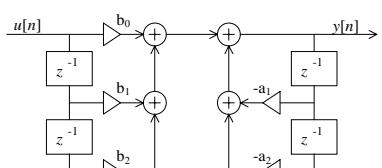
Transponirana direktna II struktura



45

IIR sustav drugog reda – direktna I realizacija

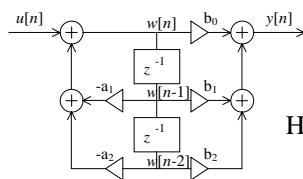
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



$$y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

46

IIR sustav drugog reda – direktna II realizacija

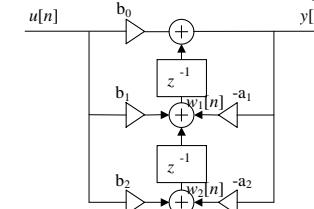


$$w[n] = -a_1 w[n-1] - a_2 w[n-2] + u[n]$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]$$

47

IIR sustav drugog reda – transponirana direktna II realizacija



$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$y[n] = b_0 u[n] + w_1[n-1]$$

$$w_1[n] = b_1 u[n] - a_1 y[n] + w_2[n-1]$$

$$w_2[n] = b_2 u[n] - a_2 y[n]$$

48

Kaskadna realizacija IIR filtera

- razlaganje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije nižeg reda
- polinomi u brojniku i nazivniku prikazuju se kao proizvodi polinoma nižeg reda

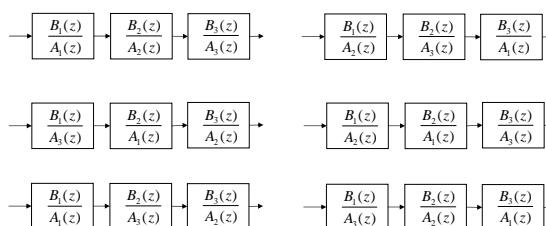
primjer:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z) \cdot B_3(z)}{A_1(z) \cdot A_2(z) \cdot A_3(z)}$$

- različite kaskadne realizacije (36) postiže se različitim uparivanjem polova i nula ili/ili izmjenom redoslijeda sekcija u kaskadi

49

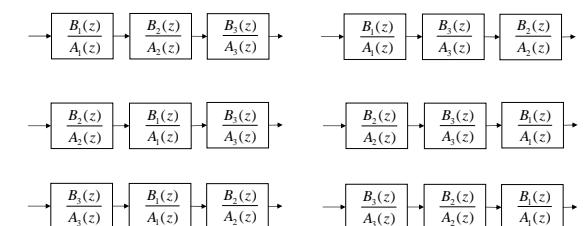
Kaskadna realizacija IIR filtera



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije različitim uparivanjem polova

50

Kaskadna realizacija IIR filtera



- različite ekvivalentne kaskadne realizacije promjenom redoslijeda sekacija

51

Kaskadna realizacija IIR filtera

- razbijanje transfer funkcije $H(z)$ na sekcije drugog reda

$$H(z) = G \cdot \prod_{l=1}^L H_l(z) \quad H_l(z) = \frac{1 + b_{l1} z^{-1} + b_{l2} z^{-2}}{1 + a_{l1} z^{-1} + a_{l2} z^{-2}}$$

- gdje je L najveći cijeli broj sadržan u $(N+1)/2$

$$G = b_o$$

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdots G_L$$

- voditi računa o uparivanju polova i nula u aritmetici konačne duljine riječi

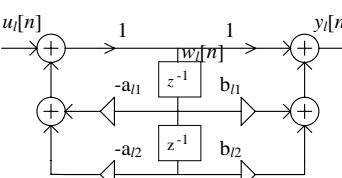
52

Kaskadna realizacija IIR filtera

$$u[n] = u_1[n] \xrightarrow{H_1(z)} y_1[n] \xrightarrow{H_2(z)} y_2[n] \xrightarrow{\dots} y_{L-1}[n] \xrightarrow{H_L(z)} y[n]$$

- $y_0[n] = u[n]$
- $w_l[n] = -a_{l1}w_l[n-1] - a_{l2}w_l[n-2] + y_{l-1}[n] \quad l = 1, 2, \dots, L$
- $y_l[n] = w_l[n] + b_{l1}w_l[n-1] + b_{l2}w_l[n-2]$

$$y[n] = G y_L[n]$$



53

Paralelna realizacija IIR filtera

$$N \geq M$$

$$H(z) = C + \sum_{l=1}^N \frac{A_l}{1 - p_l z^{-1}}$$

$$C = \frac{b_n}{a_n}$$

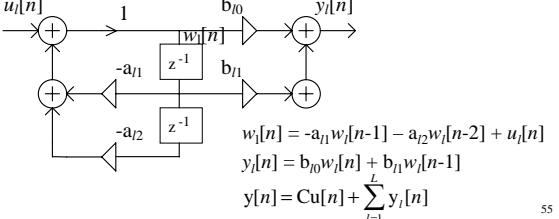
- gdje su p_l polovi, a A_l koeficijenti u rastavu na parcijalne razlomke

54

Paralelna realizacija IIR filtera

- kombiniraju se konjugirano kompleksni polovi

$$H(z) = C + \sum_{l=1}^N H_l(z) \quad H_l(z) = \frac{b_{l0} + b_{l1}z^{-1}}{1 + a_{l1}z^{-1} + a_{l2}z^{-2}}$$



55

Literatura

- A. V. Oppenheim, R. W. Schafer: *Discrete-Time Signal Processing* (poglavlje 6.5: Basic Network Structures for FIR Systems)
- John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis: *Introduction to Digital Signal Processing* (poglavlje 7: Realization of Discrete-Time Systems)
- S. K. Mitra: *Digital Signal Processing* (poglavlje 6: Digital Filter Structures)

56