DOS – Fourierova transformacija i spektri

Tomislav Petković

listopad 2005.

1. Fourierov red i integral

Zadatak 1.
Odredi Fourierovu transformaciju signala

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq x \leq T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

i

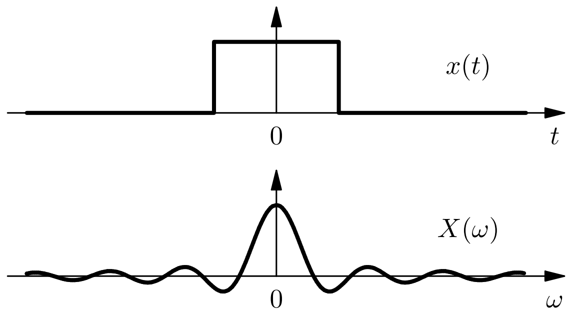
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Fourierovu transformaciju danog signala računamo po definiciji. Sada je:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\, dt = \left. \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right|_{-T}^{T} \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega T} - \frac{1}{-j\omega} e^{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} = 2T \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega T}{\pi}\Big) \end{aligned}$$

Za signal $x_{2T}(t)$ trajanja $2T$ vrijedi

$$x_{2T}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2T \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega T}{\pi}\Big),$$



Slika 1: Signal i njegov spektar

dok za signal $x_T(t)$ trajanja T vrijedi

$$x_T(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; T\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega T}{2\pi}\Big).$$

Signal i spektar su prikazani na slici 1.

Zadatak 2.
Odredite razvoj u Fourierov red signala koji je dobiven periodizacijom signala iz prethodnog zadatka s periodom T_P pri čemu je $T_P > 2T$. Skicirajtete dobiveni spektar i usporeditete ga sa spektrom signala iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \frac{1}{T_P}\int_{T_P} x(t)e^{-j\omega_P kt}\,dt$$

i

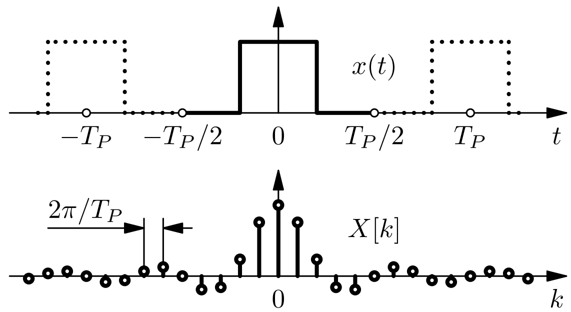
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{j\omega_P kt}.$$

Opet računamo po definiciji:

$$\begin{aligned}
X[k] &= \frac{1}{T_P}\int_{\text{po periodu}} x(t)e^{-2\pi jkt/T_P}\,dt \\
&= \frac{1}{T_P}\int_{-T}^{T} e^{-2\pi jkt/T_P}\,dt = \frac{1}{T_P}\frac{T_P}{-2\pi jk}e^{-2\pi jkt/T_P}\Big|_{-T}^{T} \\
&= \frac{1}{\pi k}\sin\Big(2\pi k\frac{T}{T_P}\Big) = 2\frac{T}{T_P}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega_P kT}{\pi}\Big)
\end{aligned}$$

Vidimo da dobiveni spektar oblikom odgovara otipkanom spektru signala iz prošlog zadatka.

Signal i spektar su prikazani na slici 2.



Slika 2: Signal i njegov spektar

2. Vremenski diskretna Fourierova transformacija

Zadatak 3.
Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju $\mathcal{F}_{\mathrm{vd}}$ signala

$$x[n] = \delta[n].$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega.$$

Spektar računamo prema definiciji:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1.$$

Provjerimo inverznom transformacijom jesmo li dobili ispravan rezultat:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} \Big(e^{j\pi n} - e^{-j\pi n} \Big) \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi) = \mathrm{sinc}(n) = \delta[n] \end{aligned}$$

Primijetite da funkcija sinc(n) poprima vrijednost nula za svaki cijelobrojni n različit od nule.

Zadatak 4.
Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju periodički proširenog signala iz prethodnog zadatka uz period $N > 1$. Skicirajte dobiveni spektar i usporedite ga sa spektrom iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2\pi jkn/N}.$$

Spektar računamo prema definiciji:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-2\pi jkn/N} = e^{-2\pi jk0/N} = 1.$$

Iako smo naizgled dobili jednaki rezultat kao u prethodnom zadatku primijetite da je u ovom slučaju domena diskretna te spektar poprima vrijednost 1 samo za cjelobrojni k.