FFT

Digitalna obradba signala

Uvod

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0\le k\le N-1$$

- FFT je postupak za efikasno računanje DFT-a
- Kod DFT-a za N točaka broj kompleksnih množenja je N^2
- Ako se koristi FFT algoritam broj množenja je

$$(N/2)\log_2 N$$

- Problem računanja DFT-a jest izračun niza $\{X[k]\}$ od N kompleksnih brojeva zadanih drugim nizom brojeva $\{x[n]\}$ dužine N

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

$$0\le k\le N-1$$

Pojednostavljujući notaciju definiramo kompleksnu eksponencijalu W_N

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn} \qquad 0\le k\le N-1$$

Slično IDFT postaje

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-nk} \qquad 0\le n\le N-1$$

- Za niz kompleksnih brojeva DFT se može izraziti :

$$X_R[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\left\{x_R[n]\cos\frac{2\pi kn}{N}+x_I[n]\sin\frac{2\pi kn}{N}\right\}$$

$$X_I[k]=-\sum_{n=0}^{N-1}\left\{x_R[n]\sin\frac{2\pi kn}{N}-x_I[n]\cos\frac{2\pi kn}{N}\right\}$$

Direktno računanje $X_R[k]$ i $X_I[k]$ traži:

- $2N^2$ proračuna trigonometrijskih funkcija
- $4N^2$ realnih množenja
- $4N(N-1)$ realnih zbrajanja
- Određen broj indeksnih i adresnih operacija

- Dakle da se izračuna svih N vrijednosti DFT-a potrebno je N^2 kompleksnih množenja i N^2 - N kompleksnih zbrajanja.
- Direktno izračunavanje DFT-a je u osnovi neefikasno jer ne koristi simetričnost i periodičnost kompleksne eksponencijale W_N

- Simetričnost: $W_N^{k+N/2}=-W_N^k$
- Periodičnost: $W_N^{k+N}=W_N^k$
- FFT algoritmi koriste ova osnovna svojstva kompleksne eksponencijale

- *Primjer*

$$W_N^{k+\frac{N}{2}}=\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+\frac{N}{2}}=e^{-j\frac{2\pi}{N}k-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}}=$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\cdot e^{-j\pi}=-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}=-W_N^k$$

$$W_N^{k+N} = (e^{-j\frac{2\pi}{N}})^{k+N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k - j2\pi} =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$$

Metoda podijeli pa vladaj

- Ovaj pristup zasniva se na dekompoziciji DFT-a u N točaka u sukcesivno manje blokove DFT-a (Cooley-Tukey FFT algoritmi)

The **Cooley-Tukey algorithm** is the most common fast Fourier transform (FFT) algorithm. It re-expresses the discrete Fourier transform (DFT) of an arbitrary composite size *n* = *n*1*n*2 in terms of smaller DFTs of sizes *n*1 and *n*2, recursively, in order to reduce the computation time to O(*n* log *n*) for highly-composite *n*. Because of the algorithm's importance, specific variants and implementation styles have become known by their own names. This algorithm, including its recursive application, was already known around 1805 to Carl Friedrich Gauss, who used it to interpolate the trajectories of the asteroids Pallas and Juno, but his work was not widely recognized (being published only posthumously and in neo-Latin). Various limited forms were also rediscovered several times throughout the 19th and early 20th centuries. FFTs became popular after J. W. Cooley of IBM and John W Tukey of Princeton published a paper in 1965 reinventing the algorithm and describing how to perform it conveniently on a computer (including how to arrange for the output to be produced in the natural ordering). Because the Cooley-Tukey algorithm breaks the DFT into smaller DFTs, it can be combined arbitrarily with any other algorithm for the DFT. For example, Rader's or Bluestein's algorithm can be used to handle large prime factors that cannot be decomposed by Cooley-Tukey, or the Prime-factor algorithm can be exploited for greater efficiency in separating out relatively prime factors. See also the fast Fourier transform for information on other FFT algorithms, specializations for real and/or symmetric data, and accuracy in the face of finite floating-point precision.

- Kao ilustraciju osnovnih karakteristika promotrit ćemo računanje DFT-a u N točaka gdje **N može biti faktoriziran kao produkt dva cijela broja**

N=LM

- Pretpostavka da N nije prost broj nije restriktivna budući da se niz može popuniti sa nulama, da se osigura faktorizacija.
- niz x[*n*],0≤ n ≤ N-1 se može pohraniti u jednodimenzionalno polje indeksirano sa n

- Tablica 1

n

0	1	2	.....	N-1
x[0]	x[1]	x[2]	.....	x[N-1]

- Niz *x*[*n*] se, međutim, može pohraniti u dvodimenzionalno polje indeksirano sa *l* i m.

$$0 \le l \le L-1$$

$$0 \le m \le M-1$$

l predstavlja indeks redaka a m indeks stupaca

Tablica 2

m index stupaca

l index redaka

l \ *m*	0	1	.....	.....	M-1
0	x[0,0]	x[0,1]	.....	.....	x[0,M-1]
1	x[1,0]	x[1,1]	.....	.....	x[1,M-1]
2	x[2,0]	x[2,1]	.....	.....	x[2,M-1]
.	.	.	.....	.....	.
.	.	.	.....	.....	.
L-1	x[L-1,0]	x[L-1,1]	.....	.....	x[L-1,M-1]

- Niz *x*[*n*] može biti pohranjen u pravokutno polje na više načina od koji svaki zavisi o razlaganju indeksa *n* u indekse (*l*,m).
- Na primjer, ako odaberemo razlaganje:

n = M *l* + m

To vodi u slučaj u kojem prvi redak sadrži prvih M elemenata od x[*n*], drugi redak sadrži slijedećih M elemenata x[*n*] itd.

razlaganje n = M *l* + m

m index stupaca

l index redaka

l \ *m*	0	1	2	.....	M-1
0	x[0]	x[1]	x[2]	.....	x[M-1]
1	x[M]	x[M+1]	x[M+2]	.....	x[2M-1]
2	x[2M]	x[2M+1]	x[2M+2]	.....	x[3M-1]
.	.	.	.	.....	.
.	.	.	.	.....	.
L-1	x[(L-1)M]	x[(L-1)M+1]	x[(L-1)M+2]	.....	x[LM-1]

[(L-1)M+M-1]

- U drugom slučaju razlaganje

n = *l* +mL

- pohranjuje prvih L elemenata od x[*n*] u prvi stupac, sljedećih L elemenata u drugi stupac, itd. kao sto je prikazano u tablici

razlaganje $n = l + mL$

m index stupaca

l index stupaca

l \ *m*	0	1	2	.....	M-1
0	x[0]	x[L]	x[2L]	.....	x[(M-1)L]
1	x[1]	x[L+1]	x[2L+1]	.....	x[(M-1)L+1]
2	x[2]	x[L+2]	x[2L+2]	.....	x[(M-1)L+2]
.	.	.	.	.....	.
.	.	.	.	.....	.
L-1	x[L-1]	x[2L-1]	x[3L-1]	.....	x[LM-1]

[(M-1)L+L-1]

- Identičan aranžman može se koristiti za izračunate DFT vrijednosti.Posebno razlaganje indeksa k u par indeksa (p,q) gdje je $0 \le p \le L-1$ i $0 \le q \le M-1$

- Ako odaberemo razlaganje k = Mp + q , DFT je pohranjen po recima gdje prvi redak sadrži prvih M elemenata DFT-a X(k), drugi redak sadrži slijedeći niz od M elemenata.

- Ako se odabere razlaganje

k = p + qL

rezultati X(k) pohranjeni su po stupcima

- prvih L elemenata pohranjeno u prvom stupcu, drugi niz elemenata pohranjen je u drugom stupcu itd.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$n = l + mL \quad \text{i} \quad k = Mp + q$$

$$X[Mp+q] = \sum_{n=0}^{N-1} x[l+mL] W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

$$X[p,q] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[l,m] W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

- dakle, DFT se može izraziti kao dvostruka suma preko elemenata polja pomnoženih sa odgovarajućom kompleksnom eksponencijalom

$$X[p,q] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x[l,m] W_N^{(Mp+q)(l+mL)}$$

$$W_N^{(Mp+q)(l+mL)} =$$

$$= W_N^{Mpl} W_N^{ql} W_N^{MLpm} W_N^{qmL}$$

$$N = ML$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \qquad W_N^{mqL} = W_{N/L}^{mq} = W_M^{mq},$$

$$W_N^L = e^{-j\frac{2\pi}{N}L} \qquad W_N^{Mpl} = W_{N/M}^{pl} = W_L^{pl}$$

$$W_N^L = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{L}}} = W_{\frac{N}{L}} \qquad W_N^{MLmp} = W_N^{Nmp} = 1,$$

Koristeći ova pojednostavljenja

$$X[p,q] = \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ W_N^{lq} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x[l,m] W_M^{mq} \right] \right\} W_L^{lp}$$

Proračun se može podijeliti u 3 koraka

1. Računaju se komponente DFT-a u M točaka

$$F[l,q] \equiv \sum_{m=0}^{M-1} x[l,m] W_M^{mq} \quad 0 \le q \le M-1$$

za svaki od redaka *l* = 0,1....,L-1

◆ 2. Računa se novo polje G(l,q)

$$G[l,q] = W_N^{lq} F[l,q] \quad 0 \le l \le L-1$$
$$0 \le q \le M-1$$

3. Konačno, računaju se komponente DFT-a u L točaka

$$X[p,q] = \sum_{l=0}^{L-1} G[l,q] W_L^{lp}$$

za svaki stupac q=0,1,.....,M-1 polja G(l,q)

◆ Broj množenja: $LM^2+LM+ML^2$
= N(M+1+L)

◆ Broj zbrajanja: LM(M-1)+ML(L-1)
= N(M+L-2)

◆ Primjer: Za N=1000 i ako se odabere L=20 i M=50

◆ Broj množenja je N(M+L+1) =1000(20+50+1)=71000

◆ Direktnim postupkom potrebno je $N^2=10^6$

$$\frac{N^2}{N(M+L+1)} = \frac{10^6}{71000} = 14{,}08$$

◆ Kod zbrajanja omjer je 14,69

◆ Primjer

Kao ilustracija procedure računanja, promotriti će se računanje DFT-a u 15 točaka. Ako je N=5*3=15, odabire se L=5 i M=3. Dakle, pohranjuje se niz x(n) od 15 točaka po stupcima.

Red 1	x[0,0]=x[0]	x[0,1]=x[5]	x[0,2]=x[10]
Red 2	x[1,0]=x[1]	x[1,1]=x[6]	x[1,2]=x[11]
Red 3	x[2,0]=x[2]	x[2,1]=x[7]	x[2,2]=x[12]
Red 4	x[3,0]=x[3]	x[3,1]=x[8]	x[3,2]=x[13]
Red 5	x[4,0]=x[4]	x[4,1]=x[9]	x[4,2]=x[14]

◆ Sad se računaju DFT-ovi u 3 točke za svaki od 5 redaka.

F[0,0]	F[0,1]	F[0,2]
F[1,0]	F[1,1]	F[1,2]
F[2,0]	F[2,1]	F[2,2]
F[3,0]	F[3,1]	F[3,2]
F[4,0]	F[4,1]	F[4,2]

◆ Slijedeći korak je da se pomnože svaki F(l,q) sa kompleksnom eksponencijalom

$$W_N^{lq} = W_{15}^{lq} \;,\; 0 \le l \le 4 \text{ i } 0 \le q \le 2$$

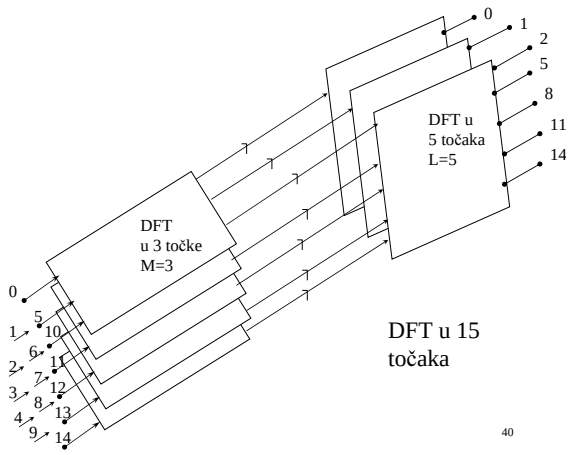
◆ Rezultati računanja u 5*3 polju

Stupac 1	Stupac 2	Stupac 3
G(0,0)	G(0,1)	G(0,2)
G(1,0)	G(1,1)	G(1,2)
G(2,0)	G(2,1)	G(2,2)
G(3,0)	G(3,1)	G(3,2)
G(4,0)	G(4,1)	G(4,2)

◆ Konačni korak je da se izračuna DFT u 5 točaka za svaki od 3 stupca.Ovaj računski postupak sadrži

željene vrijednosti DFT-a.

X(0,0)=X(0)	X(0,1)=X(1)	X(0,2)=X(2)
X(1,0)=X(3)	X(1,1)=X(4)	X(1,2)=X(5)
X(2,0)=X(6)	X(2,1)=X(7)	X(2,2)=X(8)
X(3,0)=X(9)	X(3,1)=X(10)	X(3,2)=X(11)
X(4,0)=X(12)	X(4,1)=X(13)	X(4,2)=X(14)



DFT u 15 točaka

Korijen-2 metoda

Uvod

$$X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

◆Potrebno: N^2 kompleksnih množenja

N(N-1) zbrajanja

◆ Pokazano je da možemo iskoristiti periodičnost i simetričnost kompleksne eksponencijale

$$W_N^{(k+mN)(n+lN)} = W_N^{kn} \quad \text{za } m,l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$W_N^{kn} \cdot \underbrace{W_N^{mnN}}_{1} \cdot \underbrace{W_N^{klN}}_{1} \cdot \underbrace{W_N^{mlN^2}}_{1} = W_N^{kn}$$

◆ Pokazano je da se DFT efikasno može izračunati ako je moguće faktorizirati N kao $N = r_1 r_2 \ldots\ldots r_j$ gdje su $\{ r_j \}$ prim brojevi.

◆ Od posebne važnosti je slučaj kada je $r_1 = r_2 = \ldots\ldots = r_j = r$ tako da je $N = r^j$

◆ U tom slučaju svi DFT-ovi su dimenzije r tako da izračunavanje DFT-a u N točaka poprima pravilnu strukturu

◆ r se tada naziva baza (radix) FFT algoritma

- Neka je $N=2^j$ i koristi se "podijeli pa vladaj" postupak i to tako da se izabere M=N/2 i L=2
- ulazni niz razvrstamo u 2 retka i N/2 stupaca
- U prvom retku je niz $f_1(n)$, u drugom $f_2(n)$ tako da parni uzorci od x(n) ulaze u $f_1(n)$ a neparni u $f_2(n)$

- $f_1(n) = x(2n)$
- $f_2(n) = x(2n+1)$ n = 0,1,.....,N/2 -1
- $f_1(n)$ i $f_2(n)$ dobiveni su decimacijom x(n) za faktor 2 i zato se ovaj FFT algoritam naziva algoritam decimacije u vremenu

- N točaka DFT-a je

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad n = 0,1,\ldots\ldots, N-1$$

$$= \sum_{\text{n je paran}} x(n) W_N^{kn} + \sum_{\text{n je neparan}} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{(2m+1)k}$$

$$W_N^{2mk} = (W_N^2)^{mk} = (W_{\frac{N}{2}})^{mk}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(m) \cdot W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_2(m) W_{N/2}^{mk}$$

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \quad \text{za k} = 0,1,\ldots\ldots,\text{N-1}$$

- $F_1(k)$ i $F_2(k)$ su DFT-ovi od N/2 točaka
- $F_1(k)$ i $F_2(k)$ su periodički s periodom N/2

- $F_1(k+N/2) = F_1(k)$ k = 0,1,.....,N/2-1
- $F_2(k+N/2) = F_2(k)$ k = 0,1,.....,N/2-1
- Radi konzistencije

$$G_1(k) = F_1(k)$$
$$G_2(k) = W_N^k F_2(k)$$
$$\Rightarrow \quad X(k) = G_1(k) + G_2(k)$$
$$\text{k} = 0,1,\ldots.,\text{N - 1}$$

- U potpunosti se poštuje algoritam kojim je objašnjena metoda podijeli pa vladaj

1.)

$$F(l,q) = \sum_{m=0}^{M-1} x(\ell,m) W_M^{mq} \qquad 0 \le \text{q} \le \text{M - 1}$$

za $\ell = 0,1,\ldots.\text{L - 1}$ $\text{M} = \frac{\text{N}}{2}$

$$F(0,q) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(0,m) W_{N/2}^{mq} = F_1(k)$$

$$F(1,q) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(1,m) W_{N/2}^{mq} = F_2(k)$$

- 2.) Računamo G(l,q)

$$G(l,q) = W_N^{lq} F(\ell,q) \qquad 0 \le \ell \le \text{L - 1}$$
$$0 \le q \le \text{M - 1}$$

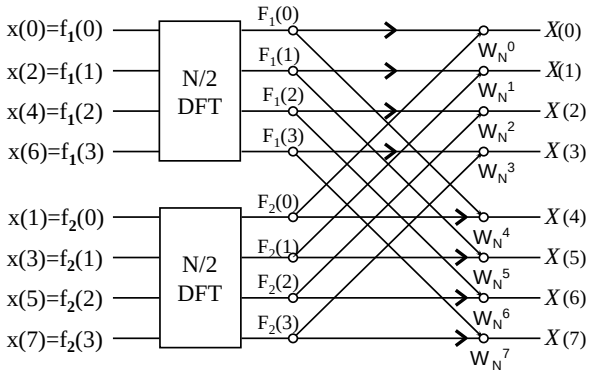
$$\text{G(0,q) = F(0,q) = F}_1(k)$$
$$G(1,q) = W_N^q F(1,q) = W_N^k F_1(k)$$

◆ 3.)

$$X(p,q) = \sum_{\ell=0}^{L-1} G(l,q) W_L^{\ell p} \qquad q = 0,1,\ldots\ldots, M-1$$

$$X(p,q) = G(0,q) + G(1,q)$$

◆ Neka je N= 8 = 2^3



◆ Dalje se nastavlja s razlaganjem nizova $f_1(n)$ i $f_2(n)$

$v_{11}(n) = f_1(2n) \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,N/4-1$

$v_{12}(n) = f_1(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,N/4-1$

i

$v_{21}(n) = f_2(2n) \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,N/4-1$

$v_{22}(n) = f_2(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,N/4-1$

$$F_1(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_1(m) W_{N/2}^{mk} = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} f_1(2\ell) W_{N/2}^{2\ell k} +$$

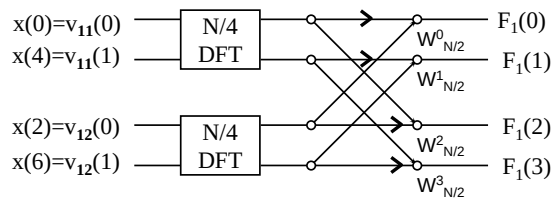
$$+ \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} f_1(2\ell+1) W_{N/2}^{(2\ell+1)}$$

$$F_1(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{11}(\ell) W_{N/4}^{\ell k} + W_{\frac{N}{2}}^{k} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{12}(\ell) W_{N/4}^{\ell k}$$

$$F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^{k} V_{12}(k)$$

◆ Slično se izvodi

$$F_2(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{21}(\ell) W_{N/4}^{\ell k} + W_{N/2}^{k} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{22}(\ell) W_{N/4}^{\ell k}$$



$$V_{11}(k) = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{11}(\ell) W_{N/4}^{\ell k} \qquad n = 0,1,\ldots\ldots,\frac{N}{4}-1$$

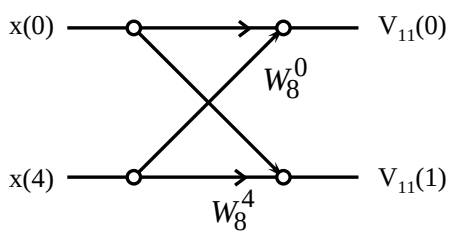
Za N = 8

$$V_{11}(k) = \sum_{\ell=0}^{1} v_{11}(\ell) W_2^{\ell k}$$

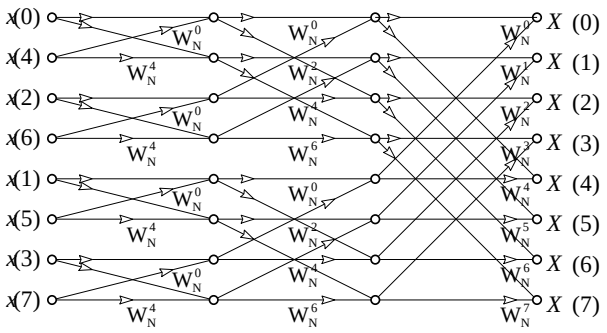
Za k = 0 $\quad V_{11}(0) = v_{11}(0) \cdot W_2^{0\cdot 0} + v_{11}(1) W_2^{0\cdot 1} = v_{11}(0) + v_{11}(1) W_8^0$

Za k = 1 $\quad V_{11}(1) = v_{11}(0) \cdot W_2^{0\cdot 1} + v_{11}(1) W_2^{1\cdot 1} = v_{11}(0) + v_{11}(1) W_8^4$

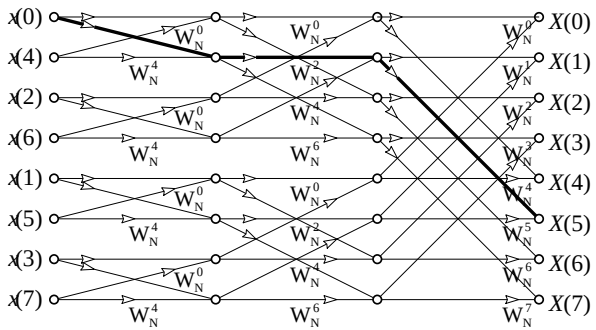
jer je $W_2 = e^{-j\frac{2\pi}{2}\cdot\frac{4}{4}} = (e^{-j\frac{2\pi}{8}})^4 = W_8^4$



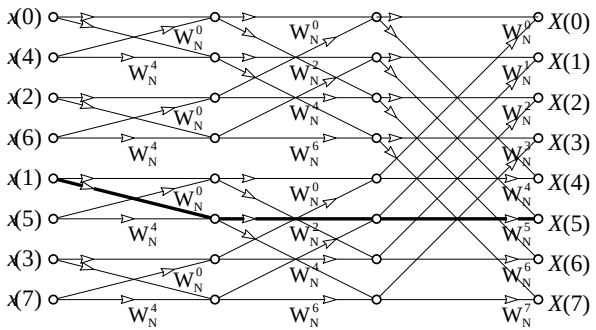
Za N=8



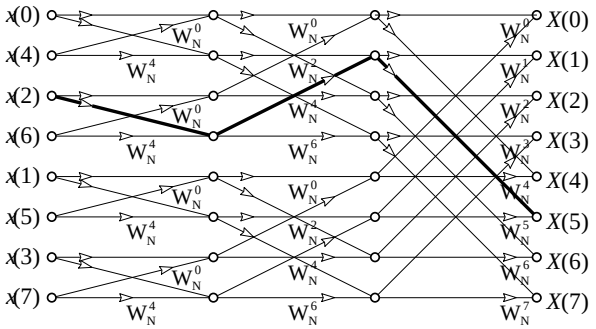
$X(5) = x(0)$



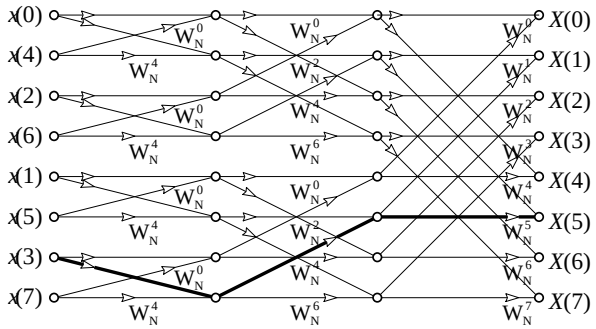
$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5$



$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2$

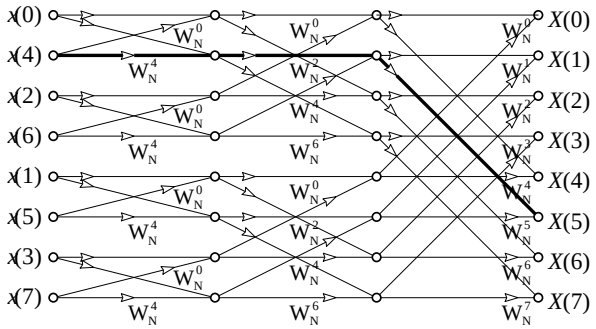


$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7$



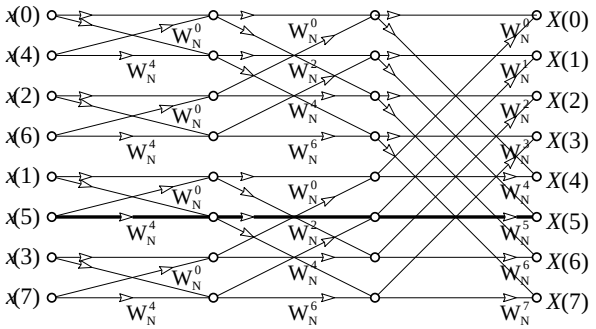
$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7$

$+ x(4)W_8^4$



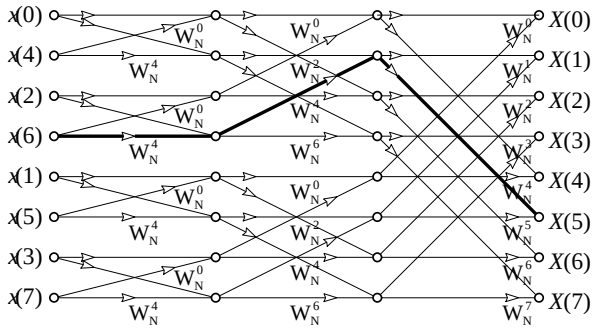
$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7$

$+ x(4)W_8^4 + x(5)W_8^9$ ← W_8^1



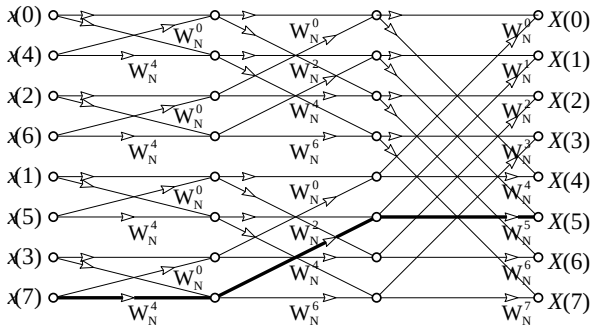
$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7$

$+ x(4)W_8^4 + x(5)W_8^1 + x(6)W_8^6$



$X(5) = x(0) + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^7$

$+ x(4)W_8^4 + x(5)W_8^1 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^{11}$ ← W_8^3

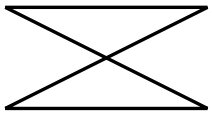


- Da li je to DFT ?
- Da, zbog toga što je

$$X(5) = \sum_{n=0}^{7} x(n) W_8^{n\cdot 5} = x(0)W_8^{0\cdot 5} + x(1)W_8^{1\cdot 5} + x(2)W_8^{10} + x(3)W_8^{15}$$
$$+ x(4)W_8^{20} + x(5)W_8^{25} + x(6)W_8^{30} + x(7)W_8^{35}$$

$$= x(0) + x(1)W_8^{5} + x(2)W_8^{2} + x(3)W_8^{7}$$
$$+ x(4)W_8^{4} + x(5)W_8^{1} + x(6)W_8^{6} + x(7)W_8^{3}$$

- Strukture su pravilne



- Naziv strukture je LEPTIR

- Razmatra se koliki je broj kompleksnih množenja
- Ako je $N=2^j$ broj stupnjeva je $\log_2 \mathbf{N}$
- U svakom stupnju je N kompleksnih množenja i zbrajanja

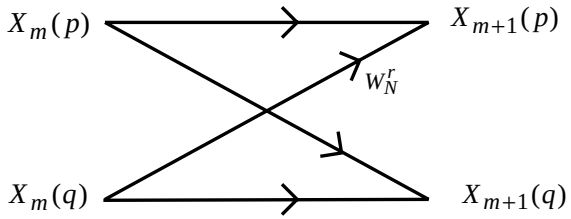
- Broj množenja je $\mathbf{N\log_2 N}$

- Uvidom u dijagram vidi se poredak nizova

0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

bit reversed algoritam

- Dodatno smanjenje broja operacija



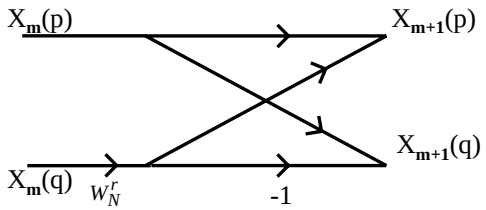
$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q)$$

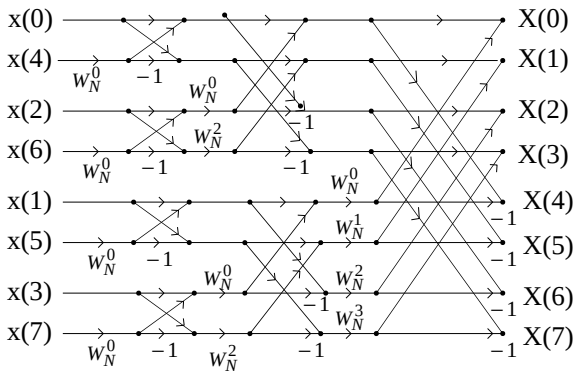
$$W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$$

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^r X_m(q)$$



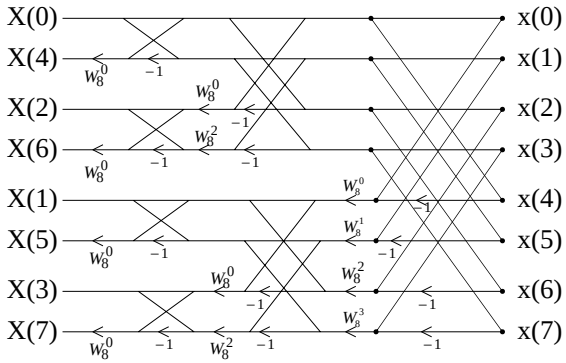
- Graf (FFT) se može nacrtati kao



◆ Broj množenja je $\frac{N}{2}\log_2 N$

Broj točaka	Broj množenja	FFT	Faktor smanjenja
N	N^2	$(N/2)\log_2 N$	broja operacija
4	16	4	4
8	64	12	5,3
16	256	32	8,0
32	1024	80	12,8
64	4096	192	21,3
128	16384	448	36,6
256	65536	1024	64
512	262144	2304	113,8
1024	1048576	5120	204,8

Decimacija u freq. domeni



Korištenje svojstava DFT-a u daljnjem povećanju efikasnosti FFT-a

Još jedno važno svojstvo DFT-a

◆ $x_p(k)$ je realan i periodičan niz perioda N

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X_p(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n}$$

$$X_p(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\mathrm{Re}[X_p(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn$$

$$\mathrm{Im}[X_p(k)] = -\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn$$

$$\mathrm{Re}[X_p(N-k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn$$

$$\mathrm{Im}[X_p(N-k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn$$

dobivamo:

$$\mathrm{Re}[X_p(k)] = \mathrm{Re}[X_p(N-k)]$$

$$\mathrm{Im}[X_p(k)] = -\mathrm{Im}[X_p(N-k)]$$

DFT dvaju realnih nizova uz pomoć kompleksne DFT - RE2FFT

◆ $x(n)$ i $y(n)$ su dva nezavisna realna i periodična niza

◆ treba naći $X(k)$ i $Y(k)$

◆ stvaramo kompleksni niz $z(n) = x(n) + jy(n)$

◆ radimo DFT niza $z(n) = x(n) + jy(n)$:

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n) + jy(n)]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}[x(n) + jy(n)]\left[\cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn\right] =$$

$$Z(k) = \overbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn}^{\mathrm{Re}[X(k)]} + \overbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn}^{-\mathrm{Im}[Y(k)]} +$$

$$+ j\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cos\frac{2\pi}{N}kn}_{\mathrm{Re}[Y(k)]} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi}{N}kn}_{\mathrm{Im}[X(k)]}\right]$$

- dobivamo 4 jednadžbe :

1 $\mathrm{Re}[Z(k)] = \mathrm{Re}[X(k)] - \mathrm{Im}[Y(k)]$

2 $\mathrm{Im}[Z(k)] = \mathrm{Re}[Y(k)] + \mathrm{Im}[X(k)]$

3 $\mathrm{Re}[Z(N-k)] = \mathrm{Re}[X(N-k)] - \mathrm{Im}[Y(N-k)]$

4 $\mathrm{Im}[Z(N-k)] = \mathrm{Re}[X(N-k)] + \mathrm{Im}[Y(N-k)]$

- iz njih slijede konačne četiri jednadžbe koje definiraju nizove $X(k)$ i $Y(k)$:

$\boxed{1+3}$ $$\mathrm{Re}[X(k)] = \frac{1}{2}\{\mathrm{Re}[Z(k)] + \mathrm{Re}[Z(N-k)]\}$$

$\boxed{3-1}$ $$\mathrm{Im}[Y(k)] = \frac{1}{2}\{\mathrm{Re}[Z(N-k)] - \mathrm{Re}[Z(k)]\}$$

$\boxed{2+4}$ $$\mathrm{Re}[Y(k)] = \frac{1}{2}\{\mathrm{Im}[Z(k)] + \mathrm{Im}[Z(N-k)]\}$$

$\boxed{2-4}$ $$\mathrm{Im}[X(k)] = \frac{1}{2}\{\mathrm{Im}[Z(k)] - \mathrm{Im}[Z(N-k)]\}$$

Zaključujemo:

- **jednom** DFT duljine N moguće je istovremeno transformirati **dva** realna niza duljine N
- slijedi da je moguće transformirati jedan realni niz duljine $2N$ uz pomoć DFT-a duljine N

REDFFT - transformacija realnog niza v(k) dužine 2N pomoću FFT dužine N

- zadan je niz $v(n)$ duljine $2N$
- definiramo dva niza $x(n)$ te $y(n)$ tako da je $x(n) = v(2n)$ $\quad y(n) = v(2n+1)$

$$V(k) = DFT_{2N}\{v(n)\} = \sum_{i=0}^{2N-1} v(i) W_{2N}^{ki}$$

$$V(k) = \sum_{i=0,2,4\ldots} v(i) W_{2N}^{ki} + \sum_{i=1,3,5\ldots} v(i) W_{2N}^{ki}$$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{2N}^{2kn} + \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{2N}^{(2n+1)k}$$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{2N}^{2kn} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{2N}^{2nk}$$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(2n) W_{N}^{kn} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} v(2n+1) W_{N}^{nk}$$

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{N}^{kn} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_{N}^{nk}$$

dobivamo:

$$V(k) = X(k) + W_{2N}^{k} Y(k)$$

Da ponovimo:

- niz $v(n)$ duljine $2N$ razbijemo u dva realna niza $x(n)$ te $y(n)$ duljine N
- na ta dva niza primijenimo RE2FFT i dobijemo $X(k)$ te $Y(k)$
- da bismo dobili konačnu transformaciju početnoga niza $v(k)$ primjenjujemo formulu:

$$V(k) = X(k) + W_{2N}^{k} Y(k)$$

Kompleksnost algoritma:

- broj kompleksnih množenja za realni niz :
  - korištenjem DFT-a iznosi N^2
  - korištenjem FFT-a iznosi $(N/2)\log_2 N$
  - korištenjem REDFFT-a iznosi $(N/4)\log_2(N/2) + N/2$

Primjena FFT algoritma u linearnom filtriranju

- važna primjena u filtriranju dugih nizova
- zamislimo niz $u(n)$ duljine L na ulazu FIR filtra impulsnog odziva duljine M.

$u(n) = 0 \quad n < 0 \;\&\; n \geq L$

$h(n) = 0 \quad n < 0 \;\&\; n \geq M$

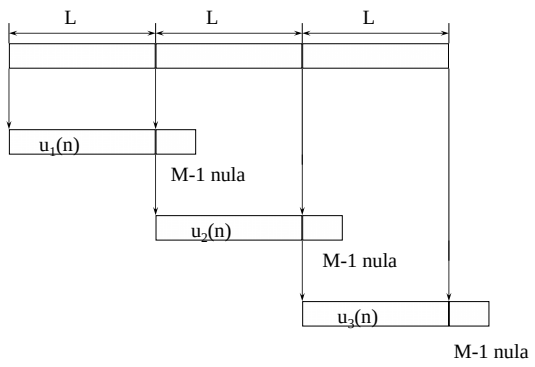
- odziv filtra je dan konvolucijskom sumacijom:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)u(n-m)$$

- $y(n)$ je duljine $L+M-1$
- za određivanje $y(n)$ dovoljan je DFT duljine $N \geq L+M-1$

$$Y(k) = H(k) \cdot U(k)$$

- $h(n)$ i $u(n)$ moraju se do duljine N produljiti odgovarajućim brojem nula
- koristit će se overlap-add metoda



- duljina ulaznog bloka je L uzoraka
- dužina DFT-a i IDFT-a je N=L+M-1
- svakom bloku dodajemo M-1 nula i izračunamo N točaka DFT-a

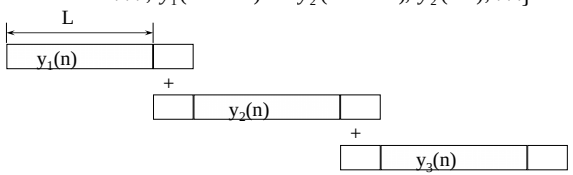
$$u_1(n) = \{u(0), u(1), \ldots, u(L-1), 0, 0, \ldots 0\}$$

$$u_2(n) = \{u(L), u(L+1), \ldots, u(2L-1), 0, 0, \ldots 0\}$$

$$u_3(n) = \{u(2L), u(2L+1), \ldots, u(3L-1), \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{M\ -\ 1 \text{ nula}}\}$$

- $Y_m(k)=H(k)U_m(k)$ k=0,1,…,N-1
- dobivamo izlazne blokove duljine N u kojima nema aliasinga jer su dužine DFT-a (i IDFT-a) N=L+M-1
- na kraju je potrebno izvršiti <u>preklapanje</u> posljednjih M-1 uzoraka svakog izlaznog bloka sa prvih M-1 uzoraka slijedećeg bloka

$$y(n) = \{y_1(0), y_1(1) \ldots, y_1(L-1),$$
$$, y_1(L) + y_2(0), y_1(L+1) + y_2(1), \ldots$$
$$\ldots, y_1(N-1) + y_2(M-1), y_2(M), \ldots\}$$



Diskusija uporabe FFT-a

- da bi primijenili FFT uz bazu 2 moramo podesiti duljinu ulaznog bloka L tako da N (N=L+M-1) bude potencija broja 2
- potrebno produljiti u(n) i h(n) odgovarajućim brojem nula na N točaka
- transformaciju impulsnog odziva sustava H(k) radi se samo jednom i zatim se izračunatih N točaka pohranjuje u memoriju

- povoljnije je primijeniti FFT algoritam decimacije u frekvenciji pa će uzorci od H(k) i $U_m(k)$ biti u <u>bit-reversed</u> poretku
- pošto je $Y_m(k)=H(k)U_m(k)$ transformacija izlaznog niza će biti također u <u>bit-reversed</u> poretku
- inverzni DFT radimo s algoritmom koji koristi ulazni niz u bit-reversed poretku pa dobivamo y(n) u normalnom poretku
- na kraju vršimo zbrajanje M-1 uzoraka

Kompleksnost algoritma

- H(k) se računa samo jednom pa se može zanemariti
- svaki FFT zahtijeva $(N/2)\log_2 N$ kompleksnih množenja i $N \log_2 N$ zbrajanja
- pošto radimo dva DFT-a (jednom FFT i jednom IDFT) imamo $N \log_2 N$ kompleksnih množenja i $2N \log_2 N$ zbrajanja

- za izračunati $Y_m(k)$ potrebno je još N kompleksnih množenja i N-1 zbrajanja
- omjer broja množenja filtriranja primjenom FFT-a i običnog množenja iznosi:

$$\frac{N \log_2 N + N}{N \cdot M} = \frac{\log_2 N + 1}{M}$$

- npr. za N=1024 i M=128 $\frac{\log_2 1024 + 1}{128} = \frac{11}{128}$
- algoritam se dodatno skraćuje korištenjem dva sukcesivna bloka i primjenom RE2FFT