DOS – Konvolucija

Tomislav Petković

prosinac 2005.

1. Linearna konvolucija

Zadatak 1.
Odredi linearnu konvoluciju signala

$$x[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$$

i

$$h[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 2, 0, -2, -1, 0, 0, 0, \ldots\}$$

i to računajući u

1. vremenskoj domeni i
2. domeni transformacije.

Koliki je broj uzoraka različit od nule?

Odredimo najprije konvoluciju u vremenskoj domeni. Vrijedi

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x[i]h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]x[n-i]$$

Kako su naši signali različiti od nule samo za konačan broj uzoraka općenito možemo promijeniti granice sumacije. Neka je duljina signala M te neka je impulsni odziv duljine $N+1$ (N je red FIR filtra). Sada je konvolucija

$$y[n] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\max(0,n-N)}^{\min(n,M-1)} x[i]h[n-i], & 0 \leq n \leq N+M \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Konvoluciju signala konačnih trajanja obično računamo tablično:
Kao rezultat dobivamo niz

$$y[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 2, -1, -4, 0, 4, 1, -2, -1, 0, 0, \ldots\}.$$

n	$x[i] = \{\ \underline{1},\ 0, -1,\ 0,\ 1\}$	$y[n]$
0	$h[0-i] = \{-1, -2,\ 0,\ 2,\ \underline{1}\ \}$	1
1	$h[1-i] = \{-1, -2,\ 0,\ \underline{2},\ 1\ \}$	2
2	$h[2-i] = \{-1, -2,\ \underline{0},\ 2,\ 1\ \}$	-1
3	$h[3-i] = \{-1, \underline{-2},\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	-4
4	$h[4-i] = \{\underline{-1}, -2,\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	0
5	$h[5-i] = \{-1, -2,\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	4
6	$h[6-i] = \{-1, -2,\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	1
7	$h[7-i] = \{-1, -2,\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	-2
8	$h[8-i] = \{-1, -2,\ 0,\ 2,\ 1\ \}$	-1

Rezulat $y[n]$ je različit od nule samo za $N+M$ uzoraka započevši od nultog uzorka (zbroj duljine signala i reda filtra).

Uobičajeno kažemo da je rezultat konvolucije dva konačna signala duljina ℓ_1 i ℓ_2 niz duljine

$$\ell_1 + \ell_2 - 1$$

Odredimo konvoluciju u $\mathcal{Z}$ domeni prema svojstvu

$$y[n] = x[n] * h[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(z) = X(z)H(z).$$

Kako su signal i impulsni odziv konačne duljine transformacije jednostavno odredimo prema definiciji $\mathcal{Z}$ transformacije. Dobivamo

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 - z^{-2} + z^{-4} \\ H(z) &= 1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4} \end{aligned}$$

$Y(z)$ dobivamo množenjem polinoma. Sada je

$$\begin{aligned} Y(z) = X(z)H(z) &= (1 - z^{-2} + z^{-4})(1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}) \\ &= \quad 1 \quad + 2z^{-1} \qquad\qquad - 2z^{-3} - 1z^{-4} \\ &\qquad - 1z^{-2} - 2z^{-3} \qquad\qquad + 2z^{-5} + 1z^{-6} \\ &\qquad + 1z^{-4} + 2z^{-5} \qquad\qquad - 2z^{-7} - 1z^{-8} \\ &= 1 + 2z^{-1} - z^{-2} - 4z^{-3} + 4z^{-5} + z^{-6} - 2z^{-7} - z^{-8} \end{aligned}$$

Inverznom transformacijom dobivamo

$$y[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 2, -1, -4, 0, 4, 1, -2, -1, 0, 0, \ldots\}.$$

Popunimo li praznine koje smo ostavili dobivamo:

$$\begin{aligned}
Y(z) = X(z)H(z) &= (1 - z^{-2} + z^{-4})(1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}) \\
&= \quad 1 \quad + 2z^{-1} + 0z^{-2} - 2z^{-3} - 1z^{-4} \\
&\quad + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} \\
&\quad - 1z^{-2} - 2z^{-3} + 0z^{-4} + 2z^{-5} + 1z^{-6} \\
&\quad + 0z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} + 0z^{-6} + 0z^{-7} \\
&\quad + 1z^{-4} + 2z^{-5} + 0z^{-6} - 2z^{-7} - 1z^{-8} \\
&= 1 + 2z^{-1} - z^{-2} - 4z^{-3} + 4z^{-5} + z^{-6} - 2z^{-7} - z^{-8}
\end{aligned}$$

Ovime smo dobili jednostavan kompaktan način kako na papiru tablično odrediti linearnu konvoluciju.

2. Cirkularna konvolucija

Zadatak 2.
Odredi cirkularnu konvoluciju konačnih signala duljine $N = 5$,

$$x[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$$

i

$$h[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\}$$

i to računajući u

1. vremenskoj domeni i
2. domeni transformacije.

Cirkularnu konvoluciju računamo prema izrazu

$$y[n] = h[n] \circledN x[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]h\big[\langle n - i\rangle_N\big].$$

Primijetite da za DFT u N točaka vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N-1} x[i]h\big[\langle n - i\rangle_N\big] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X[k]H[k],$$

pri čemu je naravno $X[k] = \mathrm{DFT}_N\big[x[n]\big]$ i $H[k] = \mathrm{DFT}_N\big[h[n]\big]$.

Odredimo sada $h[n] \circled{5} x[n] = \sum_{i=0}^{4} x[i]h\big[\langle n-i\rangle_5\big]$. Kao i linearnu konvoluciju cirkularnu konvoluciju ručno najčešće računamo tablično.

Cirkularnu konvoluciju duljine N možemo odrediti i u domeni DFT_N transformacije. Kako je u našem zadatku $N = 5$ vrijedi

$$y[n] = h[n] \circled{5} x[n] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{DFT}_5\big[y[n]\big] = \mathrm{DFT}_5\big[h[n]\big]\,\mathrm{DFT}_5\big[x[n]\big].$$

n		$x[i] = \{\ \underline{1},\ 0, -1,\ 0,\ 1\}$	$y[n]$
0	$h\big[\langle 0-i\rangle_5\big]$	$= \{\ \underline{1}, -1, -2,\ 0,\ 2\}$	5
1	$h\big[\langle 1-i\rangle_5\big]$	$= \{\ \underline{2},\ 1, -1, -2,\ 0\}$	3
2	$h\big[\langle 2-i\rangle_5\big]$	$= \{\ \underline{0},\ 2,\ 1, -1, -2\}$	-3
3	$h\big[\langle 3-i\rangle_5\big]$	$= \{\underline{-2},\ 0,\ 2,\ 1, -1\}$	-5
4	$h\big[\langle 4-i\rangle_5\big]$	$= \{\underline{-1}, -2,\ 0,\ 2,\ 1\}$	0

Odredimo najprije DFT_5 transformacije danih nizova. Dobivamo

$$\begin{aligned} H[k] &= \mathrm{DFT}_5\big[h[n]\big] = 1W_5^{0k} + 2W_5^{1k} + 0W_5^{2k} - 2W_5^{3k} - 1W_5^{4k} \\ X[k] &= \mathrm{DFT}_5\big[x[n]\big] = 1W_5^{0k} + 0W_5^{1k} - 1W_5^{2k} + 0W_5^{3k} + 1W_5^{4k} \end{aligned}$$

Množenjem u domeni transformacije dobivamo:

$$\begin{aligned} Y[k] &= H[k]X[k] = (1 + 2W_5^{k} - 2W_5^{3k} - W_5^{4k})(1 - W_5^{2k} + W_5^{4k}) \\ &= 1 + 2W_5^{k} - 2W_5^{3k} - W_5^{4k} - W_5^{2k} - 2W_5^{3k} + 2W_5^{5k} + W_5^{6k} \\ &\quad + W_5^{4k} + 2W_5^{5k} - 2W_5^{7k} - W_5^{8k} \\ &= 1 + 2W_5^{k} - W_5^{2k} - 4W_5^{3k} + 4W_5^{5k} + W_5^{6k} - 2W_5^{7k} - W_5^{8k} \\ &= 1 + 2W_5^{k} - W_5^{2k} - 4W_5^{3k} + 4W_5^{0} + W_5^{k} - 2W_5^{2k} - W_5^{3k} \\ &= 5 + 3W_5^{k} - 3W_5^{2k} - 5W_5^{3k} \end{aligned}$$

Inverznom transformacijom dobivamo

$$y[n] = \{\underline{5}, 3, -3, -5, 0\}.$$

Moramo razlikovati cirkularnu i linearnu konvoluciju te DFT i DTFT transformacije. Vrijedi:

1. linearna konvolucija odgovara množenju u DTFT domeni

$$f[n] * g[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[i]g[n-i] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega)G(\omega)$$

2. cirkularna konvolucija odgovara množenju u DFT domeni

$$f[n] \;\textcircled{N}\; g[n] = \sum_{i=0}^{N-1} f[i]g\big[\langle n-i\rangle_N\big] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F[k]G[k]$$

Zadatak 3.
Kako pomoću cirkularne konvolucije možemo odrediti linearnu konvoluciju konačnih signala? Pokaži postupak na primjeru signala iz prethodnih zadataka.

Promatramo li dva signala konačnih duljina ℓ_1 i ℓ_2 linearna konvolucija je niz duljine $\ell_1+\ell_2-1$. Tih $\ell_1+\ell_2-1$ uzoraka različitih od nule možemo odrediti preko cirkularne konvolucije duljine $N \geq \ell_1+\ell_2-1$. Pri tome nizove proširujemo dodavanjem nula na kraj niza do potrebne duljine N.

Zadani signali su bili

$$x[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad h[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\},$$

a kao rezultat konvolucije smo dobili signal

$$y[n] = \{\underline{1}, 2, -1, -4, 0, 4, 1, -2, -1\}.$$

Odredimo $y[n]$ kao $y_9[n] = x[n] ⑨ h[n]$.

Odabrali smo $N = 5+5-1 = 9$ te računamo cirkularnu konvoluciju $y_9[n] = x[n] ⑨ h[n]$.

n			$y_9[n]$
	$x[i]$	$= \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\}$	
0	$h\left[\langle 0-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0, -1, -2, 0, 2\}$	1
2	$h\left[\langle 1-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{2}, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -2, 0\}$	2
3	$h\left[\langle 2-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{0}, 2, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -2\}$	-1
4	$h\left[\langle 3-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{-2}, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, -1\}$	-4
5	$h\left[\langle 4-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{-1}, -2, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0\}$	0
6	$h\left[\langle 5-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{0}, -1, -2, 0, 2, 1, 0, 0, 0\}$	4
7	$h\left[\langle 6-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{0}, 0, -1, -2, 0, 2, 1, 0, 0\}$	1
8	$h\left[\langle 7-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{0}, 0, 0, -1, -2, 0, 2, 1, 0\}$	-2
9	$h\left[\langle 8-i\rangle_9\right]$	$= \{\underline{0}, 0, 0, 0, -1, -2, 0, 2, 1\}$	-1

Dobili smo kao konačan rezultat niz

$$y_9[n] = x[n] ⑨ h[n] = \{\underline{1}, 2, -1, -4, 0, 4, 1, -2, -1\}.$$

U ovom slučaju smo proširivali nizove s nulama na kraju niza. Znate li koji rezultat bi dobili u slučaju dodavanja nula na početak niza?

Rekli smo da je potreban uvjet $N \geq \ell_1+\ell_2-1$. Znate li kako izgleda rezultat za neki drugi N, npr. $x[n] ⑯ h[n]$ ili $x[n] ㉜ h[n]$? Odredite $y_{16}[n] = x[n] ⑯ h[n]$ za vježbu.

Obično odabiremo prvi N veći od $\ell_1 + \ell_2 - 1$ kojeg možemo rastaviti kao produkt malih prostih faktora (najčešće se uzima $N = 2^k$).

Zadatak 4.

Impulsni odziv FIR filtra je

$$h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\}.$$

Na ulaz tog filtra dovodimo signal

$$x[n] = \{\underline{-2}, 1, 1, 2\}$$

Ostali uzorci signala i impulsnog odziva su jednaki nuli. Dani filtar želimo izvesti na računalu uz korištenje DFT transformacije u N točaka. Kako time računamo cirkularnu konvoluciju odredi koji N moramo odabrati ako obrađujemo po 6 uzoraka u bloku te provođenjem tog postupka odredi odziv sustava na zadanu pobudu!

Kako obrađujemo 6 uzoraka po bloku potrebno je redom uzimati 6 uzoraka iz signala $x[n]$. Označimo sa $x_m[n]$ takav m-ti isječak, dakle vrijedi:

$$x_m[n] = \begin{cases} x[n+6m], & 0 \leq n < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Na sličan način definiramo i $y_m[n]$ kao 6 uzoraka iz odziva $y[n]$:

$$y_m[n] = \begin{cases} y[n+6m], & 0 \leq n < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odziv određujemo u blokovima duljine 6 uzoraka. Takav način zahtijeva računanje linearne konvolucije isječka signala duljine 6 uzoraka i impulsnog odziva. Kako u DFT_N domeni dobivamo cirkularnu konvoluciju moramo odabrati $N \geq 6+6-1 = 11$. Odaberimo najmanji dozvoljeni N, dakle sada je $N = 11$.
Za svaki blok sada moramo računati:

1. DFT_{11} transformaciju m-tog isječka duljine 6 signala $x[n]$ (nadopunjen nulama do duljine 11).
2. Produkt $\mathrm{DFT}_{11}\big[h[n]\big]\,\mathrm{DFT}_{11}\big[x_m[n]\big]$.
3. Inverznom transformacijom dobivamo niz duljine 11 iz kojeg uzmemo prvih 6 uzoraka te zapamtimo zadnjih 5. Prvih 6 uzoraka preklapamo s zadnjih 5 iz prethodnog bloka te time dobivamo izlaznih 6 uzoraka.

Kako su zadani $x[n]$ i $h[n]$ konačnih trajanja rezultat ima $6+4-1 = 9$ uzoraka različitih od nule. Kako računamo 6 izlaznih uzoraka u jednom bloku dovoljno je odrediti izlaz za prva dva bloka.

Zbog jednostavnosti nećemo izravno računati DFT_{11} i IDFT_{11} nego računamo cirkularnu konvoluciju jer vrijedi

$$\mathrm{IDFT}_{11}\Big[\mathrm{DFT}_{11}\big[h[n]\big]\,\mathrm{DFT}_{11}\big[x_m[n]\big]\Big] = \sum_{i=0}^{10} h[i]x_m\big[\langle n-i\rangle_{11}\big].$$

1. blok $(m = 0)$
Za prvi blok su signali

$$h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_0[n] = \{\underline{-2}, 1, 1, 2, 0, 0\}.$$

Sada množimo transformacije signala u DFT_{11} domeni, odnosno računamo $y_c[n] = h[n] \textcircled{\scriptsize 11}\, x_0[n]$. Za cirkularnu konvoluciju dobivamo

$$y_c[n] = \{\underbrace{\underline{-2}, 1, 3, 3, -2, -5}_{\text{rezultat}}, \underbrace{-1, 1, 2, 0, 0}_{\text{rep ili ostatak}}\}.$$

te je izlaz za prvi blok

$$y_0[n] = \{\underline{-2}, 1, 3, 3, -2, -5\}.$$

2. blok ($m = 1$)
Za drugi blok su signali

$$h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_1[n] = \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Sada množimo transformacije signala u DFT_{11} domeni, odnosno računamo $y_c[n] = h[n] \textcircled{\scriptsize 11}\, x_1[n]$. Za cirkularnu konvoluciju dobivamo

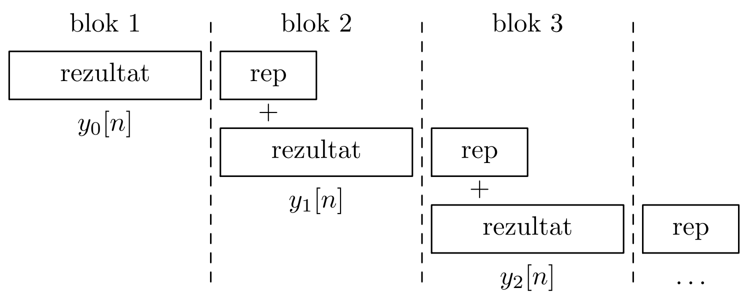
$$y_c[n] = \{\underbrace{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0}_{\text{rezultat}}, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0}_{\text{rep ili ostatak}}\}.$$

te je izlaz za drugi blok

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0\} + \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 0\} \\ &= \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

Ostale blokove ne trebamo računati jer daju na izlazu nulu.

Metodu možemo jednostavno skicirati (vidi sliku 1). Takav način računanja se naziva preklopi-i-zbroji metoda (*overlap-add*). Za slučaj korištenja FFT-a možemo pokazati da je metoda isplativa za FIR filtre 19-og ili većeg reda.



Slika 1: Preklopi i zbroji metoda