

DOS – Diskretna Fourierova transformacija

Tomislav Petković

studeni 2005.

1. Diskretna Fourierova Transformacija

Prisjetimo se:

1. **periodički** signal ima **diskretni** spektar
2. **diskretni** signal ima **periodički** spektar
3. **periodički diskretni** signal ima **periodički diskretni** spektar

Diskretna Fourierova transformacija – DFT

DFT konačnog niza $x[n]$ duljine N je

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}, \quad 0 \leq k < N.$$

Pri tome je $W_N^{nk} = e^{-2\pi jkn/N}$ skraćeni zapis eksponencijale.

Zadatak 1.

Za konačni diskretni niz

$$x[n] = \{2, 0, -1, 1\}$$

odredi diskretnu Fourierovu transformaciju u četiri točke. Skiciraj amplitudnu i faznu karakteristiku.

Računamo prema definiciji:

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{nk} = \sum_{n=0}^3 x[n]e^{-2\pi jnk/4}$$

Dobiveni spektar ima četiri člana koja moramo izračunati:

$$X[0] = 2W_4^{0 \cdot 0} + 0W_4^{1 \cdot 0} - 1W_4^{2 \cdot 0} + 1W_4^{3 \cdot 0} = 2 + 0 - 1 + 1 = 2$$

$$X[1] = 2W_4^{0 \cdot 1} + 0W_4^{1 \cdot 1} - 1W_4^{2 \cdot 1} + 1W_4^{3 \cdot 1} = 2 + 0 + 1 + j = 3 + j$$

$$X[2] = 2W_4^{0 \cdot 2} + 0W_4^{1 \cdot 2} - 1W_4^{2 \cdot 2} + 1W_4^{3 \cdot 2} = 2 + 0 - 1 - 1 = 0$$

$$X[3] = 2W_4^{0 \cdot 3} + 0W_4^{1 \cdot 3} - 1W_4^{2 \cdot 3} + 1W_4^{3 \cdot 3} = 2 + 0 + 1 - j = 3 - j$$

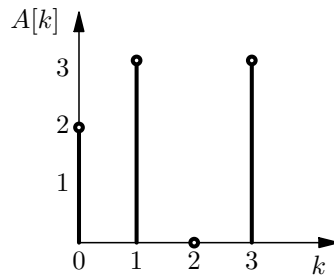
Odredimo i skicirajmo amplitudu. Vrijedi

$$A[k] = \sqrt{\operatorname{Re}[X[k]]^2 + \operatorname{Im}[X[k]]^2}$$

te je

$$A[k] = \{2, \sqrt{10}, 0, \sqrt{10}\} = \{2, 3,1632, 0, 3,1632\}.$$

Spektar je prikazan na slici 1.



Slika 1: Amplitudni spektar

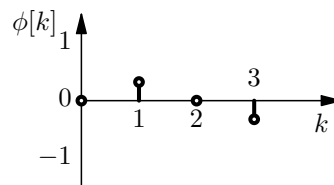
Odredimo i skicirajmo fazu. Vrijedi

$$\phi[k] = \arg[X[k]] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[X[k]]}{\operatorname{Re}[X[k]]}$$

te je

$$\phi[k] = \{0, 0,3218, 0, -0,3218\} = \{0, 18,4393^\circ, 0, -18,4393^\circ\}.$$

Spektar je prikazan na slici 2.



Slika 2: Amplitudni spektar

Zadatak 2.

Zadan je periodički niz

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

beskonačnog trajanja.

1. Odredi diskretnu Fourierovu transformaciju u četiri točke ($N = 4$).

2. Odredi vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju te je usporedi s DFT-om. Što se događa odaberemo li drugi N ?

DFT računamo prema definiciji

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) W_4^{nk}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} X[0] &= 1W_4^{0\cdot0} + 0W_4^{1\cdot0} - 1W_4^{2\cdot0} + 0W_4^{3\cdot0} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ X[1] &= 1W_4^{0\cdot1} + 0W_4^{1\cdot1} - 1W_4^{2\cdot1} + 0W_4^{3\cdot1} = 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \\ X[2] &= 1W_4^{0\cdot2} + 0W_4^{1\cdot2} - 1W_4^{2\cdot2} + 0W_4^{3\cdot2} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0 \\ X[3] &= 1W_4^{0\cdot3} + 0W_4^{1\cdot3} - 1W_4^{2\cdot3} + 0W_4^{3\cdot3} = 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Odredimo i vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) skraćenog niza (uzimamo u obzir samo 4 člana). Vrijedi

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]w[n]e^{j\omega n}.$$

Funkcija $w[n]$ je vremenski otvor kojim modeliramo skraćenje niza.

Dobivamo

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]w[n]e^{j\omega n} = \sum_{n=0}^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)e^{j\omega n} \\ &= 1e^{-j\omega 0} + 0e^{-j\omega 1} - 1e^{-j\omega 2} + 0e^{-j\omega 3} \\ &= 1 - e^{j\omega 2} = 1 - \cos(2\omega) + j \sin(2\omega) \end{aligned}$$

Amplitudni spektar je

$$A(\omega) = \sqrt{2 - 2 \cos(2\omega)} = \sqrt{4 \sin^2(\omega)} = 2|\sin(\omega)|.$$

DFT i DTFT spektri su prikazani na slici 3.

Zadatak 3.

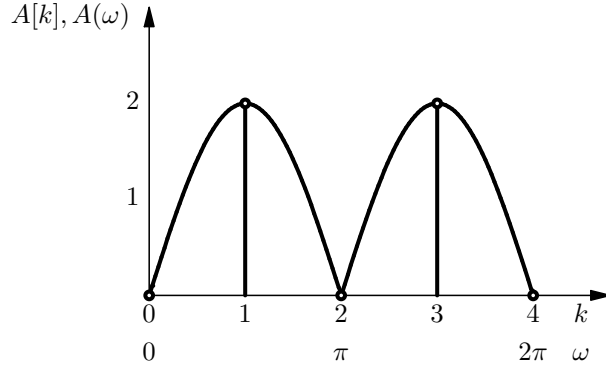
Odredi i skiciraj DFT nizova

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\},$$

$$x_2[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\} \text{ i}$$

$$x_3[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0\}.$$

Postoji li veza između dobivenih spektara?



Slika 3: Amplitudni spektar (DFT i DTFT)

Opet računamo prema definiciji DFT-a. Za spektar $X_1[k]$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
 X_1[0] &= 1W_4^{0\cdot0} + 1W_4^{1\cdot0} + 1W_4^{2\cdot0} + 1W_4^{3\cdot0} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\
 X_1[1] &= 1W_4^{0\cdot1} + 1W_4^{1\cdot1} + 1W_4^{2\cdot1} + 1W_4^{3\cdot1} = 1 - j - 1 + j = 0 \\
 X_1[2] &= 1W_4^{0\cdot2} + 1W_4^{1\cdot2} + 1W_4^{2\cdot2} + 1W_4^{3\cdot2} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\
 X_1[3] &= 1W_4^{0\cdot3} + 1W_4^{1\cdot3} + 1W_4^{2\cdot3} + 1W_4^{3\cdot3} = 1 + j - 1 - j = 0
 \end{aligned}$$

Transformaciju možemo zapisati i u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} X_1[0] \\ X_1[1] \\ X_1[2] \\ X_1[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^{0\cdot0} & W_4^{1\cdot0} & W_4^{2\cdot0} & W_4^{3\cdot0} \\ W_4^{0\cdot1} & W_4^{1\cdot1} & W_4^{2\cdot1} & W_4^{3\cdot1} \\ W_4^{0\cdot2} & W_4^{1\cdot2} & W_4^{2\cdot2} & W_4^{3\cdot2} \\ W_4^{0\cdot3} & W_4^{1\cdot3} & W_4^{2\cdot3} & W_4^{3\cdot3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

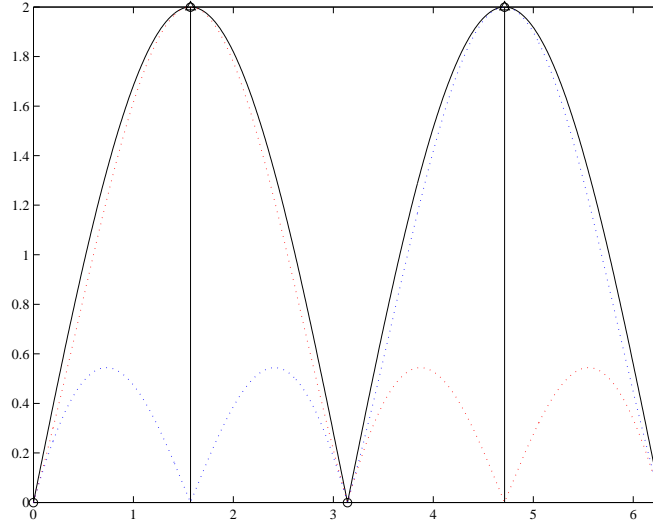
Matrični zapis za signal $x_2[n]$ je:

$$\begin{bmatrix} W_8^{0\cdot0} & W_8^{1\cdot0} & W_8^{2\cdot0} & W_8^{3\cdot0} & W_8^{4\cdot0} & W_8^{5\cdot0} & W_8^{6\cdot0} & W_8^{7\cdot0} \\ W_8^{0\cdot1} & W_8^{1\cdot1} & W_8^{2\cdot1} & W_8^{3\cdot1} & W_8^{4\cdot1} & W_8^{5\cdot1} & W_8^{6\cdot1} & W_8^{7\cdot1} \\ W_8^{0\cdot2} & W_8^{1\cdot2} & W_8^{2\cdot2} & W_8^{3\cdot2} & W_8^{4\cdot2} & W_8^{5\cdot2} & W_8^{6\cdot2} & W_8^{7\cdot2} \\ W_8^{0\cdot3} & W_8^{1\cdot3} & W_8^{2\cdot3} & W_8^{3\cdot3} & W_8^{4\cdot3} & W_8^{5\cdot3} & W_8^{6\cdot3} & W_8^{7\cdot3} \\ W_8^{0\cdot4} & W_8^{1\cdot4} & W_8^{2\cdot4} & W_8^{3\cdot4} & W_8^{4\cdot4} & W_8^{5\cdot4} & W_8^{6\cdot4} & W_8^{7\cdot4} \\ W_8^{0\cdot5} & W_8^{1\cdot5} & W_8^{2\cdot5} & W_8^{3\cdot5} & W_8^{4\cdot5} & W_8^{5\cdot5} & W_8^{6\cdot5} & W_8^{7\cdot5} \\ W_8^{0\cdot6} & W_8^{1\cdot6} & W_8^{2\cdot6} & W_8^{3\cdot6} & W_8^{4\cdot6} & W_8^{5\cdot6} & W_8^{6\cdot6} & W_8^{7\cdot6} \\ W_8^{0\cdot7} & W_8^{1\cdot7} & W_8^{2\cdot7} & W_8^{3\cdot7} & W_8^{4\cdot7} & W_8^{5\cdot7} & W_8^{6\cdot7} & W_8^{7\cdot7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Spektar $X_1[k]$ signala $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1\}$, je prikazan na slici 10.

Spektar $X_2[k]$ signala $x_2[n] = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$, je prikazan na slici 11. U jednom periodu spektra sada vidimo jedanput ponovljeni spektar signala $x_1[n]$.

Spektar $X_3[k]$ signala $x_3[n] = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0\}$, je prikazan na slici 12. U jednom periodu spektra sada vidimo dvaput ponovljeni spektar signala $x_1[n]$.



Slika 4: Amplitudni spektar (DFT i DTFT) za $P = L = N = 4$

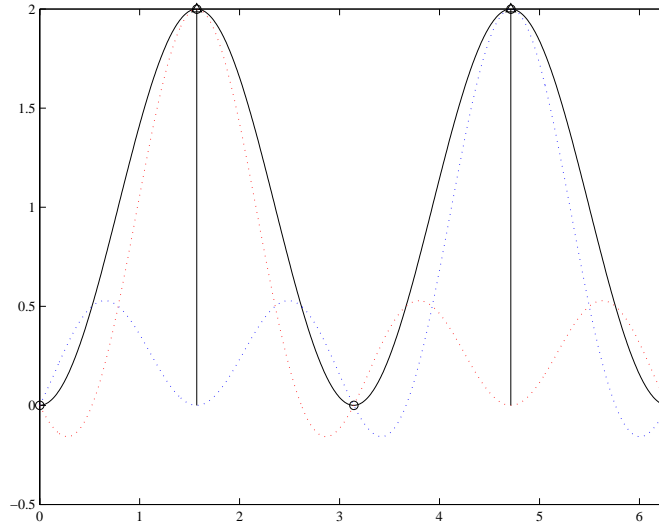
Zadatak 4.

Ako je $X[k]$ DFT konačnog niza $x[n]$ duljine N odredi DFT nizova:

1. $x_1[n] = x[n] \cos(2\pi nm/N)$, $0 \leq n < N$,
2. $x_2[n] = x[n] \sin(2\pi nm/N)$, $0 \leq n < N$.

Znamo da je $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$. Računamo DFT niza $x_1[n]$ prema definiciji:

$$\begin{aligned}
 X_1[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi nm/N) W_N^{nk} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{2\pi jnm/N} e^{-2\pi jnk/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jnm/N} e^{-2\pi jnk/N} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(k-m)} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(k+m)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (X[k-m] + X[k+m])
 \end{aligned}$$



Slika 5: Realni dio spektra za $P = L = N = 4$

Na jednak način računamo DFT niza $x_2[n]$:

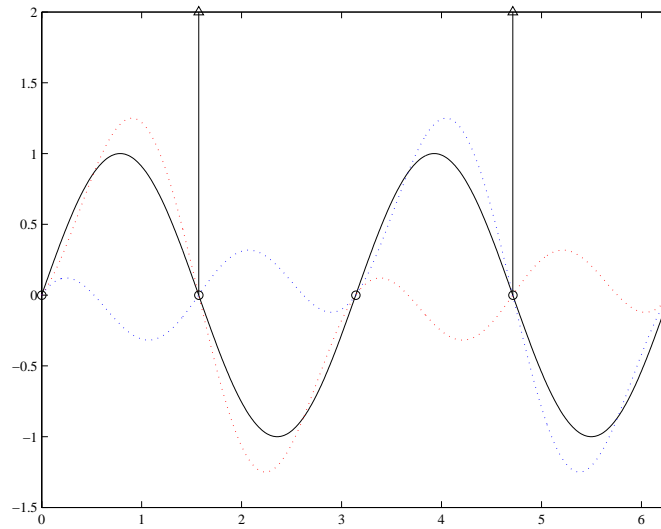
$$\begin{aligned}
 X_2[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi nm/N) W_N^{nk} \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{2\pi jnm/N} e^{-2\pi jnk/N} - \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jnm/N} e^{-2\pi jnk/N} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(k-m)} - \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(k+m)} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} (X[k-m] - X[k+m])
 \end{aligned}$$

Zadatak 5.

Kontinuirani pravokutni signal propušten je kroz idealni AA filter te je tada otipkan s frekvencijom $f_s = 10$ kHz. Snimili smo 64 uzorka signala te odredili DFT. Kako izgleda frekvencijska skala za DFT? Kako bi se mijenja spektar uzmemo li 32 ili 4096 uzoraka? Kako se mijenja spektar ako promijenimo frekvenciju otipkavanja?

Pravokutni signal ima samo neparne harmonike čija amplituda opada linearno s n :

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2\pi f(2n+1)t)$$



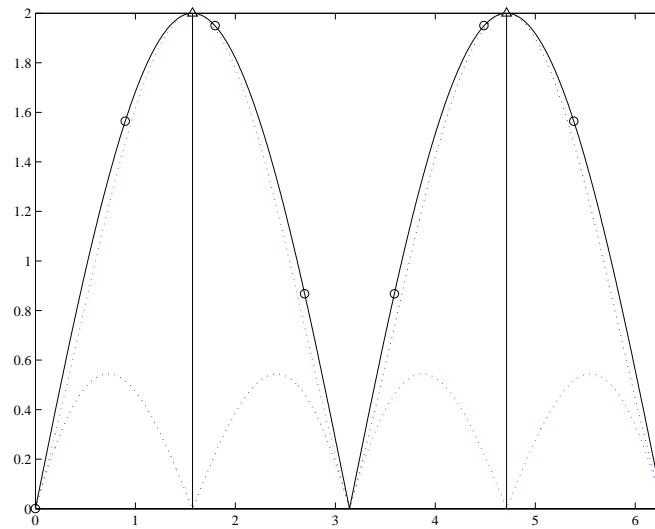
Slika 6: Imaginarni dio spektra za $P = L = N = 4$

Na slici 13 je prikazan pravokutni signal uz uzimanje u obzir samo prva dva neparna harmonika.

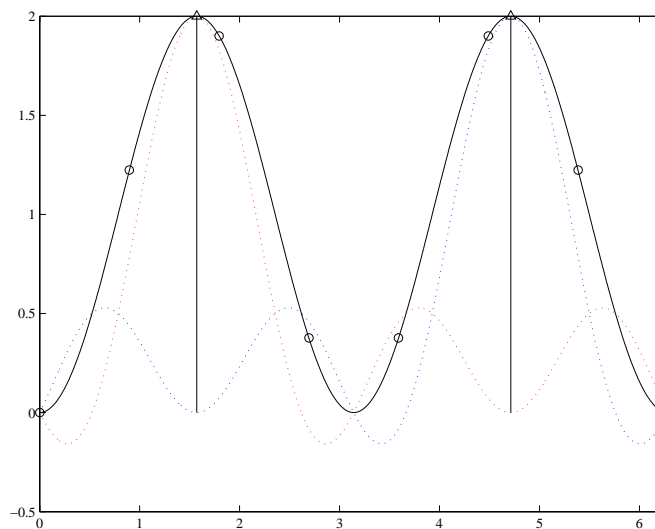
Trokutasti signal ima opet samo neparne harmonike no njihova amplituda sada opada s kvadratom od n :

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2\pi f(2n+1)t)$$

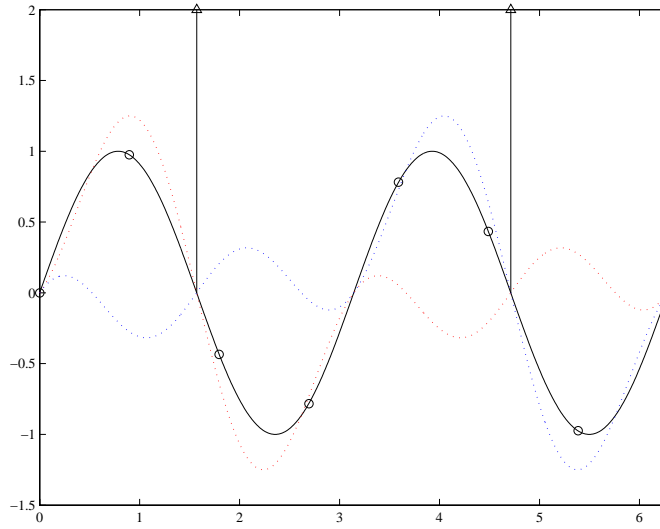
Na slici 14 je prikazan trokutasti signal uz uzimanje u obzir samo prva dva neparna harmonika.



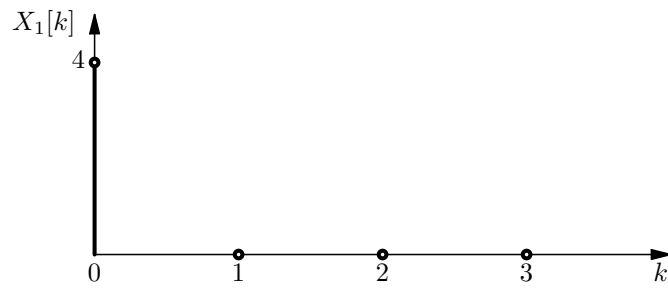
Slika 7: Amplitudni spektar (DFT i DTFT) za $P = L = 4$, $N = 7$



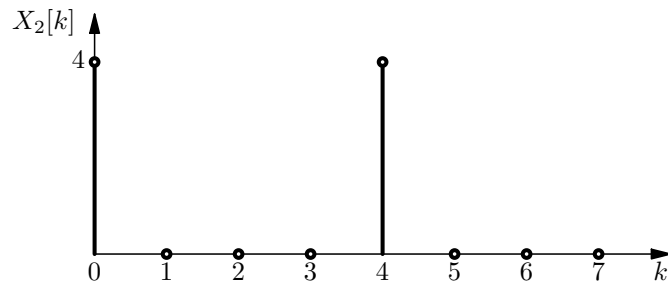
Slika 8: Realni dio spektra za $P = L = 4$, $N = 7$



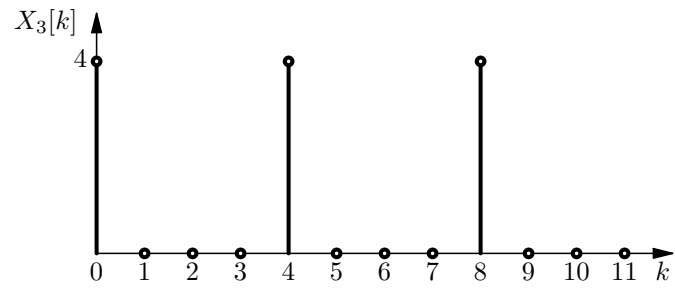
Slika 9: Imaginarni dio spektra za $P = L = 4$, $N = 7$



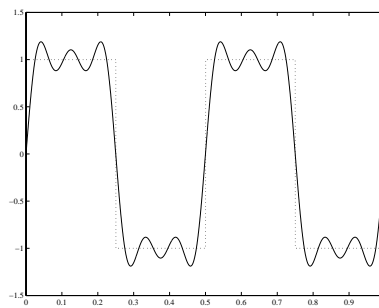
Slika 10: Amplitudni spektar $X_1[k]$



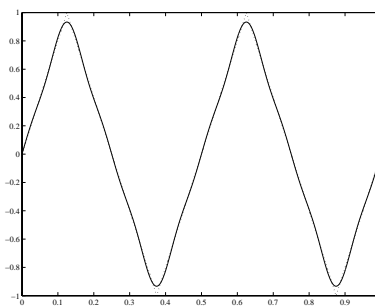
Slika 11: Amplitudni spektar $X_2[k]$



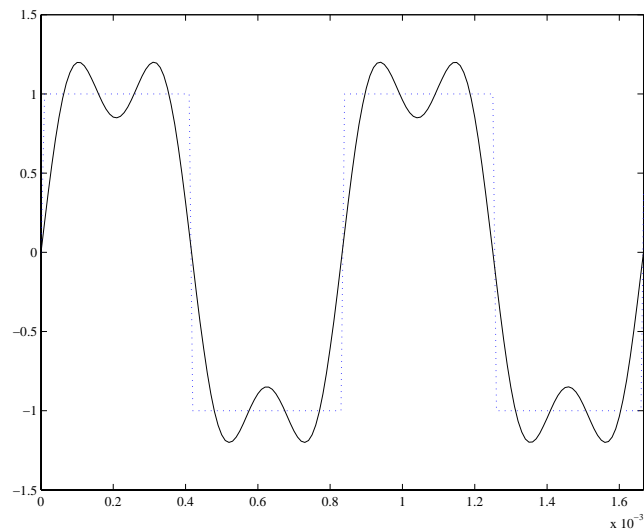
Slika 12: Amplitudni spektar $X_3[k]$



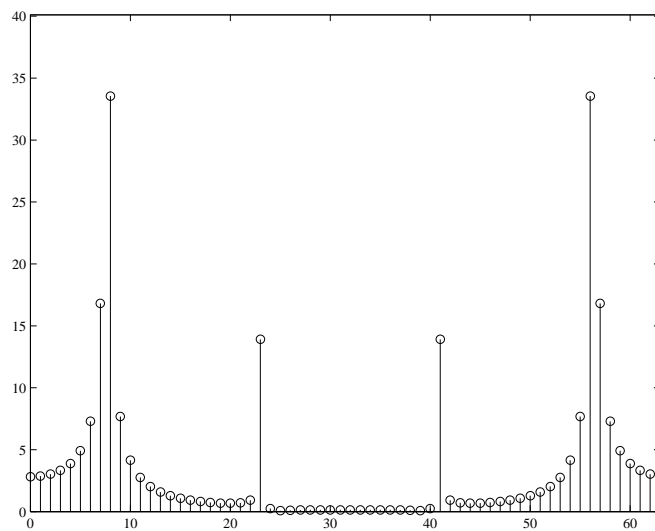
Slika 13: Pravokutni signal



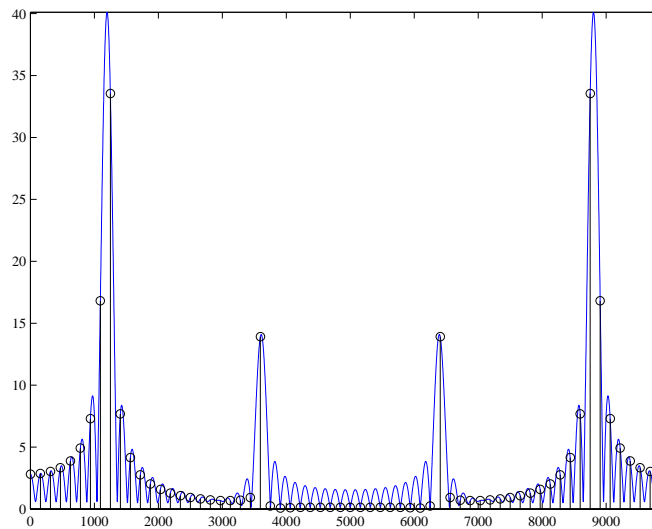
Slika 14: Trokutasti signal



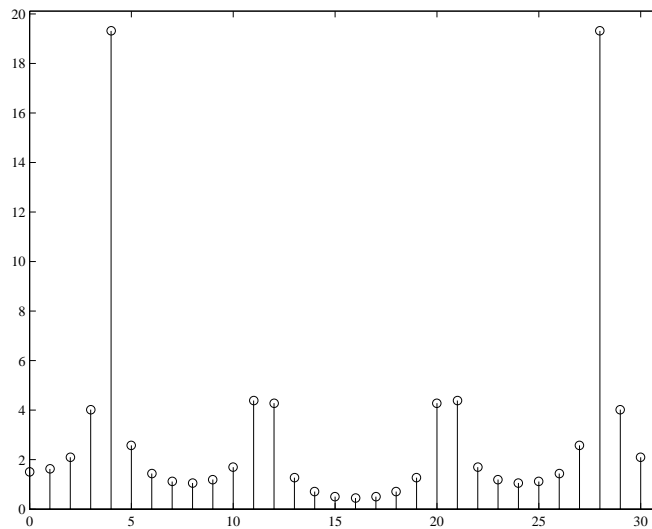
Slika 15: Pravokutni signal ($f = 1200$ Hz) propušten kroz idealni AA filter.



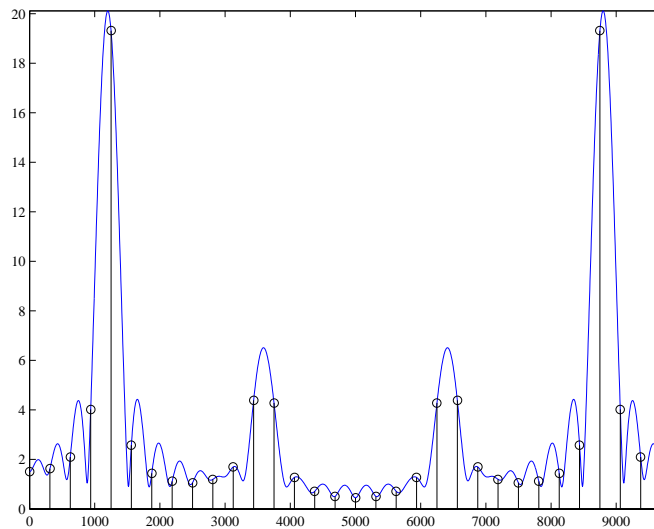
Slika 16: Spektar signala uz $N = 64$, frekvencijska os u uzorcima DFT-a.



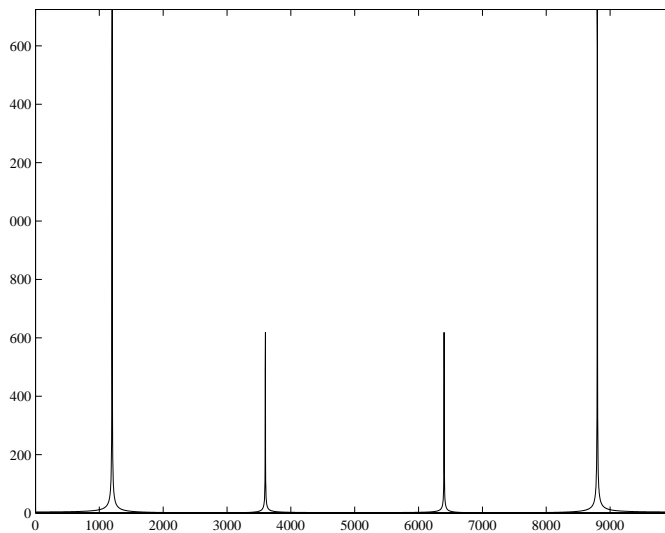
Slika 17: Spektar signala uz $N = 64$, frekvencijska os u Hz.



Slika 18: Spektar signala uz $N = 32$, frekvencijska os u uzorcima DFT-a.



Slika 19: Spektar signala uz $N = 32$, frekvencijska os u Hz.



Slika 20: Spektar signala uz $N = 4096$, frekvencijska os u Hz.