

Digitalna obradba  
signala  
*DOS*

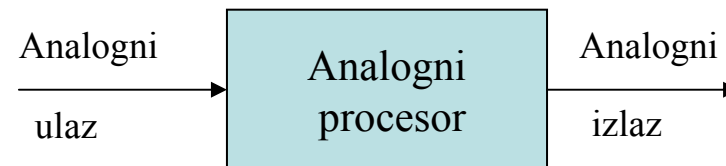
Branko Jeren

# Digitalna obradba signala - DOS

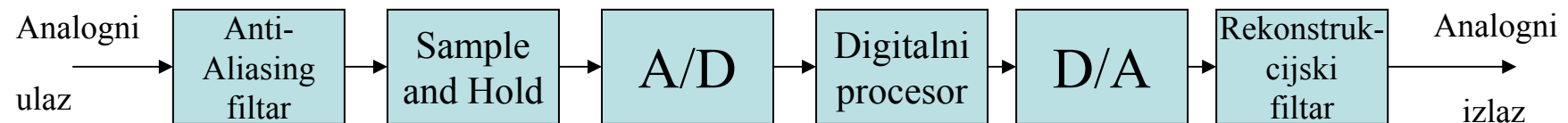
- Počeci digitalne obradbe signala sežu u sedamnaesto stoljeće
  - Numeričke metode integriranja
  - Numeričke metode interpolacije
- Šezdesetih godina, razvojem digitalnih računala, digitalna obradba signala postaje samostalna disciplina i počinje pravi razvoj
  - Tada uglavnom vezana uz simulaciju metoda analogne obradbe signala

# Obradba analognih signala

- Obradba analognih signala
  - pasivnim mrežama
  - aktivnim analognim mrežama



- digitalnim sustavima



# Prednosti DOS (DSP)

- Nepostojanje pomaka (drift-a)  
karakteristika realiziranog sustava
  - parametri sustava su fiksirani tj. definirani su u binarnim koeficijentima pohranjenim u memoriju
  - zato su oni nezavisni od okoliša i parametara kao što su to temperatura, vlažnost itd.
  - starenje elemenata nema utjecaj

# Prednosti DOS (DSP)

- Poboljšana razina kvalitete
  - kvaliteta obradbe limitirana samo ekonomskim parametrima
  - željena kvaliteta postiže se povećanjem broja bita u prikazu podataka/koefficienata
  - povećanje za 1 bit u prikazu rezultata pokazuje 6 dB poboljšanje SNR

# Prednosti DOS (DSP)

- Reproducibilnost
  - tolerancije komponenti ne utječu na karakteristike sustava
  - nepotrebna podešavanja prigodom proizvodnje
  - nepotrebna podešavanja za vrijeme života sustava

# Prednosti DOS (DSP)

- jednostavna implementacija novih i složenih algoritama
- jednostavni razvoj i implementacija adaptivnih, programabilnih filtara, itd.
- realizacija jednim chip-om korištenjem VLSI tehnologije

# Prednosti DOS (DSP)

- Multipleksiranje
  - ista oprema može biti istovremeno korištena od više signala s očiglednim financijskim prednostima za svaku funkciju
- Modularnost
  - koriste se standardni digitalni sklopovi za realizaciju



# Ograničenja DOS (DSP)

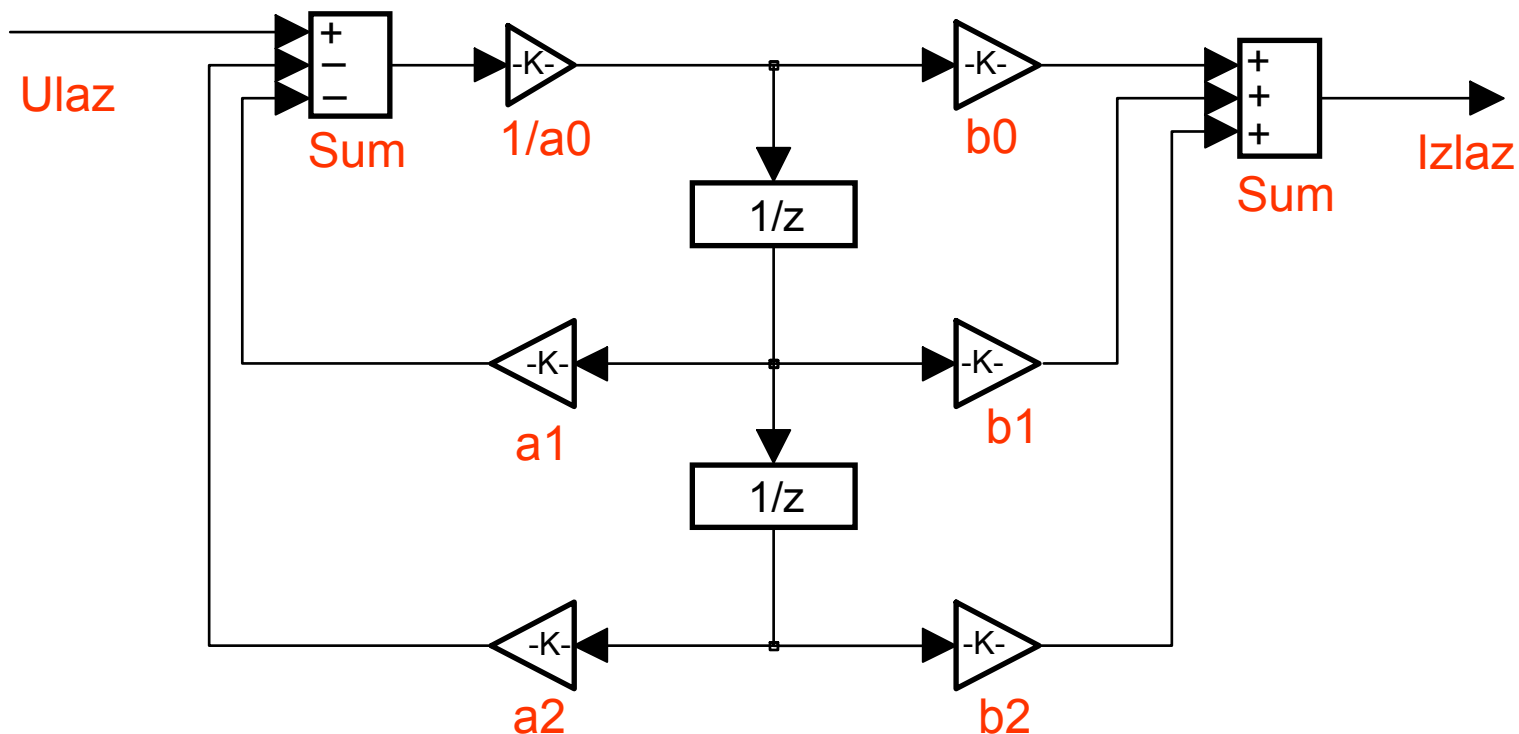
- Niža pouzdanost
  - digitalni sustavi su aktivni uređaji i time koriste više energije i manje su pouzdani
  - moguća kompenzacija pouzdanosti primjenom automatskog nadzora digitalnog sustava

# Ograničenja DOS (DSP)

- Ograničeno frekvencijsko područje
  - tehnološki ograničeno na vrijednosti koje odgovaraju vrijednosti određenoj maksimalnim numeričkim mogućnostima rada u stvarnom vremenu procesora
- Dodatna kompleksnost u obradbi analognih signala
  - A/D and D/A pretvornici povećavaju kompleksnost ukupnog sustava za obradbu

# Uvod u digitalne filtre

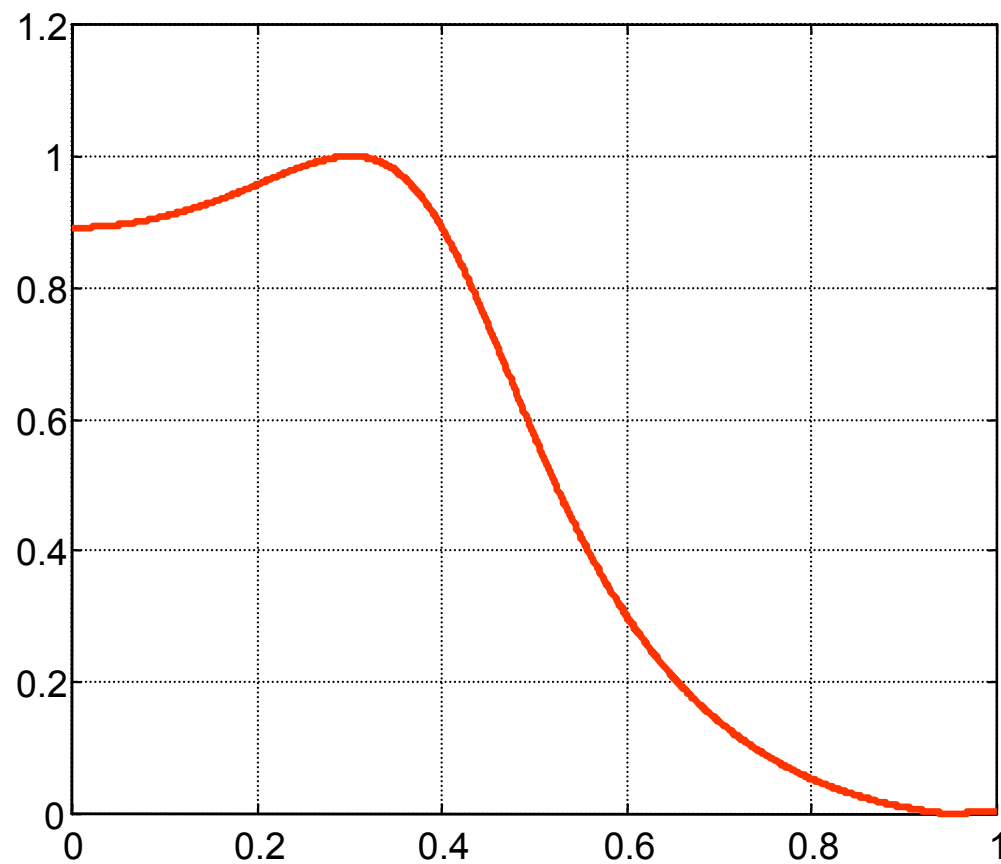
# *Primjer diskretnog sustava drugog reda*



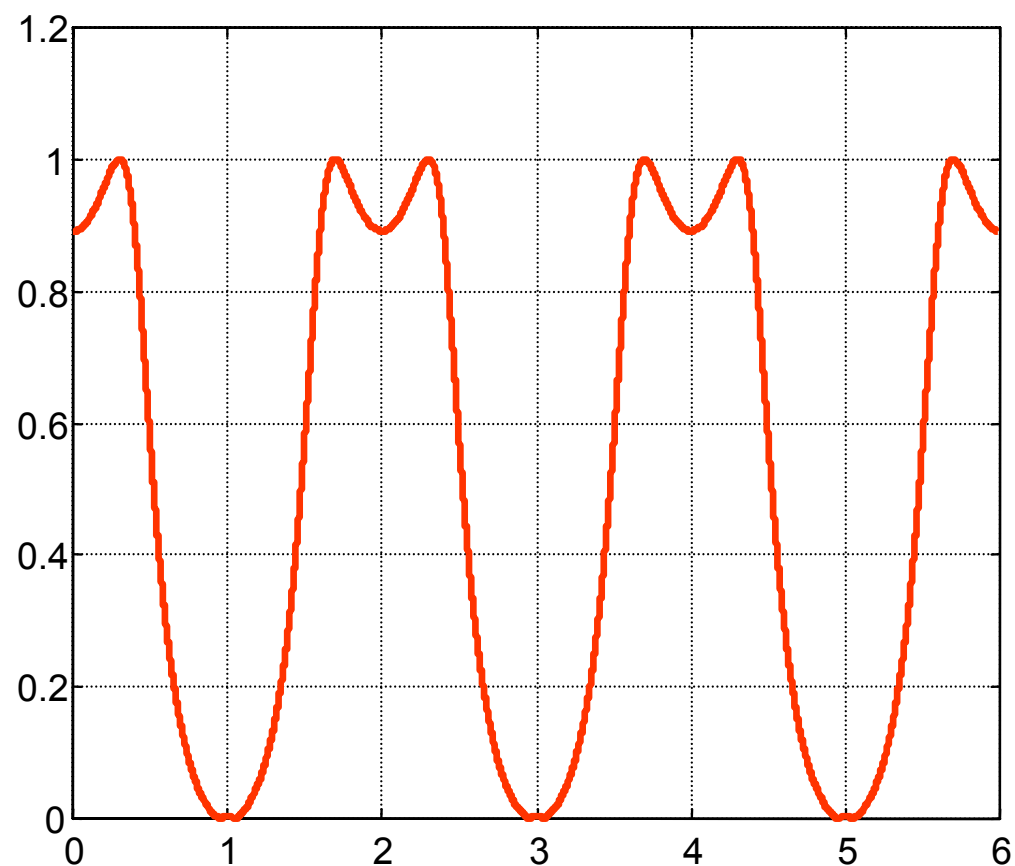
$$H(z) = \frac{0,22 + 0,43 \cdot z^{-1} + 0,22 \cdot z^{-2}}{1 - 0,35 \cdot z^{-1} + 0,33 \cdot z^{-2}}$$

# PRIMJER 1. – *MATLAB* filt.m

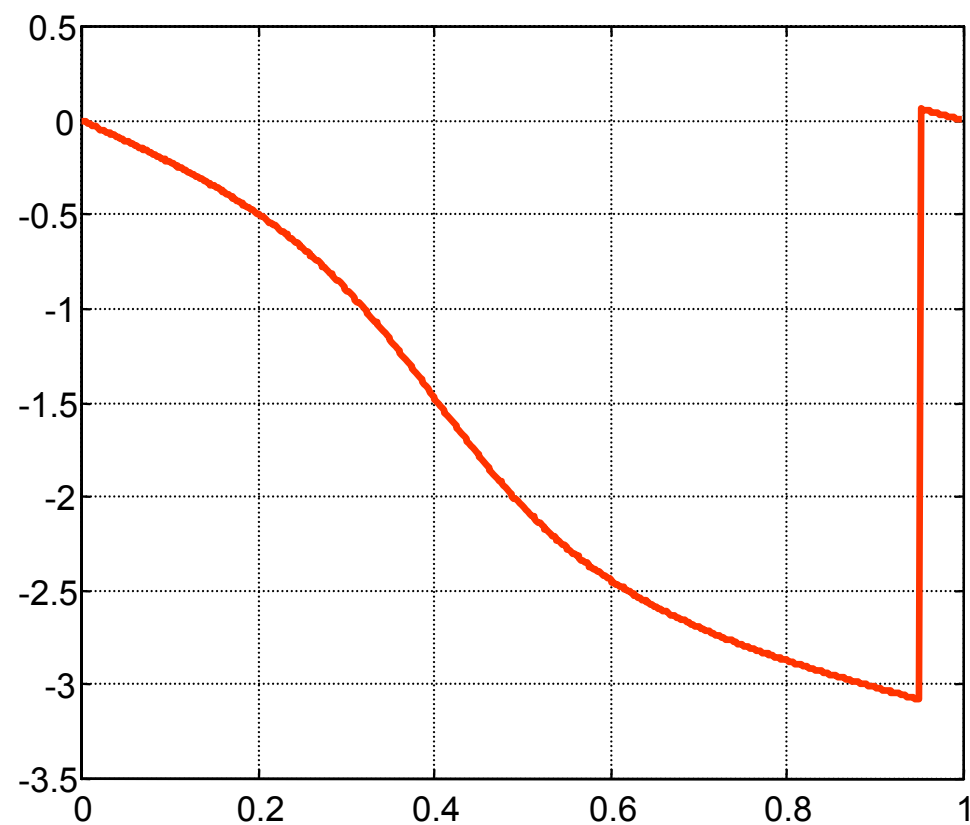
# *Amplitudno-frekvencijska karakteristika sustava*



# Amplitudno-frekvencijska karakteristika sustava ...

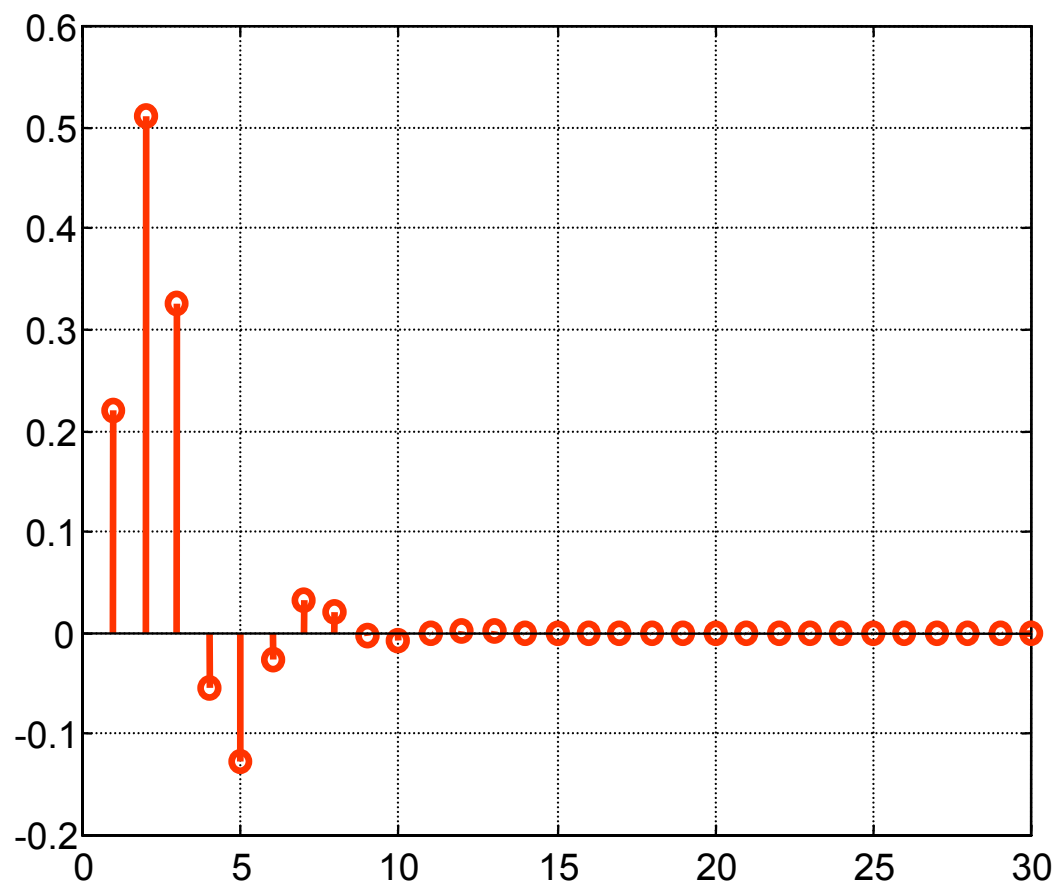


# Fazno-frekvencijska karakteristika sustava





# Impulsni odziv sustava ...

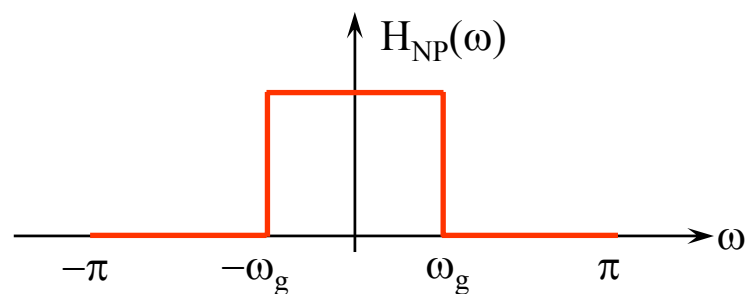


# Idealni filtri

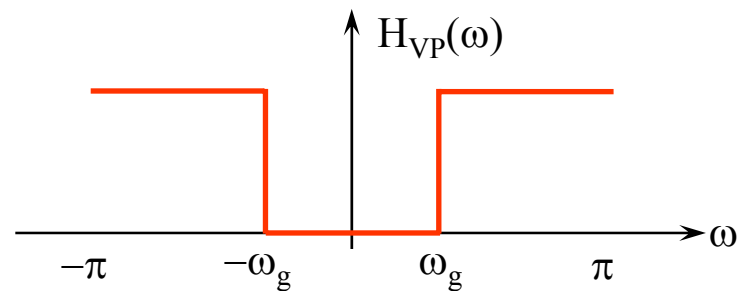
- ◆ Idealni filter propušta komponente signala određenih frekvencija bez distorzije, a komponente na ostalim frekvencijama idealno prigušuje.
- ◆ Prema tome, frekvencijska karakteristika ima vrijednost jednaku jedan ili nula.
- ◆ Područje frekvencija u kojima frekvencijska karakteristika ima vrijednost jedan naziva se **propusni pojas**, a područje frekvencija gdje je frekvencijska karakteristika jednaka nuli je **pojas gušenja**.

# Idealni filtri

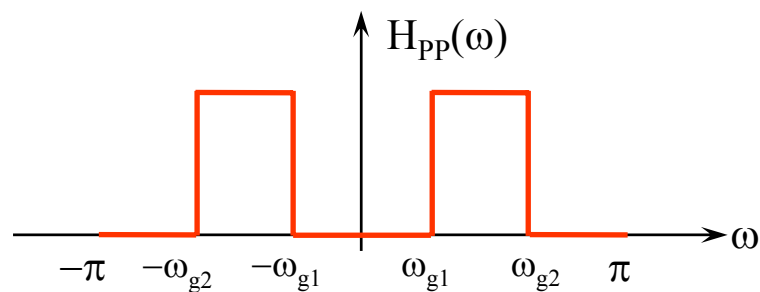
◆ 4 osnovna tipa filtra:



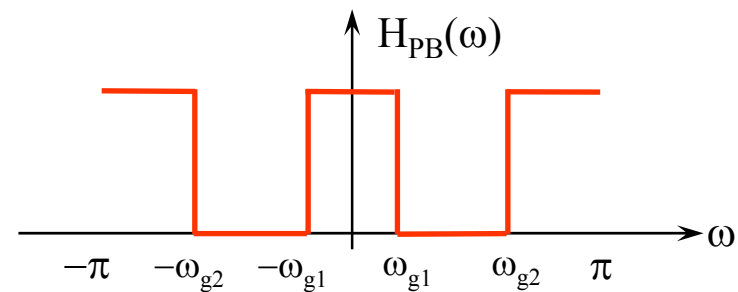
niski propust



visoki propust



pojasni propust

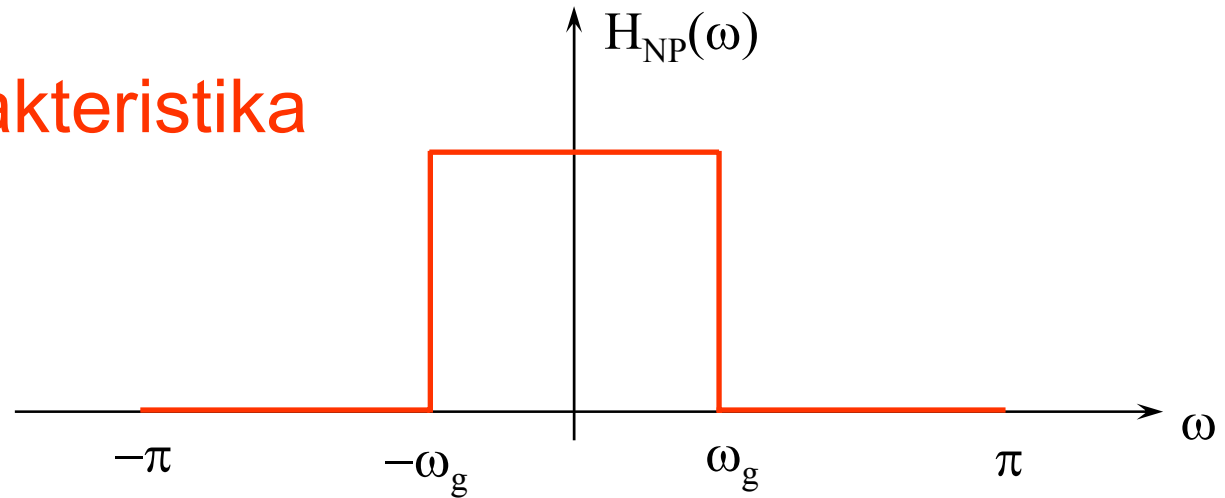


pojasna brana

# Idealni niskopropusni filter

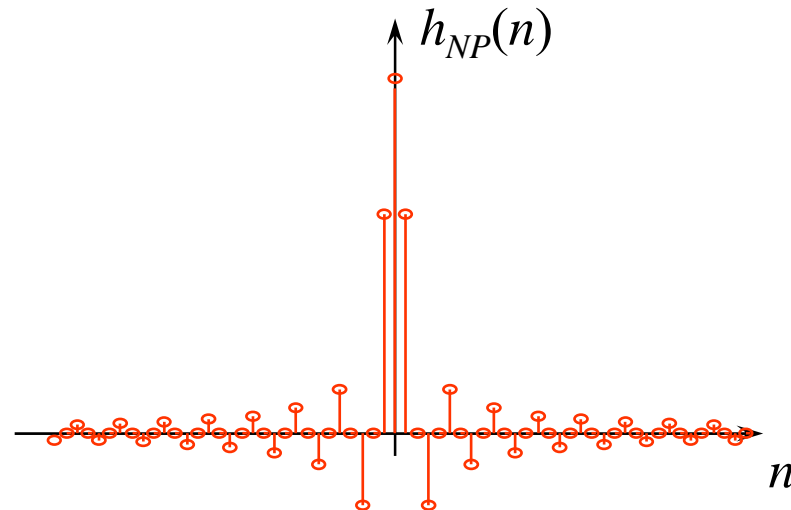
frekvencijska karakteristika

$$H_{NP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases}$$



impulsni odziv

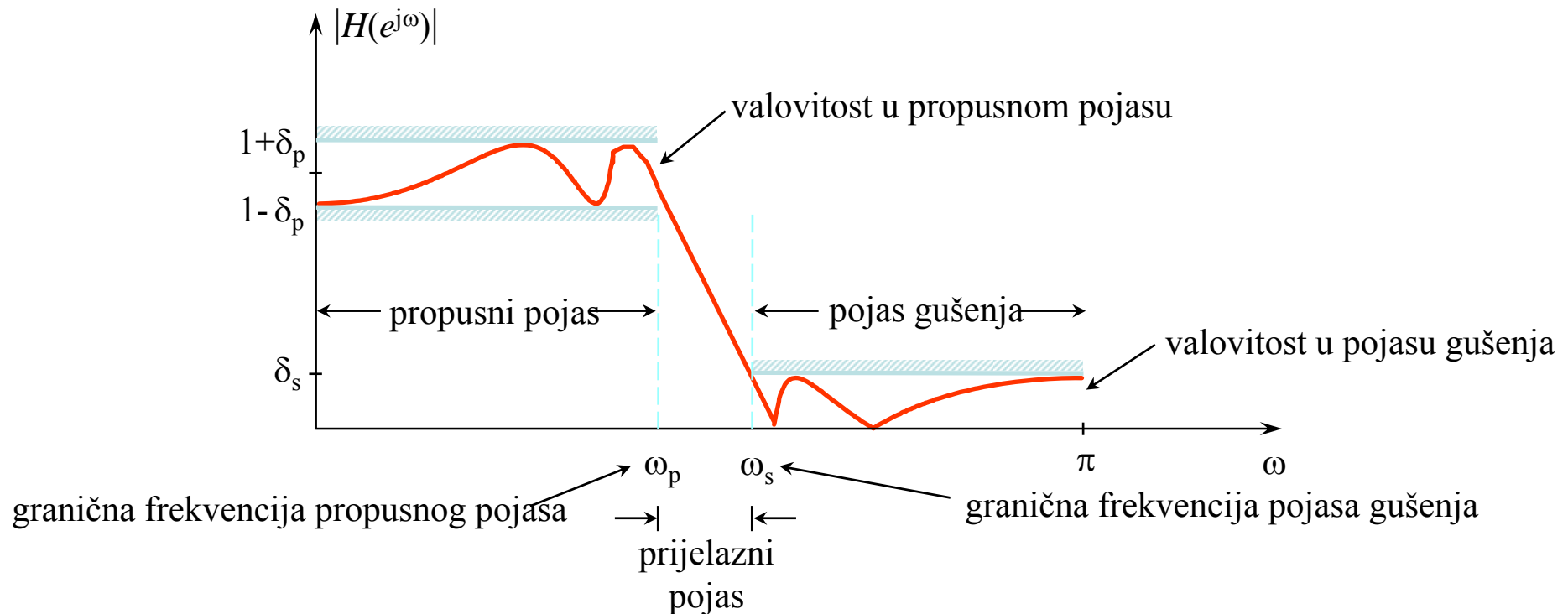
$$h_{NP}[n] = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin n\omega_g}{n\omega_g}$$



# Realni digitalni filtri

- ◆ Idealni filtri imaju nekauzalan odziv i prema tome su neostvarivi.
- ◆ Važan korak pri razvoju digitalnog filtra je određivanje **ostvarive** prijenosne karakteristike  $H(z)$  koja **aproksimira** željenu frekvencijsku karakteristiku.

# Specifikacija karakteristika digitalnog filtra



propusni pojas:  $1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p$  za  $|\omega| \leq \omega_p$

pojas gušenja:  $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_s$  za  $\omega_s \leq |\omega| \leq \pi$

# Specifikacija karakteristika digitalnog filtra

Često se prijenosna karakteristika filtra zadaje u logaritamskom mjerilu:

$$H(\omega) = -20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

Tada je

valovitost u propusnom pojasu

$$\alpha_p = -20 \log_{10}(1 - \delta_p) \text{ dB}$$

minimalno gušenje u pojasu gušenja

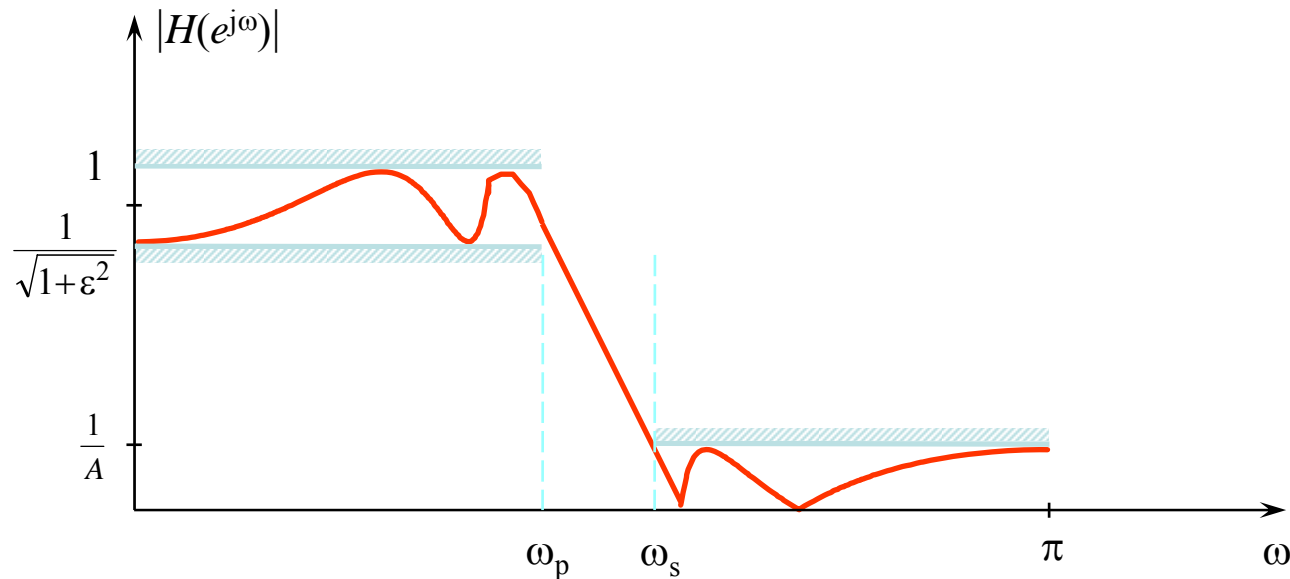
$$\alpha_s = -20 \log_{10}(\delta_s) \text{ dB}$$

Granične frekvencije područja propuštanja i područja gušenja se računaju na slijedeći način:

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{f_T} \quad \text{i} \quad \omega_s = \frac{2\pi f_s}{f_T}$$

gdje je  $f_T$  frekvencija otipkavanja, a  $f_p$  i  $f_s$  su granične frekvencije pojasa propuštanja i pojasa gušenja u Hz.

# Specifikacija digitalnog filtra - alternativno označavanje



Maksimalna vrijednost amplitudne karakteristike je jedan.

Maksimalna devijacija u propusnom pojasu je  $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ , te maksimalno gušenje u propusnom pojasu iznosi  $\alpha_{\max} = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\epsilon^2}\right)$  dB.

Maksimum amplitudne karakteristike u pojasu gušenja je  $1/A$ .



# Kako izračunati prijenosnu funkciju?

%primjer projektiranja eliptickog filtra

n=input('Upiši red filtra N=');

Rp=input('Upiši valovitost u pojasu propustanja Rp=');

Rs=input('Upiši valovitost u pojasu gusenja Rs=');

Wg=input('Upiši granicnu frekvenciju Wg=');

[b,a] = ellip(n,Rp,Rs,Wg);

[q w] = freqz(b,a,1024);

plot(w/pi, 20\*log10(abs(q)));

grid;

pause

plot(w/pi, abs(q));

grid;

za n=2; Rp=1; Rs=50; Wg=.4

b = 0.2197 0.4341 0.2197

a = 1.0000 -0.3507 0.3307

$$H(z) = \frac{0,22 + 0,43 \cdot z^{-1} + 0,22 \cdot z^{-2}}{1 - 0,35 \cdot z^{-1} + 0,33 \cdot z^{-2}}$$

# PRIMJER 2. – *MATLAB* elipticki\_primjer.m

# PRIMJER 3. – *MATLAB* filtdemo

# Prijenosna funkcija (IIR)

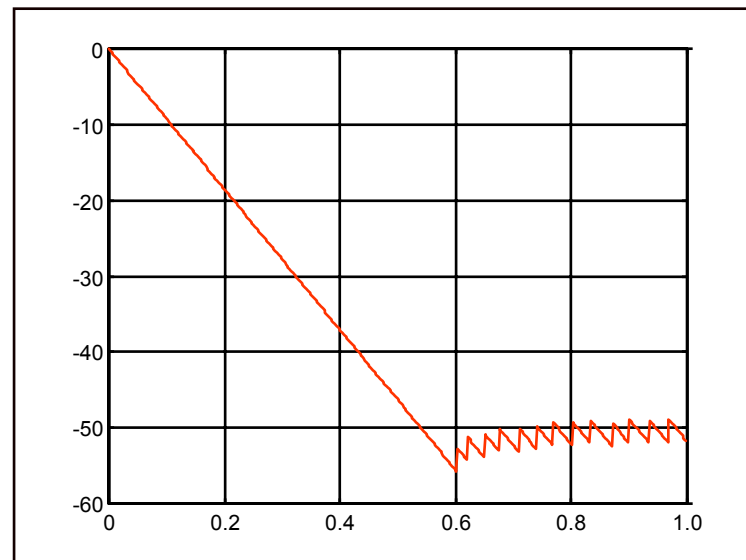
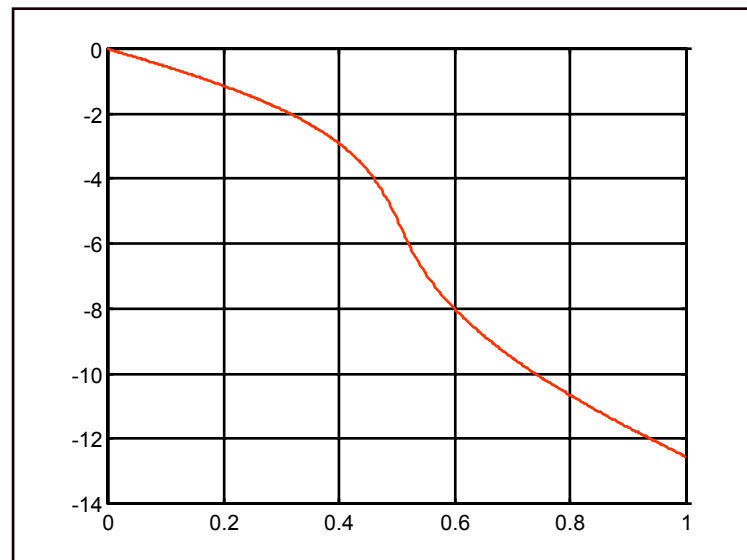
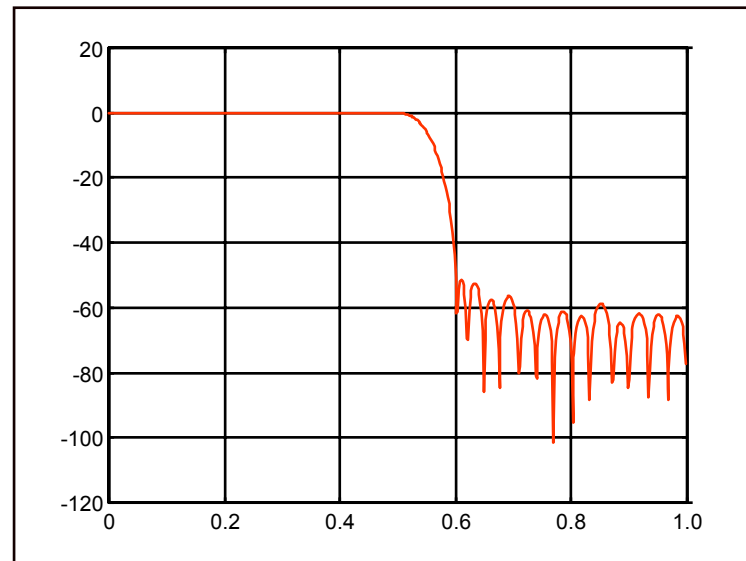
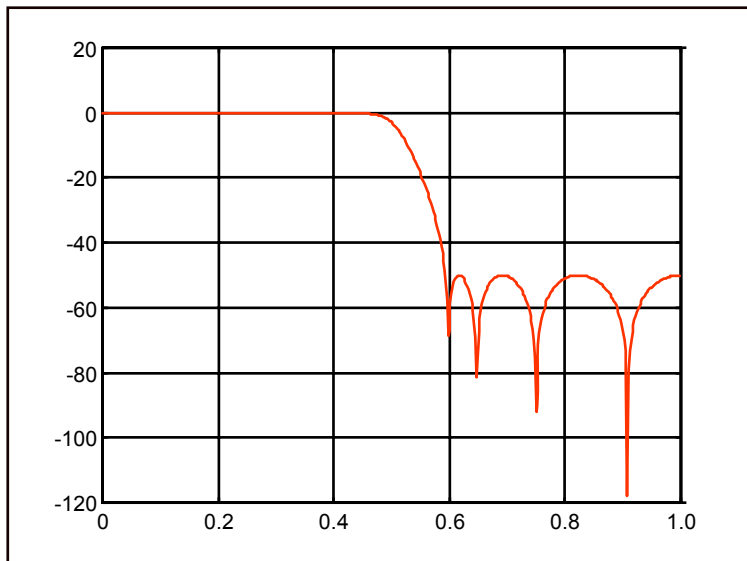
$$H(z) = \frac{0,06 + 0,30 \cdot z^{-1} + 0,78 \cdot z^{-2} + 1,30 \cdot z^{-3} + 1,53 \cdot z^{-4} + 1,30 \cdot z^{-5} + 0,78 \cdot z^{-6} + 0,30 \cdot z^{-7} + 0,06 \cdot z^{-8}}{1 - 0,95 \cdot z^{-1} + 1,74 \cdot z^{-2} + 1,20 \cdot z^{-3} + 0,92 \cdot z^{-4} + 0,41 \cdot z^{-5} + 0,15 \cdot z^{-6} + 0,03 \cdot z^{-7} + 0,004 \cdot z^{-8}}$$

# Prijenosna funkcija (FIR)

$$H(z) = \sum_i b_i \cdot z^{-i}$$

1.	0.0004	21	-0.0176	41	-0.0152
2.	-0.0007	22	0.0270	42	0.0172
3.	-0.0004	23	0.0142	43	0.0067
4.	0.0015	24	-0.0432	44	-0.0148
5.	0.0002	25	-0.0042	45	-0.0010
6.	-0.0024	26	0.0673	46	0.0114
7.	0.0007	27	-0.0206	47	-0.0023
8.	0.0034	28	-0.1160	48	-0.0078
9.	-0.0023	29	0.1103	49	0.0038
10	-0.0040	30	0.4839	50	0.0047
11	0.0047	31	0.4839	51	-0.0040
12	0.0038	32	0.1103	52	-0.0023
13	-0.0078	33	-0.1160	53	0.0034
14	-0.0023	34	-0.0206	54	0.0007
15	0.0114	35	0.0673	55	-0.0024
16	-0.0010	36	-0.0042	56	0.0002
17	-0.0148	37	-0.0432	57	0.0015
18	0.0067	38	0.0142	58	-0.0004
19	0.0172	39	0.0270	59	-0.0007
20	-0.0152	40	-0.0176	60	0.0004

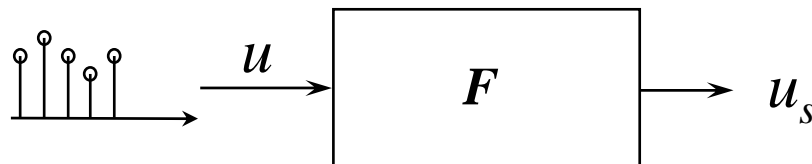
# Usporedba IIR / FIR



# Nerekurzivni digitalni filtri

# Primjer - aritmetička sredina

$$u_s = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_M}{M}$$





Interesantan je sustav koji služi za “glačanje” (usrednjavaње) slučajnih varijacija u signalu.

## M-point moving average system

$$y[n] = \frac{u[n] + u[n-1] + u[n-2] + \dots + u[n-M+1]}{M}$$

ili

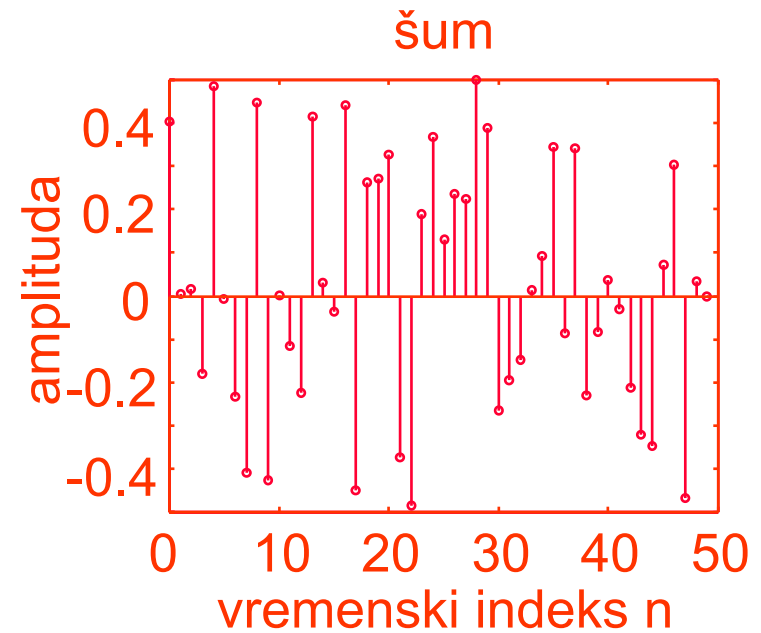
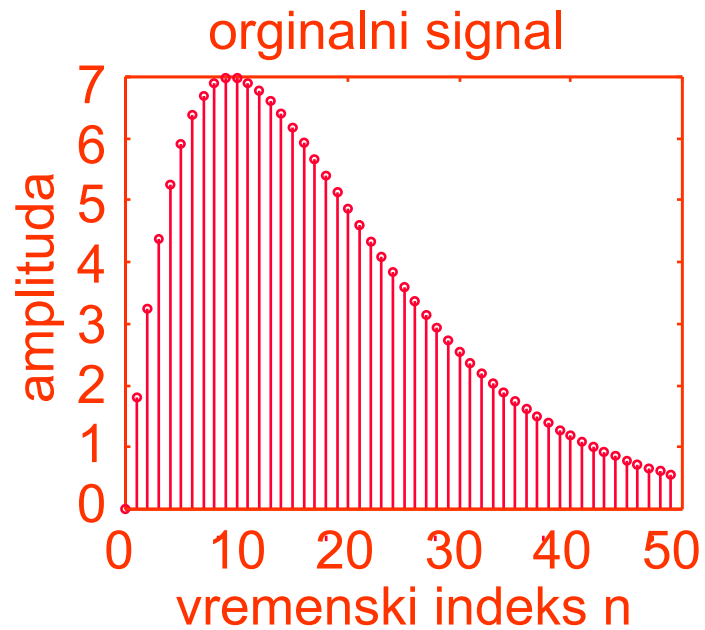
$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} \cdot u[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{M} u[n-i] = \sum_{i=0}^{M-1} h[i] \cdot u[n-i]$$

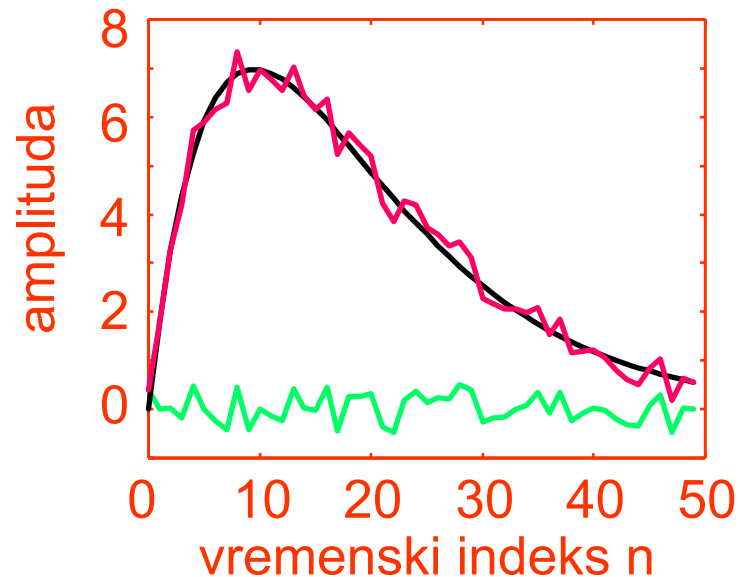
$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ h[i] \end{array}$$

Sustav ima konačan impulsni odziv - FIR sustav

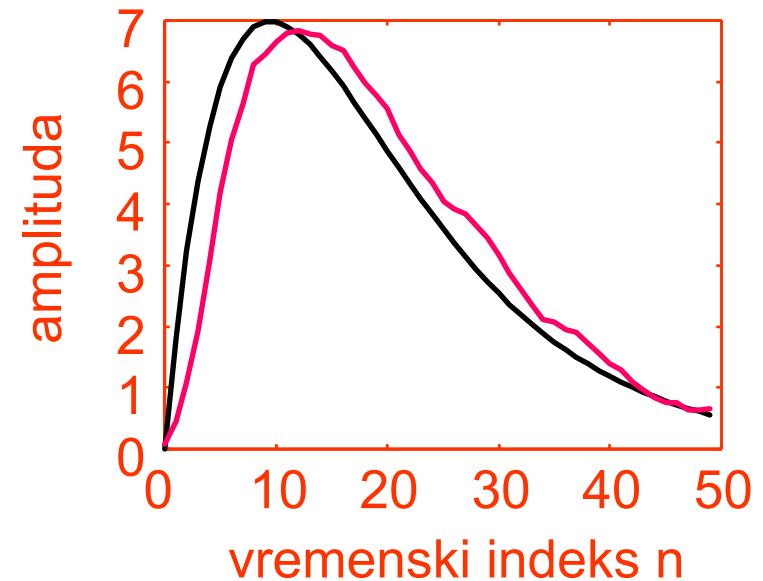
# Primjer - *MATLAB*



# Primjer - nastavak



- originalni signal
- šum
- signal + šum



- originalni signal
- $y[n]$  - izlaz iz *moving average* filtra

# FIR sustav za $M=2$

Pogledajmo o kojem se sustavu radi:

Uzmimo  $M=2$

$$y[n] = \sum_{i=0}^1 h[i] \cdot u[n-i] = \left| h[i] = \frac{1}{M} = \frac{1}{2} \right| =$$

$$= \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2} \cdot u[n-i] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] =$$

# FIR sustav za M=2 ...

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^1 u[n-i] = \left| \begin{array}{l} u[n] = e^{j\omega n} \\ -\infty \leq n \leq \infty \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left( e^{j\omega n} + e^{j\omega(n-1)} \right) = \frac{1}{2} e^{j\omega n} \left( 1 + e^{-j\omega} \right) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( 1 + e^{-j\omega} \right)}_{H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega n}
 \end{aligned}$$

# FIR sustav za $M=2$ ...

Isto pomoću Z-transformacije

$$Y(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) \cdot U(z)$$



$$H(z) \xrightarrow{\quad} z = e^{j\omega} \xrightarrow{\quad} H(e^{j\omega})$$

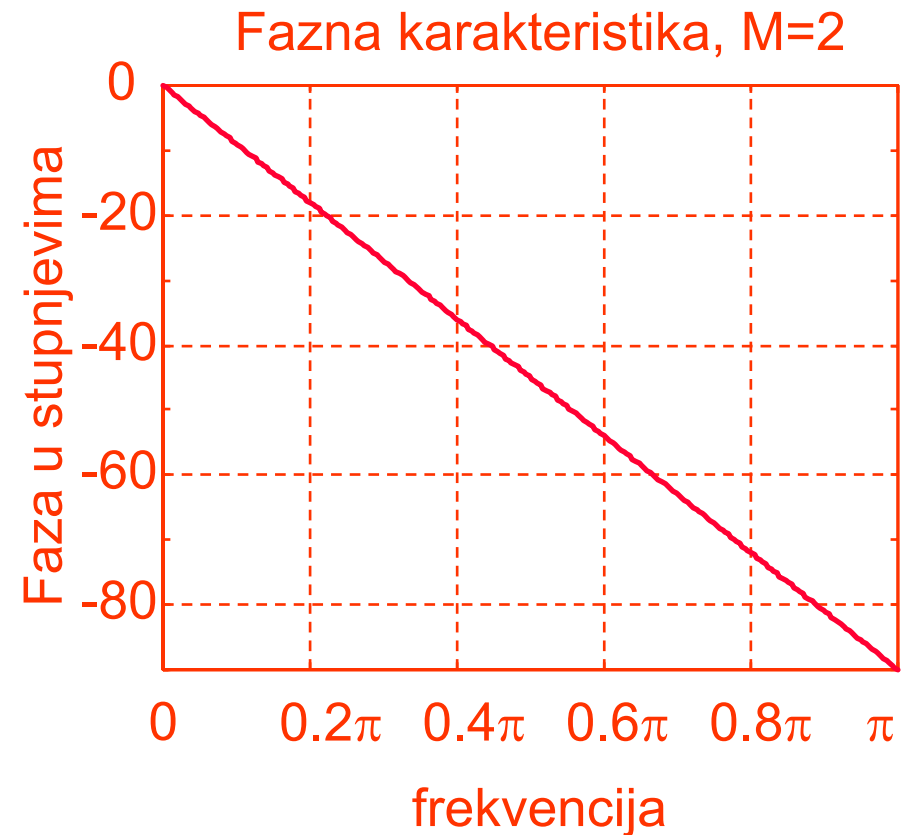
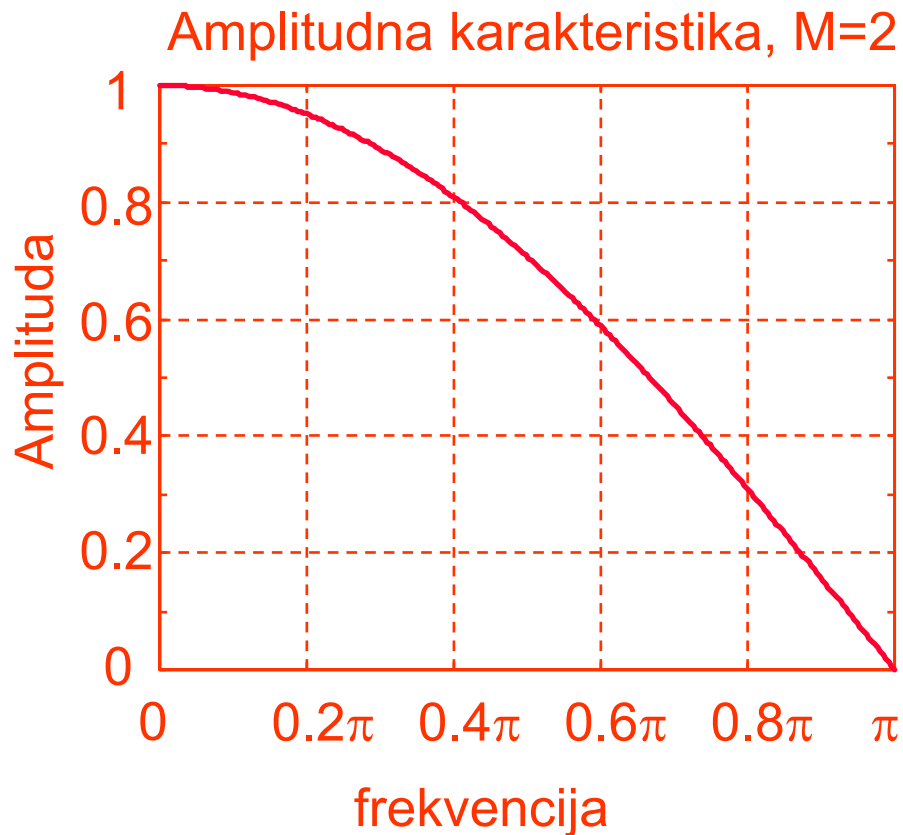
# FIR sustav za M=2 ...

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) = \\
 &= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = \\
 &= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}_{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \underbrace{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{\text{Niskopropusni filter}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}
 \end{aligned}$$

Niskopropusni filter

# FIR sustav za M=2 ...

$$H(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}$$





# FIR sustav za proizvoljni M

Za proizvoljni  $M$  vrijedi:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n} = \left[ h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \right] =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \dots\dots$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j \cdot (M-1) \cdot \frac{\omega}{2}}$$

# FIR sustav za proizvoljni M ...

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \frac{M \cdot \omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j \cdot (M-1) \cdot \frac{\omega}{2}}$$

Amplitudno-fazna  
karakteristika

Amplitudna  
karakteristika

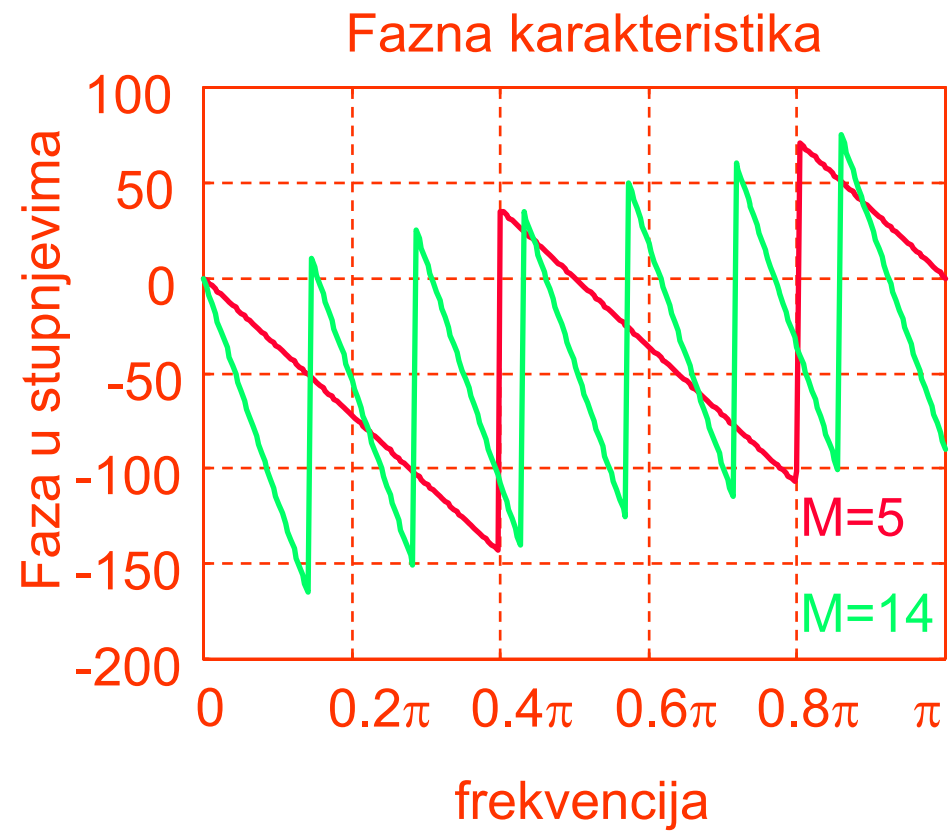
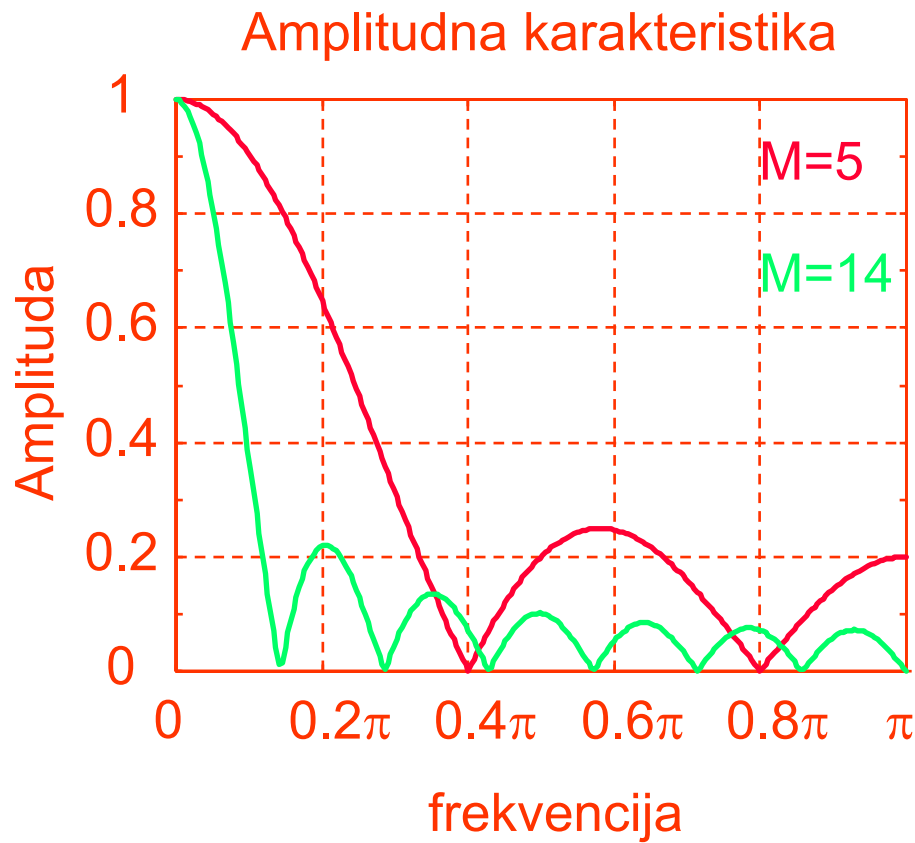
$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \left( \frac{M \cdot \omega}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|$$

Fazna  
karakteristika

$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1) \cdot \omega}{2} + \pi \cdot \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor} \mu \left( \omega - \frac{2\pi i}{M} \right)$$

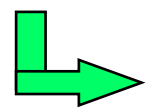
gdje je  $\mu(\omega)$  step u  $\omega$

# FIR sustav za proizvoljni M ...



# Grupno kašnjenje

Daljnji parametar za karakterizaciju filtara je **grupno kašnjenje**.



mjera linearnosti fazne funkcije

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega}, \text{ gdje je } \theta_c(\omega) \text{ faza}$$

za prije navedeni primjer:

$$\tau(\omega) = \frac{M-1}{2}$$

# Projektiranje FIR filtra

Pretpostavimo signal koji je suma kosinusnih signala

$$u[n] = u_1[n] + u_2[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$$

Pretpostavimo da želimo sustav (filter) koji će:

- gušiti signal  $u_1[n]$  (kosinus kutne frekv. 0,1 rad/sec)
- propuštati signal  $u_2[n]$  (kosinus kutne frekv. 0,4 rad/sec)

Radi jednostavnosti uzmimo:

- red filtra  $N=2$  (tri uzorka impulsnog odziva)
- impulsni odziv filtra

$$h[0] = h[2] = \alpha \quad \wedge \quad h[1] = \beta$$

# Projektiranje FIR filtra ...

Jednadžba diferencija ovog sustava je:

$$\begin{aligned}y[n] &= h[0] \cdot u[n] + h[1] \cdot u[n-1] + h[2] \cdot u[n-2] = \\&= \alpha \cdot u[n] + \beta \cdot u[n-1] + \alpha \cdot u[n-2]\end{aligned}$$

a pripadna frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega}) &= h[0] + h[1] \cdot e^{-j\omega} + h[2] \cdot e^{-j2\omega} = \\&= \alpha \cdot (1 + e^{-j2\omega}) + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\&= 2\alpha \cdot \left( \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) \cdot e^{-j\omega} + \beta \cdot e^{-j\omega} = \\&= (2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta) \cdot e^{-j\omega}\end{aligned}$$

# Projektiranje FIR filtra ...

Amplitudna i fazna karakteristika filtra su

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = 2\alpha \cdot \cos(\omega) + \beta$$

$$\theta(\omega) = -\omega$$

Iz zahtjeva na filter određujemo  $\alpha$  i  $\beta$

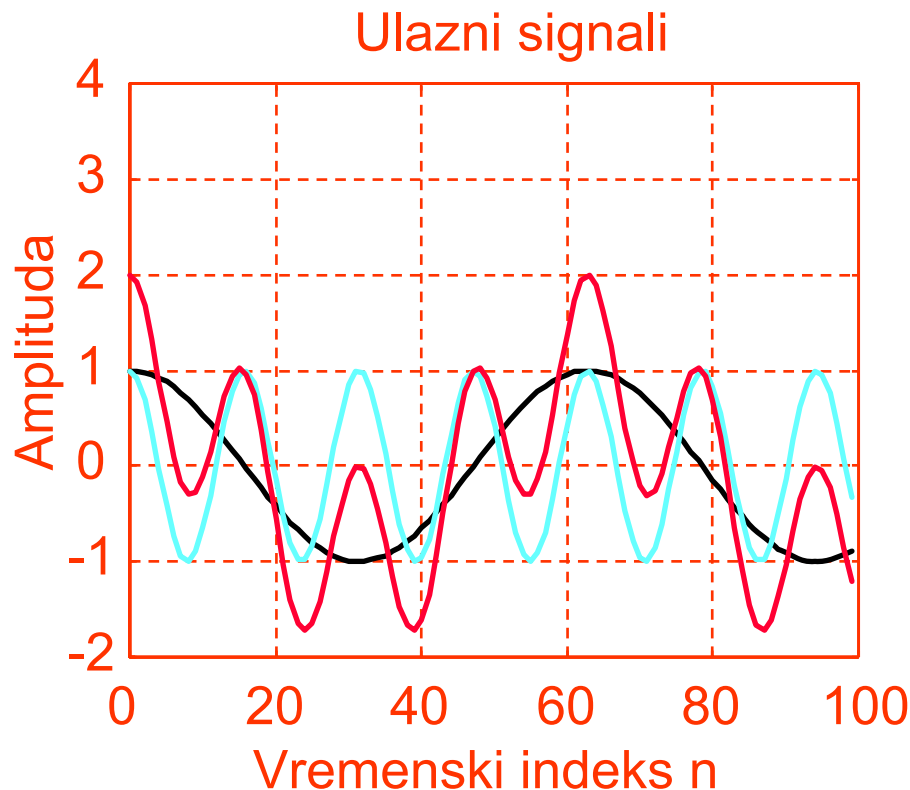
$$\left. \begin{aligned} \left| H(e^{j \cdot 0,1}) \right| &= 2\alpha \cdot \cos(0,1) + \beta = 0 \\ \left| H(e^{j \cdot 0,4}) \right| &= 2\alpha \cdot \cos(0,4) + \beta = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha &= -6,76195 \\ \beta &= 13,456335 \end{aligned}$$

što daje

$$y[n] = -6,76195 \cdot (u[n] + u[n-2]) + 13,456335 \cdot u[n-1]$$

# Projektiranje FIR filtra ...

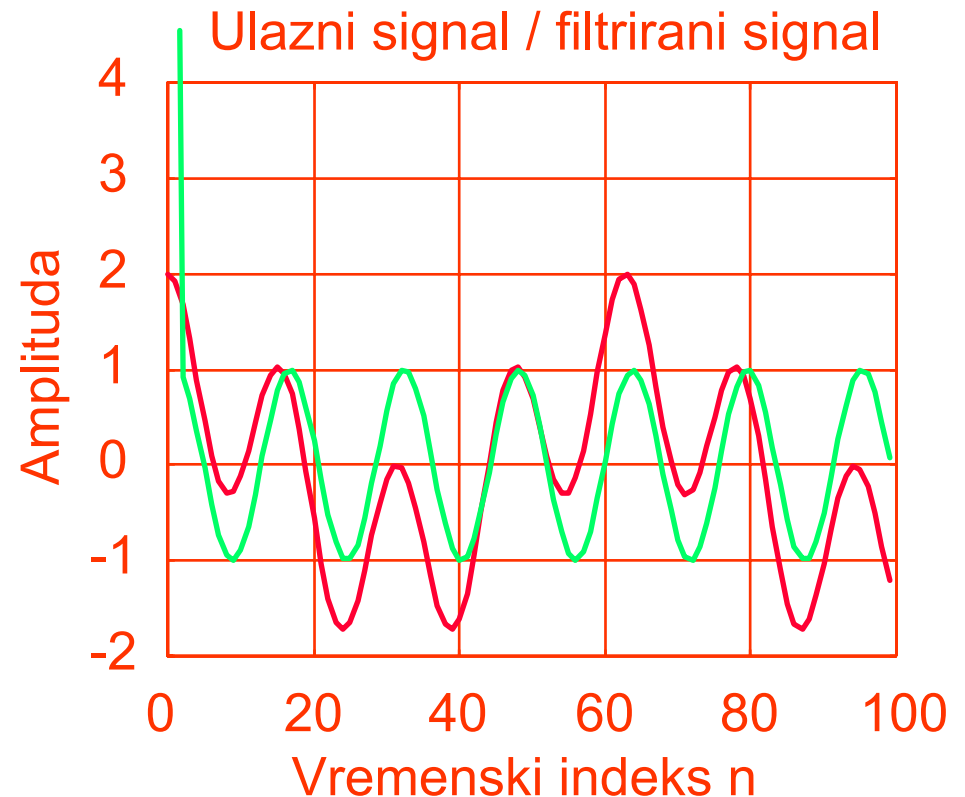
Uz pobudu:  $u[n] = \{\cos(0,1 \cdot n) + \cos(0,4 \cdot n)\} \mu(n)$



Ulaz  $u_1[n]$

Ulaz  $u_2[n]$

Ulaz  $u[n] = u_1[n] + u_2[n]$



Ulaz  $u[n] = u_1[n] + u_2[n]$

Izlaz  $y[n]$