DOS – Otipkavanje i kvantizacija

Tomislav Petković

listopad 2005.

1. Otipkavanje i kvantizacija

Zadatak 1.
Otipkaj kontinuirane signale frekvencija 3, 7 i 13 Hz određene s

$$x_1(t) = \cos(6\pi t), \quad x_2(t) = \cos(14\pi t) \quad \text{i} \quad x_3(t) = \cos(26\pi t)$$

ako je frekvencija otipkavanja $f_s = 10\,\mathrm{Hz}$, tj. ako je period otipkavanja $T_s = 0{,}1\,\mathrm{s}$. Nacrtaj i usporedi otipkane nizove.

Otipkavanjem signala dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x_1(nT_s) = \cos(6\pi n T_s) = \cos(0{,}6\pi n) \\ x_2[n] &= x_2(nT_s) = \cos(14\pi n T_s) = \cos(1{,}4\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n) \\ x_3[n] &= x_3(nT_s) = \cos(26\pi n T_s) = \cos(2{,}6\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n) \end{aligned}$$

Vidimo da smo otipkavanjem dobili tri identična signala što nam predstavlja problem jer ne možemo uvijek jednoznačno rekonstuirati polazni kontinuirani signal.

Zadatak 2.
Signal

$$x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos(24000\pi t + \pi/3) + \sin(16000\pi t)$$

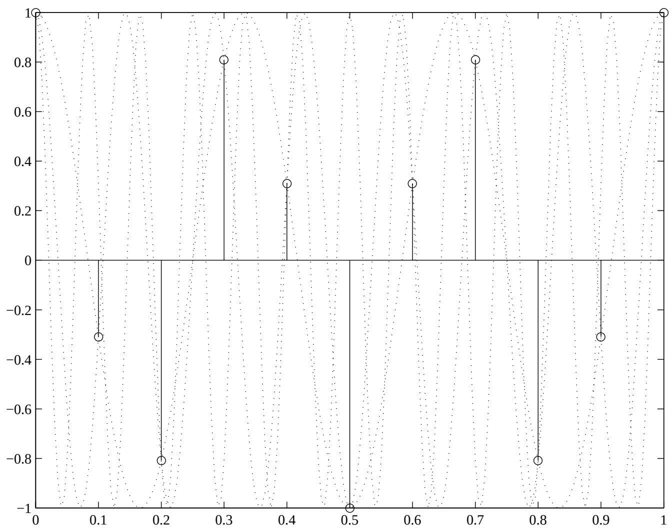
otipkan je frekvencijom otipkavanja $f_s = 10\,\mathrm{kHz}$. Odredite vremenski oblik signala nakon rekonstrukcije idealnim interpolatorom.

Kako promatramo linearnu kombinaciju sinusoida možemu svaku analizirati odvojeno. Prvo provjeravamo je li došlo do preklapanja spektra.

Polovina frekvencije otipkavanja je $f_s/2 = 5\,\mathrm{kHz}$. Kako su frekvencije zadanih sinusoida 4 kHz, 12 kHz i 8 kHz samo za prvu sinusoidu $x_1(t)$ frekvencije 4 kHz ne dolazi do preklapanja spektra. Rezultat rekonstrukcije za ostale dvije sinusoide moramo izračunati.

Za drugu sinusoidu vrijedi

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = 2\cos(24000\pi n T_s + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3).$$



Slika 1: Tri kontinuirana signala i rezultat otipkavanja

Primijetite da dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta, odnosno vrijedi

$$2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3 + 2\pi nk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je kofecijent uz n iz intervala $[-\pi, \pi]$. Odabiremo $k = -1$ te je otipkani signal

$$x_2[n] = 2\cos(0{,}4\pi n + \pi/3).$$

Rekonstruirani signal je

$$x_{2R}(t) = 2\cos(0{,}4\pi t f_s + \pi/3) = 2\cos(4000\pi t + \pi/3).$$

Vidimo da je frekvencija rekonstuiranog signala 2 kHz.

Na jednak način računamo izgled rekonstruiranog signala $x_3(t)$ frekvencije 8 kHz. Dobivamo:

$$\begin{aligned} x_{1R}(t) &= \sin(8000\pi t) \\ x_{2R}(t) &= 2\cos(4000\pi t + \pi/3) \\ x_{3R}(t) &= \sin(4000\pi t + \pi) \end{aligned}$$

Signal nakon rekonstrukcije je

$$x_R(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos(4000\pi t + \pi/3) + \sin(4000\pi t + \pi).$$

Zadatak 3.
Za konačni niz

$$x[n] = \{\underline{1}, 2, -1, 2\}$$

odredite interpolacijsku funkciju oblika sinc. Izračunajte vrijednost interpolacijske funkcije za $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ uz period otipkavanja $T = 1\,\mathrm{s}$.

U idealnom slučaju polazni otipkani kontinuirani signal dobivamo propuštanjem diskretnog signala kroz idealni nisko-propusni filtar. Impulsni odziv idealnog nisko-propusnog filtra je oblika sinc funkcije te se ona koristi kao interpolacijska funkcija.

Opisani postupak možemo prikazati kao konvoluciju, odnosno vrijedi

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{t}{T_s} - n\Big)$$

ili raspisano

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin\Big(\pi \dfrac{t - nT_s}{T_s}\Big)}{\pi \dfrac{t - nT_s}{T_s}}$$

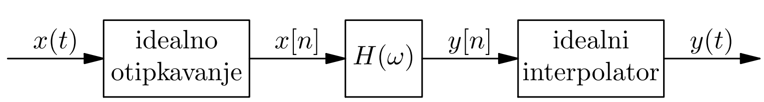
Za zadani signal sada je

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x[0]\,\mathrm{sinc}(t) + x[1]\,\mathrm{sinc}(t-1) \\ &\quad + x[2]\,\mathrm{sinc}(t-2) + x[3]\,\mathrm{sinc}(t-3) \\ &= \mathrm{sinc}(t) + 2\,\mathrm{sinc}(t-1) - \mathrm{sinc}(t-2) + 2\,\mathrm{sinc}(t-3) \end{aligned}$$

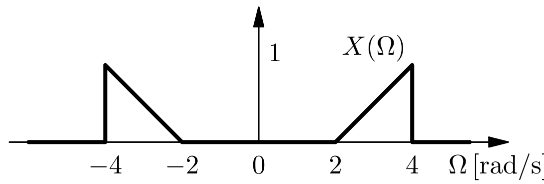
Uvrštavanjem $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ dobivamo

$$\begin{aligned} x_r(1{,}5\,\mathrm{s}) &= \mathrm{sinc}(1{,}5) + 2\,\mathrm{sinc}(0{,}5) - \mathrm{sinc}(-0{,}5) + 2\,\mathrm{sinc}(-1{,}5) \\ &= -\frac{2}{3\pi} + 2\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + 2\frac{-2}{3\pi} = 0 \end{aligned}$$

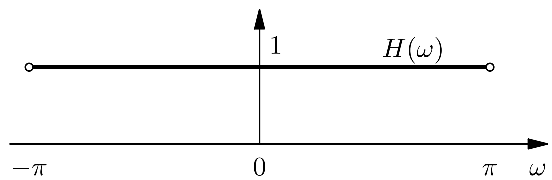
Zadatak 4.
Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?



Slika 2: Sustav za obradbu signala



Slika 3: Spektar kontinuiranog signala



Slika 4: Prijenosna funkcija digitalnog filtra

Zadatak 5.

Ponekad je potrebno promijeniti frekvenciju otipkavanja signala nakon što je signal otipkan. Povećavamo li frekvenciju otipkavanja govorimo o pretipkavanju i interpolaciji signala, a smanjujemo li frekvenciju otipkavanja govorimo o podtipkavanju i decimaciji signala.

Razmotrite najjednostavniji interpolator koji samo povećava frekvenciju otipkavanja ubacivanjem nula između uzoraka. Takav sustav je opisan izrazom

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & n/L \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Odredi odnos između spektara nizova $x[n]$ i $y[n]$.

Odredimo $\mathcal{Z}$ transformaciju signala $y[n]$. Vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n/L \in \mathbb{Z}} x[n/L] z^{-n}$$

Zamijenimo sada n/L sa m. Dobivamo pretipkani spektar

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] z^{-Lm} = X(z^L).$$

Fourierovu transformaciju dobivamo ako zamijenimo z sa $e^{j\omega}$. Tada je

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n L} = X(e^{j\omega L}).$$

Za podtipkavanje ostavljamo svaki M-ti uzorak,

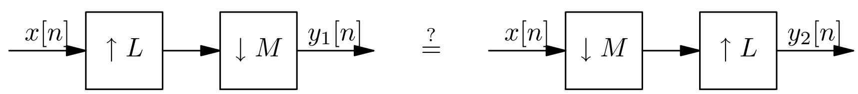
$$y[n] = x[nM],$$

pa dobivamo

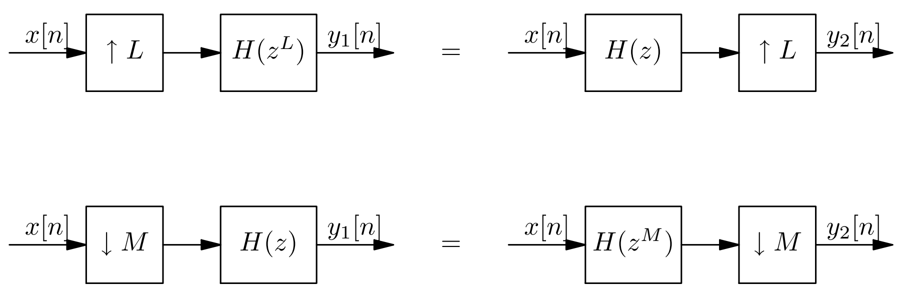
$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k})$$

(izvedite za vježbu).

Slika 5: Promjena frekvencije otipkavanja



Slika 6: Zamjena mjesta u kaskadi (M i L su relativno prosti)



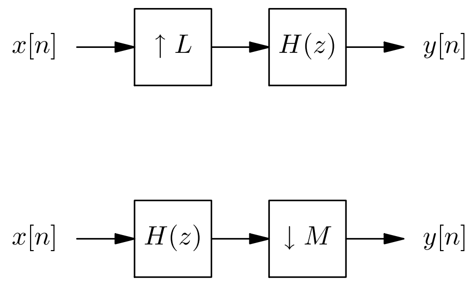
Slika 7: Ekvivalentne kaskade

Zadatak 6.
Kvantizirajte niz brojeva

$$x[n] = \{0{,}12, 1{,}10, -6{,}08, 5{,}99, -7{,}78, -8{,}58, 8{,}01, 7{,}97\}$$

ako raspolažete s 4 bita za prikaz broja u obliku dvojnog komplementa (3 bita i predznak). Koristite slijedeće metode kvantizacije:

1. zaokruživanje na najbliži cijeli broj (`round`),
2. odsijecanje prema dolje (`floor`),
3. odsijecanje prema gore (`ceil`) i
4. odsijecanje prema nuli (`fix`).



Slika 8: Interpolator i decimator

Raspolažemo li s B bita možemo prikazati brojeve u rasponu

$$[-2^{B-1}, 2^{B-1} - 1].$$

Za zadani niz dobivamo:

x	0,12	1,10	$-6{,}08$	5,99	$-7{,}78$	$-8{,}58$	8,01	7,97
round(x)	0	1	-7	6	-8	-9	8	8
$\lfloor x \rfloor$	0	1	-7	5	-8	-9	8	7
$\lceil x \rceil$	1	2	-6	6	-7	-8	9	8
fix(x)	0	1	-6	5	-7	-8	8	7

Kako raspolažemo s rasponom od -8 do 7 vrijednosti 8 i 9 postaju 7 dok -9 postaje -8 (kvantizacija s zasićenjem, lošije rješenje bi bilo prematanje za koje 8 postaje -8).

Zadatak 7.
Kvantiziramo kontinuirani signal s faktorom ispune $\gamma = 5$. Odredi SNR za taj signal ako ga kvantiziramo s $r = 1$, 2, 4, 8 i 16 bitova. Skiciraj ovisnost SNR o broju bitova r.

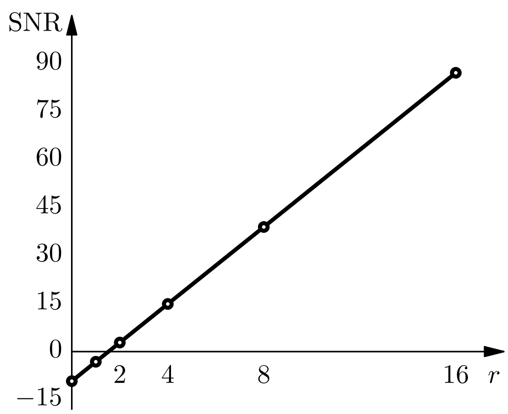
Za signal $x(t)$ s faktorom ispune γ uz pretpostavku nezavisnosti signala $x(t)$ i pogreške kvantizacije odnos signal/šum je

$$\mathrm{SNR} = 20r \log_{10}(2) + 10 \log_{10}\left(\frac{3}{\gamma^2}\right).$$

Uz zadani faktor ispune $\gamma = 5$ dobivamo $10 \log_{10}(3\gamma^{-2}) = -9{,}21\,\mathrm{dB}$. Sada je

$$\begin{aligned} r = 1: &\quad \mathrm{SNR} = -3{,}19\,\mathrm{dB} \\ r = 2: &\quad \mathrm{SNR} = 2{,}83\,\mathrm{dB} \\ r = 4: &\quad \mathrm{SNR} = 14{,}87\,\mathrm{dB} \\ r = 8: &\quad \mathrm{SNR} = 38{,}96\,\mathrm{dB} \\ r = 16: &\quad \mathrm{SNR} = 87{,}12\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

Karakteristika je linearna po varijabli r i prikazana je na slici 9.



Slika 9: Ovisnost SNR o broju bitova r