Višetaktna digitalna obradba signala
Multirate Digital Signal Processing

Višetaktna digitalna obradba signala

- Temeljne operacije za promjenu frekvencije otipkavanja
  - pretikpkavanje - koristi se za povećanje frekvencije otipkavanja za cjelobrojni faktor
  - podotipkavanje – koristi se za smanjenje frekvencije otipkavanja za cjelobrojni faktor

Pretipkavanje – up-sampling

- opis u vremenskoj domeni
  - pretipkavanje, označeno s cjelobrojnim faktorom L, generira izlazni niz čija je frekvencija otipkavanja L puta viša od frekvencije otipkavanja ulaznog signala $x[n]$
  - blok dijagram je

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x_{prt}[n]$$

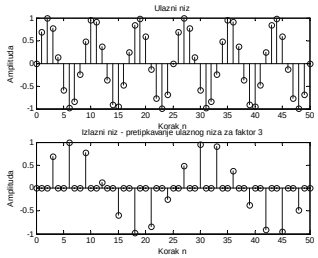
Pretipkavanje

- operacija pretipkavanja realizira se umetanjem L-1 jednoliko razmaknutih uzoraka vrijednosti nula između dva susjedna uzorka $x[n]$
- ulazno izlazna relacija

$$x_{prt}[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0,\ \pm L,\ \pm 2L,\ \cdots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pretipkavanje

- primjer pretipkavanje sinusnog niza frekvencije 0.12 Hz za faktor 3



Pretipkavanje

- u praksi se, u postupku pretipkavanja, uzorci vrijednosti nula zamjenjuju s odgovarajućim uzorcima različitim od nule - *interpolacija* - a što se postiže postupkom filtriranja

Podotipkavanje (*Down-Sampling*)

- opis u vremenskoj domeni
  - podotipkavanjem, označenim s cjelobrojnim faktorom M, generira se izlazni niz čija je frekvencija otipkavanja M puta niža od frekvencije otipkavanja ulaznog signala $x[n]$
  - blok dijagram je

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_{pdt}[n]$$

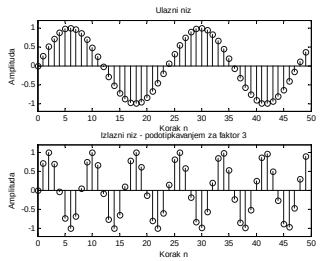
Podotipkavanje

- operacija podotipkavanja realizira se zadržavanjem svakog M-tog uzorka $x[n]$ te uklanjanjem preostalih M-1 uzoraka između njih
- ulazno izlazna relacija

$$x_{pdt}[n] = x[nM]$$

Podotipkavanje

- primjer podotipkavanja sinusnog niza frekvencije 0.12 Hz za faktor 3



Podotipkavanje

- period otipkavanja nije posebno naznačavan u blok dijagramima za operacije podotipkavanja i pretipkavanja
- to je uobičajeni način prikaza višetaktnih sustava no pri tome se mora voditi računa o frekvenciji otipkavanja svakog od podsustava
- eksplicitno se frekvencija otipkavanja naznačuje na slijedeći način:

Podotipkavanje (*Down-Sampling*)

$$x[n]=x_a(nT) \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_{pdt}[n]=x_a(nMT)$$

frekvencija otipkavanja ulaznog niza

$$F_T=\frac{1}{T}$$

frekvencija otipkavanja izlaznog niza

$$F_T'=\frac{F_T}{M}=\frac{1}{T'}$$

Pretipkavanje (*Up-Sampling*)

$$x[n]=x_a(nT) \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow y[n]$$

frekvencija otipkavanja ulaznog niza

$$F_T=\frac{1}{T}$$

frekvencija otipkavanja izlaznog niza

$$F_T'=LF_T=\frac{1}{T'}$$

Značajke blokova za promjenu frekvencije otipkavanja

- blokovi za podotipkavanje odnosno pretipkavanje su linearni ali vremenski promjenljivi vremenski diskretni sustavi
- ovdje ćemo pokazati vremensku varijantnost bloka za podotipkavanje

Značajke blokova za promjenu frekvencije otipkavanja

- neka je M faktor podotipkavanja bloka za podotipkavanje opisanog s $y[n]=x[nM]$
- njegov izlaz $y_1[n]$ na pobudu $x_1[n]=x[n-n_0]$ je

$$y_1[n]=x_1[Mn]=x[Mn-n_0]$$

- iz ulazno izlazne relacije bloka za podotipkavanje

$$y[n-n_0]=x\left[M\left(n-n_0\right)\right]=x[Mn-Mn_0]\neq y_1[n]$$

Pretipkavanje

- opis u frekvencijskoj domeni
- razmotrimo pretipkavanje za faktor 2

$$x_{prt}[n]=\begin{cases} x[n/2], & n=0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pretipkavanje

- primjenom z - transformacije

$$X_{prt}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{prt}[n]z^{-n}=\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ \text{paran}}}^{\infty} x[n/2]z^{-n}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-2m}=X\left(z^2\right)$$

Pretipkavanje

- na sličan način može se pokazati da vrijedi

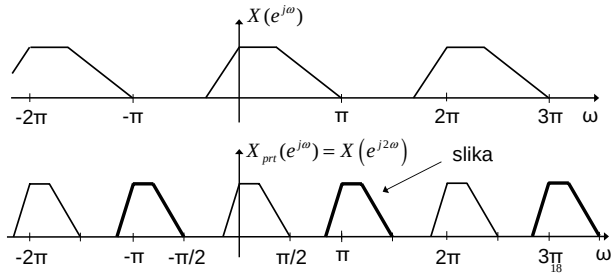
$$X_{prt}(z)=X\left(z^L\right)$$

- isto tako na jediničnoj kružnici, za $z=e^{j\omega}$, vrijedi

$$X_{prt}(e^{j\omega})=X\left(e^{j\omega L}\right)$$

Pretipkavanje

- za L=2 slijedi



Pretipkavanje

- kako je pokazano pretipkavanje (povećanje frekvencije otipkavanja) za faktor L=2 rezultira u kompresiji $X(e^{j\omega})$ za faktor 2 te njegovom dvostrukom ponavljanju u osnovnom intervalu [0, 2π]

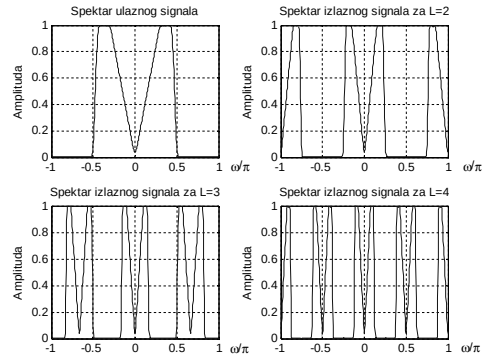
- ovaj proces naziva se zrcaljenje budući da dobivamo dodatnu sliku (odraz) ulaznog spektra

Pretipkavanje

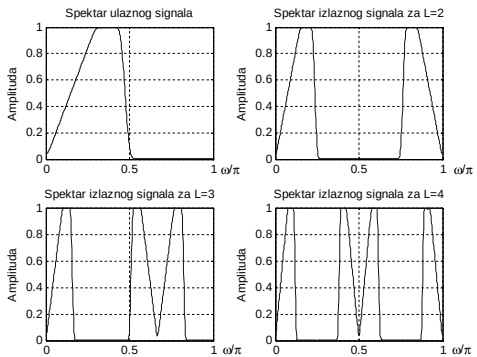
- slično i u slučaju pretipkavanja za faktor L postoji L-1 dodatnih slika ulaznog signala u osnovnom intervalu

- filtriranjem $x_{prt}[n]$ s niskopropusnim filtrom uklanja se L-1 slika što kao efekt ima "upotpunjavanje" uzoraka vrijednosti nula u $x_{prt}[n]$ s interpoliranim vrijednostima uzoraka

Pretipkavanje



Pretipkavanje



Podotipkavanje

- opis u frekvencijskoj domeni
- razmotrimo podotipkavanje za faktor M

$$y[n] = x[Mn]$$

- primjenom z - transformacije

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn] z^{-n}$$

- uvodi se pomoćni niz $x_{pom}[n]$

Podotipkavanje

- $x_{pom}[n]$ se definira kao

$$x_{pom}[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0,\ \pm M,\ \pm 2M,\ \ldots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- tada je

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[Mn] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{pom}[Mn] z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{pom}[k] z^{-k/M} = X_{pom}(z^{1/M})$$

Podotipkavanje

- veza $x_{pom}[n]$ s $x[n]$ se može definirati i kao

$$x_{pom}[n] = c[n] \cdot x[n]$$

- gdje je

$$c[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,\ \pm M,\ \pm 2M,\ \ldots \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Podotipkavanje

- $c[n]$ je pogodno prikazati kao

$$c[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi kn}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn}$$

- pa je

$$x_{pom}[n] = x[n] \cdot c[n] = x[n] \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn}$$

Podotipkavanje

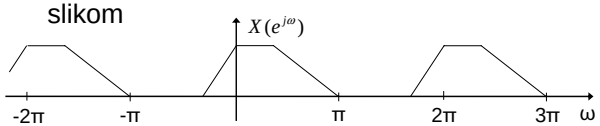
- slijedi

$$X_{pom}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] x[n] z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn} \right) x[n] z^{-n}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] W_M^{kn} z^{-n} \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z W_M^{-k} \right)$$

Podotipkavanje

- razmotrimo podotipkavanje za faktor *M*=2 ulaznog signala *x*[*n*] čije je spektar prikazan slikom



- za *M*=2 iz

$$\left.\begin{aligned} Y(z) &= X_{pom}(z^{1/M}) \\ X_{pom}(z) &= \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(zW_M^{-k}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Podotipkavanje

$$X_{pom}(z) = \frac{1}{2}\left\{X(z) + X\left(zW_2^{-1}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{X(z) + X(-z)\right\}$$

i iz $Y(z) = X_{pom}(z^{1/2})$

slijedi $Y(z) = \frac{1}{2}\left\{X\left(z^{1/2}\right) + X\left(-z^{1/2}\right)\right\}$

pa je $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega/2}\right) + X\left(-e^{j\omega/2}\right)\right\}$

Podotipkavanje

$$Y(z) = \frac{1}{2}\left\{X\left(z^{1/2}\right) + X\left(-z^{1/2}\right)\right\}$$

pa je $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega/2}\right) + X\left(-e^{j\omega/2}\right)\right\}$

Podotipkavanje

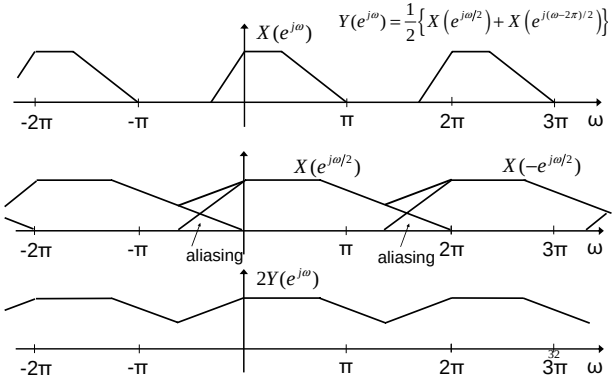
- iz $X\left(-e^{j\omega/2}\right) = X\left(e^{j(\omega-2\pi)/2}\right)$

slijed
i

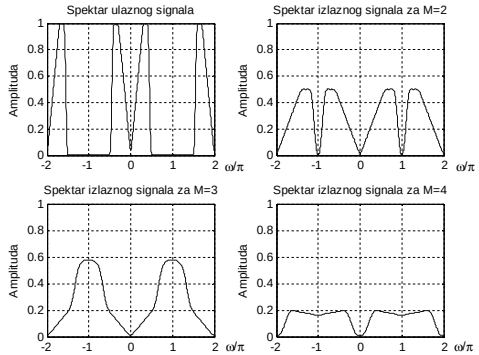
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{X\left(e^{j\omega/2}\right) + X\left(e^{j(\omega-2\pi)/2}\right)\right\}$$

dakle, drugi član je dobiven pomakom prvog člana za 2π na desno

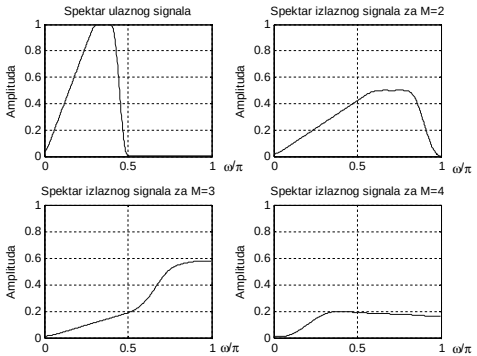
Podotipkavanje



Podotipkavanje



Podotipkavanje

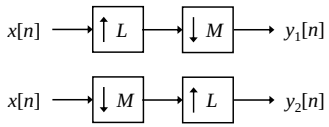


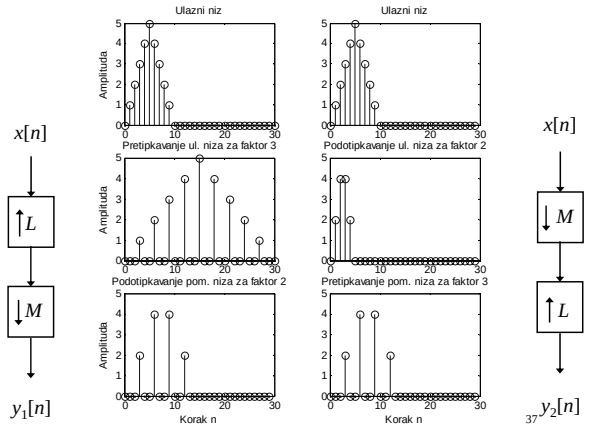
Ekvivalencije kaskadnih spojeva

- složeni višetaktni sustavi grade se spajanjem komponenti za podotipkavanje i pretipkavanje te komponenti koje predstavljaju vremenski stalne digitalne filtre
- u mnogim primjenama koristi se kaskadni spoj
- zamjenom redoslijeda komponenti u kaskadnom spoju često se dolazi do numerički efikasnijih realizacija

Ekvivalencije kaskadnih spojeva

- da bi se realizirala necjelobrojna promjena takta koristi se kaskada blokova za podotipkavanje i pretipkavanje
- dva su moguća kaskadna spoja





Ekvivalencije kaskadnih spojeva

- redoslijed bloka za podotipkavanje s faktorom *M* i bloka za pretipkavanjem s faktorom *L* u kaskadnom spoju je slobodan, dakle, vrijedi $y_1[n] = y_2[n]$

onda i samo onda ako *M* i *L* nemaju zajednički faktor koje je cjelobrojan i veći od jedan

Filtri u višetaktnoj obradbi signala

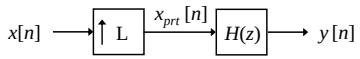
- ako spektar kritično otipkanog signala zauzima cijelo Nyquist-ovo područje daljnja redukcija frekvencije otipkavanja nije moguća zbog pojave aliasinga
- prema tome, frekvencijsko područje kritično otipkanog signala mora, prije podotipkavanja, biti reducirano niskopropusnim digitalnim filtrom

Filtri u višetaktnoj obradbi signala

- isto tako uzorci vrijednosti nula generirani postupkom pretipkavanja trebaju biti interpolirani s odgovarajućim vrijednostima za primijenjeno povećanje frekvencije otipkavanja
- pokazuje se da se ova interpolacija jednostavno postiže filtriranjem niskopropusnim digitalnim filtrom

Zahtjevi na filtar

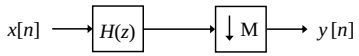
- postupkom pretipkavanja periodički se ponavlja temeljni spektar signala i neželjene slike u spektru pretipkanog signala $x_{prt}[n]$ trebaju biti uklonjene primjenom niskopropusnog filtra $H(z)$ – inetrpolacijskog filtra



- gornji sustav se naziva interpolator

Zahtjevi na filtar

- s druge strane, prije postupka podotipkavanja, ulazni signal treba frekvencijski primjenom niskopropusnog digitalnog filtra ograničiti na područje γ/T
- tako primijenjeni niskopropusni filtar se tada naziva decimacijski filtar



- gornji sustav se naziva decimator

Zahtjevi na interpolacijski filtar

- pretpostavimo da je $x[n]$ rezultat otipkavanje vremenski kontinuiranog signala $x_a(t)$ s maksimalnom frekvencijom otipkavanja koja zadovoljava teorem otipkavanja
- neka su $X_a(j\Omega)$ i $X(e^{j\omega})$ Fourierove transformacije gornjih signala i možemo pisati

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\omega - j2\pi k}{T_0}\right)$$

T_0 je period otipkavanja

Zahtjevi na interpolacijski filtar

- budući je signal otipkan frekvencijom otipkavanja koja zadovoljava teorem opitpkvanja ne postoji preklapanje između pomaknutih spektara $X(j\omega/T_0)$
- ako se signal $x_a(t)$ otipka s puno višom frekvencijom otipkavanja $T=T_0/L$ dobivamo signal $y[n]$ čija Fourierova transformacija $Y(e^{j\omega})$ je vezana s $X_a(j\Omega)$ na slijedeći način

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\omega - j2\pi k}{T}\right) = \frac{L}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\omega - j2\pi k}{T_o / L}\right)$$

Zahtjevi na interpolacijski filtar

- s druge strane ako se signal $x[n]$ pretipka s faktorom *L* generira se signal $x_{prt}[n]$ pri čemu je odnos njihovih spektara dan s

$$X_{prt}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

- iz toga slijedi kako će $x_{prt}[n]$ propušten kroz idealni niskopropusni filtar $H(z)$ s graničnom frekvencijom na π/L i pojačanjem *L* biti identičan $y[n]$

Zahtjevi na interpolacijski filtar

- uporabom realnih filtara (tako osiguravamo ostvarivost i stabilnost), potrebno je uzeti u obzir prijelazno područje filtra
- željeni niskopropusni filtar treba stoga imati graničnu frekvenciju pojasa gušenja $\omega_s = \pi/L$ i graničnu frekvenciju pojasa propuštanja ω_p što je moguće bližu ω_s kako bi se reducirala distorzija spektra $x[n]$

Zahtjevi na interpolacijski filtar

- ako je ω_c najviša frekvencija u $x[n]$ koja treba biti očuvana tada je

$$\omega_p = \omega_c / L$$

- zaključno: specifikacije na niskopropusni interpolacijski filtar su prema tome

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} L, & |\omega| \le \omega_c / L \\ 0, & \pi / L \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Zahtjevi na decimacijski filtar

- na sličan način definiraju se specifikacije za niskopropusni decimacijski filtar

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c / M \\ 0, & \pi / M \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

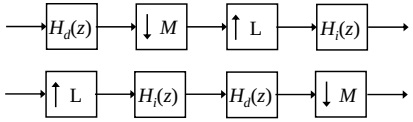
- niskopropusni decimacijski i interpolacijski filtri mogu biti IIR ili FIR filtri i projektiraju su uobičajenim postupcima

Filtri za necjelobrojnu promjenu takta

- necjelobrojna promjena takta postiže se kaskadnim spojem decimatora za faktor M i interpolatora za faktor L, pri čemu su M i L cijeli brojevi
- ovakva kaskada ekvivalentna je decimatoru s decimacijskim faktorom M/L ili interpolatoru s interpolacijskim faktorom L/M

Filtri za necjelobrojnu promjenu takta

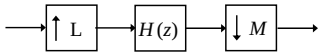
- dva su moguća kaskadna spoja



- drugi spoj je efikasniji u realizaciji jer je dovoljan samo jedan od filtara $H_i(z)$ ili $H_d(z)$ koji može poslužiti i kao interpolacijski i decimacijski filtar

Filtri za necjelobrojnu promjenu takta

- željena konfiguracija za necjelobrojnu promjenu takta je prema tome



pri čemu je granična frekvencija pojasa gušenja niskopropusnog filtra $H(z)$ dana s

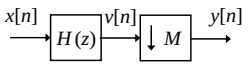
$$\omega_s = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right)$$

Zahtjevi na broj operacija

- već je kazano decimacijski ili interpolacijski filtri mogu biti realizirani ili kao FIR ili IIR filtri
- u slučaju jednotaktne obradbe signala IIR filtri su u principu pogodniji od FIR filtara u pogledu broja potrebnih operacija pa time i efikasniji u primjeni
- tomu nije tako u slučaju višetaktne obrade signala

Zahtjevi na broj operacija

- razmotrimo decimator za faktor M



- ako je decimacijski filtar $H(z)$ FIR filtar duljine N u direktnoj realizaciji tada vrijedi

$$v[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m]$$

Zahtjevi na broj operacija

- kako blok za podotipkavanje zadržava samo svaki M – ti uzorak dovoljno je u izračunavanju $v[n]$ izračunavati samo uzorke od n koji su višekratnici od M dok se izračunavanja za preostale uzorke mogu jednostavno preskočiti
- ovo vodi za uštedama u izračunavanju za faktor M

Zahtjevi na broj operacija

- neka je $H(z)$ IIR filtar reda K s prijenosnom funkcijom

$$\frac{V(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

gdje su

$$B(z) = \sum_{n=0}^{K} b_n z^{-n}$$

$$A(z) = 1 + \sum_{n=1}^{K} a_n z^{-n}$$

Zahtjevi na broj operacija

- direktna realizacija ovog filtra opisuje se s

$$w[n] = -a_1 w[n-1] - a_2 w[n-2] - \cdots$$
$$\ldots\ldots - a_K w[n-K] + x[n]$$
$$v[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + \cdots + b_K w[n-K]$$

- kako se $v[n]$ podotipkava s faktorom M dovoljno je izračunavati $v[n]$ samo za vrijednosti n koje su cjelobrojni višekratnik od M

Zahtjevi na broj operacija

- međutim, varijable stanje $w[n]$ moraju biti izračunavane za svaki n
- tako, na primjer, u izračunavanju

$$v[M] = b_0 w[M] + b_1 w[M-1] + \cdots + b_K w[M-K]$$

još uvijek je nužno izračunati svih K+1vrijednosti $w[n]$

- sukladno tome ušteda u broju operacija će svakako biti manja od faktora M

Zahtjevi na broj operacija

- primjer – kompariramo broj računskih operacija za različite realizacije decimatora za faktor M
- neka je frekvencija otipkavanja F_T
- uspoređujemo broj množenja po sekundi, R_M, za različite načine izvedbe algoritma decimiranja

Zahtjevi na broj operacija

- FIR $H(z)$ duljine N: $\mathrm{R}_{M,FIR} = N \times F_T$
- FIR $H(z)$ duljine N u kaskadi s blokom za podotipkavanje: $\mathrm{R}_{M,FIR+DEC} = N \times F_T / M$
- IIR $H(z)$ reda K: $\mathrm{R}_{M,IIR} = (2K+1) \times F_T$
- IIR $H(z)$ reda K u kaskadi s blokom za podotipkavanje:

$$\mathrm{R}_{M,IIR+DEC} = K \times F_T + (K+1) \times F_T / M$$

Zahtjevi na broj operacija

- u slučaju FIR filtara ušteda u broju množenja je faktor M
- u slučaju IIR filtara ušteda u broju množenja je za faktor $M(2K+1)/[(M+1)K+1]$ što nije značajno za velike K
- za M=10 i K=9 ušteda je samo za faktor 1,9
- dakako, postoje izvjesni slučajevi kada će se primjena IIR filtara pokazati efikasnijom

Zahtjevi na broj operacija

- slična argumentacija vrijedi u razmatranju filtara za interpolaciju
- ako je $H(z)$ FIR interpolacijski filtar tada je ušteda u broju računskih operacija za faktor L (budući je $v[n]$ ima L-1 nula između uzoraka različitih od nula)
- i ovdje se pokazuje da su za IIR filtre moguće uštede u broju operacije znatno manje

Promjena takta korištenjem MATLAB-a

- funkcija ***decimate*** koristi se za redukciju frekvencije otipkavanja vektora ulaznog signala x za cjelobrojni faktor M
- primjer programa za decimaciju niza za faktor M
- primjenjuje se oblik funkcije
  y = decimate(x,M,'fir')

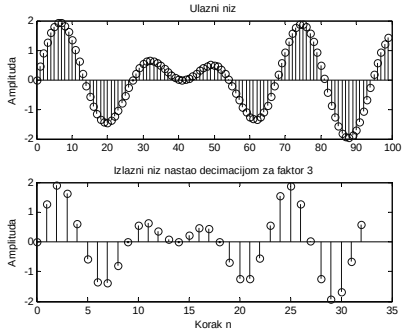
Promjena takta korištenjem MATLAB-a

- ovaj oblik funkcije decimate podrazumijeva
  - podotipkavanje za faktor M
  - primjenu niskopropusnog FIR filtra projektiranog uz pomoć MATLAB funkcije FIR1(30,1/M) – 30 uzoraka filtra i granična frekvencija 1/M koja ako nije drukčije naznačeno koristi Hamming-ov otvor

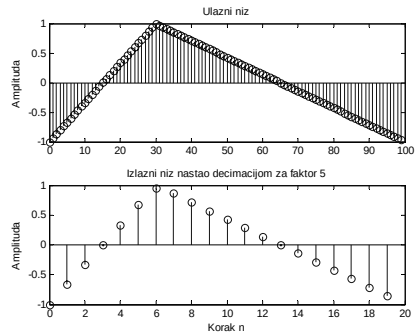
Promjena takta korištenjem MATLAB-a

```
% Program Primjer_6
% Ilustracija postupka decimacije
clf;
M = input('Faktor decimacije = ');
n = 0:99;
x = sin(2*pi*0.043*n)+ sin(2*pi*0.031*n);
y = decimate(x,M,'fir');
subplot(2,1,1);
stem(n,x(1:100));
title('Ulazni niz');ylabel('Amplituda');
subplot(2,1,2);
m = 0:(100/M)-1;
stem(m,y(1:100/M));
title('Izlazni niz nastao decimacijom za
faktor M');
xlabel('Korak n');ylabel('Amplituda');
```


Promjena takta korištenjem MATLAB-a



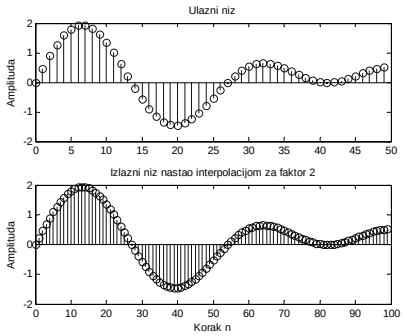
Promjena takta korištenjem MATLAB-a

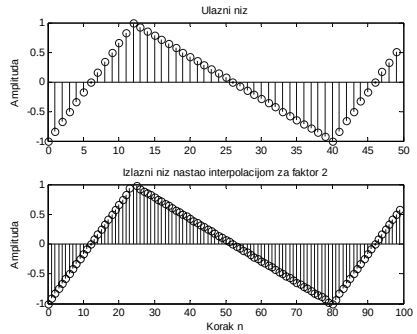


Promjena takta korištenjem MATLAB-a

- funkcija ***interp*** koristi se za povećanje frekvencije otipkavanja vektora ulaznog signala x za cjelobrojni faktor *L*
- primjer programa za interpolaciju niza za faktor *L*

Promjena takta korištenjem MATLAB-a



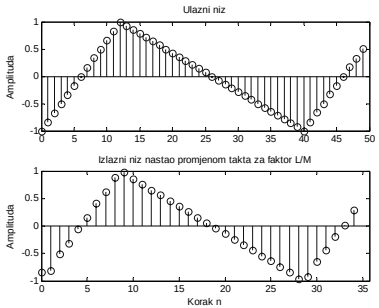


Promjena takta korištenjem MATLAB-a

- funkcija ***resample*** koristi se za promjenu frekvencije otipkavanja vektora ulaznog signala x za faktor *L/M*
- kao filtar koristi se FIR filtar projektiran korištenje fir1 s Kaiserovim otvorom

Promjena takta korištenjem MATLAB-a

L/M=5/7



Promjena takta korištenjem MATLAB-a

```
% Program_8 - Ilustracija promjene takta za
faktor L/M
clf;
L = input('Faktor pretipkavanja = ');
M = input('Faktor podotipkavanja = ');
% Generiranje ulaznog niza
n=0:49;
f=.025;
arg=2*pi*f*n;
x=sawtooth(arg,.3);
% Genreriranje interpoliranog izlaznog niza
y = resample(x,L,M);
% Prikaz ulaznog i izlaznog niza
subplot(2,1,1);
stem(n,x(1:50));
title('Ulazni niz');
ylabel('Amplituda');
subplot(2,1,2);
m = 0:(50*L/M)-1;
stem(m,y(1:50*L/M));axis([0 50*L/M -1 1]);
title('Izlazni niz nastao promjenom takta za
faktor L/M');
xlabel('Korak n'); ylabel('Amplituda');
```