DOS – Brza Fourierova transformacija

Tomislav Petković

siječanj 2006.

1. Brza Fourierova transformacija

Zadatak 1.
Kako treba povezati tri bloka za računanje diskretne Fourierove transformacije u dvije točke da se dobije struktura za računanje Fourierove transformacije u 6 točaka?

Trebamo rastaviti izraz za DFT_6

$$\mathrm{DFT}_6\big[x[n]\big] = \sum_{n=0}^{5} x[n]W_6^{nk}$$

na tri sume od koji svaka odgovara DFT_2 transformaciji. To možemo postići na dva načina, decimacijom u vremenu ili decimacijom u frekvenciji.

Za ovaj zadatak koristimo decimaciju u vremenu.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
X[k] = \mathrm{DFT}_6\big[x[n]\big] &= \sum_{n=0}^{5} x[n]W_6^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{1} x[3n]W_6^{3nk} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+1]W_6^{(3n+1)k} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+2]W_6^{(3n+2)k} \\
&= \sum_{n=0}^{1} x[3n]W_2^{nk} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+1]W_2^{nk}W_6^{k} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+2]W_2^{nk}W_6^{2k} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n]W_2^{nk}}_{F[k]=\mathrm{DFT}_2\left[x[3n]\right]} + W_6^{k}\underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n+1]W_2^{nk}}_{G[k]=\mathrm{DFT}_2\left[x[3n+1]\right]} + W_6^{2k}\underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n+2]W_2^{nk}}_{H[k]=\mathrm{DFT}_2\left[x[3n+2]\right]}
\end{aligned}$$

Vidimo da smo dobili $X[k]$ kao kombinaciju tri DFT_2 transformacije. No što s činjenicom da je transformacija $F[k] = \mathrm{DFT}_2\big[x[3n]\big]$ definirna samo za $k = 0, 1$, dok je $X[k] = \mathrm{DFT}_6\big[x[n]\big]$ definirana za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Prisjetite se veze između diskretne Fouirerove transformacije i diskretnog Fouirerovog reda!

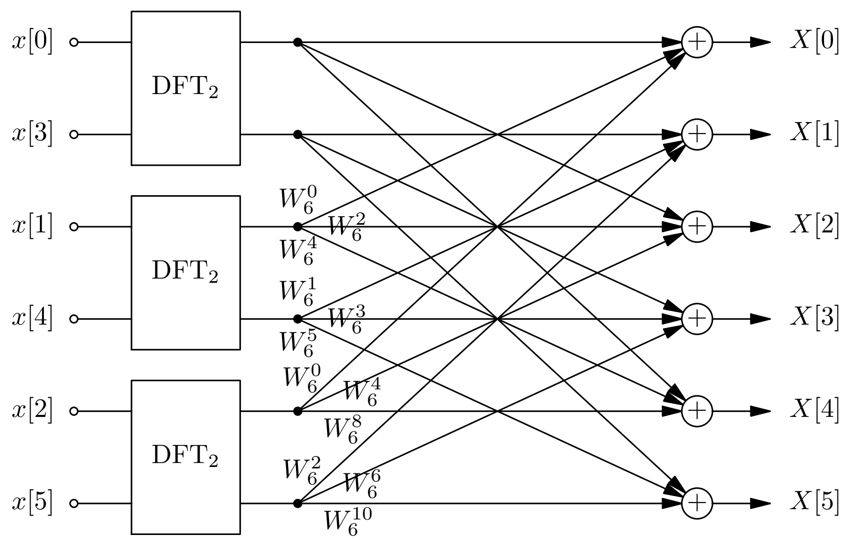
Vrijedi

$$F[0] = F[2] = F[4], \quad G[0] = G[2] = G[4] \quad \text{i} \quad H[0] = H[2] = H[4],$$

te

$$F[1] = F[3] = F[5], \quad G[1] = G[3] = G[5] \quad \text{i} \quad H[1] = H[3] = H[5].$$

Uzimanjem toga u obzir dobivamo strukturu prikazanu na slici 1.



Slika 1: Decimacija u vremenu

Povijest FFT-a:

- prvi put se sličan algoritam spominje u Gaussovom tekstu "Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata" 1805. godine
- više nezavisnih spominjanja u raznim radovima
- Cooley i Tukey opisuju FFT algoritam 1965. godine zajedno s detaljima implementacije na računalu

Danielson-Lanczosova lema

Diskretna Fourierova transformacija duljine N gdje je N paran broj se može zapisati kao zbroj dvije diskretne Fouirerove transformacije od kojih je svaka duljine $N/2$. Prva se sastoji od parnih uzoraka niza, a druga od neparnih (decimacija u vremenu). Neka je k-ti uzorak diskretne Fourierove transformacije

$X[k]$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{nk} \\
&= X_p[n] + W_N^k X_n[n]
\end{aligned}$$

Prisjetite se da diskretnu Fourierovu transformaciju možemo predstaviti preko matrice transformacije

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{1\cdot 0} & \dots & W_N^{(N-1)\cdot 0} \\ W_N^{0\cdot 1} & W_N^{1\cdot 1} & \dots & W_N^{(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{0\cdot (N-1)} & W_N^{1\cdot (N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)\cdot (N-1)} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathbf{F}_N$ je Vandermondeova, a ako je normiramo s $\frac{1}{\sqrt{N}}$ postaje unitarna.

Za matricu $\mathbf{F}_{2N}$ vrijedi rastav

$$\mathbf{F}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{D}_N \\ \mathbf{D}_N & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N & \\ & \mathbf{F}_N \end{bmatrix} \mathbf{P},$$

gdje je $\mathbf{I}_N$ jedinična matrica, $\mathbf{D}_N$ dijagonalna matrica s elementima W_N^0, W_N^1, W_N^2,…, W_N^{N-1} na glavnoj dijagonali i $\mathbf{P}$ permutacijska matrica koja prvo selektira parne retke, a zatim neparne retke.

Zadatak 2.

Za slučaj iz prethodnog zadatka pokaži način povezivanja za decimaciju u vremenu i za decimaciju u frekvenciji.

Decimaciju u vremenu smo već pokazali pa nam preostaje samo napraviti decimaciju u frekvenciji.

Potrebno je opet rastaviti izraz za DFT_6 na tri sume od koji svaka odgovara DFT_2 transformaciji. Za razliku od prvog zadatka umjesto uzimanja svakog trećeg uzorka ulaznog signala $x[n]$ mi ćemo grupirati po tri uzorka zajedno.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
X[k] = \mathrm{DFT}_6\big[x[n]\big] &= \sum_{n=0}^{5} x[n] W_6^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{1} x[n] W_6^{nk} + \sum_{n=0}^{1} x[n+2] W_6^{(n+2)k} + \sum_{n=0}^{1} x[n+4] W_6^{(n+4)k} \\
&= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2] W_6^{2k} + x[n+4] W_6^{4k}\big) W_6^{nk}
\end{aligned}$$

Iz dobivenog izraza se ne vidi rastav sve dok ne provedete decimaciju u frekvenciji (odnosno uzmete svaki treći uzorak spektra).

Raspišimo sada dobiveni izraz za spektar kada decimiramo $X[k]$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
X[3k] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2]W_6^{6k} + x[n+4]W_6^{12k}\big) W_6^{n3k} \\
X[3k+1] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2]W_6^{6k+2} + x[n+4]W_6^{12k+4}\big) W_6^{n(3k+1)} \\
X[3k+2] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2]W_6^{6k+4} + x[n+4]W_6^{12k+8}\big) W_6^{n(3k+2)}
\end{aligned}$$

Iskorištavanjem svojstava kompleksne eksponencijale za koju vrijedi $W_N^{Nk} = 1$ sada možemo pojednostavniti dobivene izraze.

Za rastav dobivamo:

$$\begin{aligned}
X[3k] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2] + x[n+4]\big) W_2^{nk} \\
&= \mathrm{DFT}_2\big[x[n] + x[n+2] + x[n+4]\big] \\
X[3k+1] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2]W_3^{1} + x[n+4]W_3^{2}\big) W_6^{n} W_2^{nk} \\
&= \mathrm{DFT}_2\big[\big(x[n] + x[n+2]W_3^{1} + x[n+4]W_3^{2}\big) W_6^{n}\big] \\
X[3k+2] &= \sum_{n=0}^{1} \big(x[n] + x[n+2]W_3^{2} + x[n+4]W_3^{4}\big) W_6^{2n} W_2^{nk} \\
&= \mathrm{DFT}_2\big[\big(x[n] + x[n+2]W_3^{2} + x[n+4]W_3^{4}\big) W_6^{2n}\big]
\end{aligned}$$

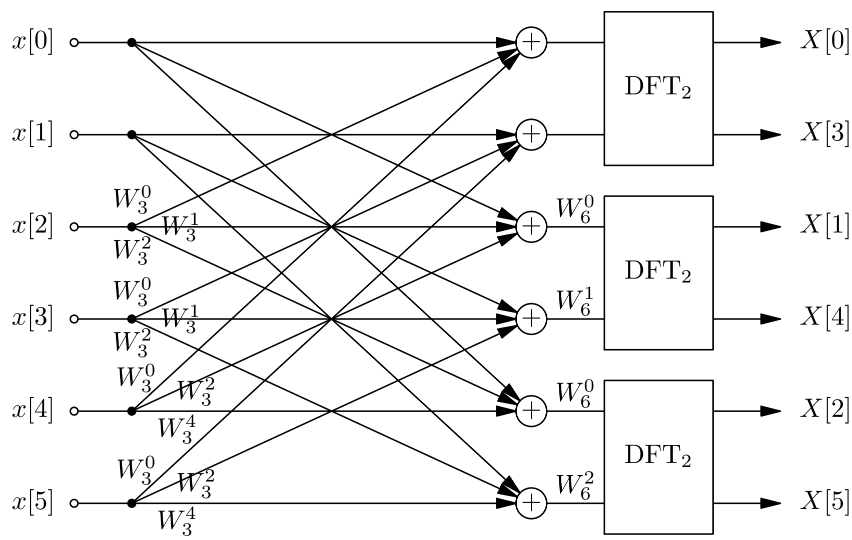
Dobivena struktura je nacrtana na slici 2.

Zadatak 3.

Ako raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u 5 točaka kako ih je potrebno povezati da dobijemo strukturu za računanje DFT-a u 10 točaka? Za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

odredite izlaz iz svakog bloka za računanje DFT-a u 5 točaka i konačnu transformaciju.



Slika 2: Decimacija u frekvenciji

Koristimo decimaciju u vremenu. Vrijedi

$$\begin{aligned} X[k] = \mathrm{DFT}_{10}\big[x[n]\big] &= \sum_{n=0}^{9} x[n]W_{10}^{nk} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{4} x[2n]W_5^{nk}}_{X_p[k]} + W_{10}^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{4} x[2n+1]W_5^{nk}}_{X_n[k]} \end{aligned}$$

Dobivena struktura je prikazana na slici 3.

U prvi blok ulazi signal $x_p[n] = x[2n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0\}$, dok u drugi blok ulazi signal $x_n[n] = x[2n+1] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0\}$. Izlazi iz blokova su:

$$\begin{aligned} X_p[k] &= \mathrm{DFT}_5\big[x_p[n]\big] = 1W_5^{0\cdot 1} = 1 \\ X_n[k] &= \mathrm{DFT}_5\big[x_n[n]\big] = 1W_5^{0\cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

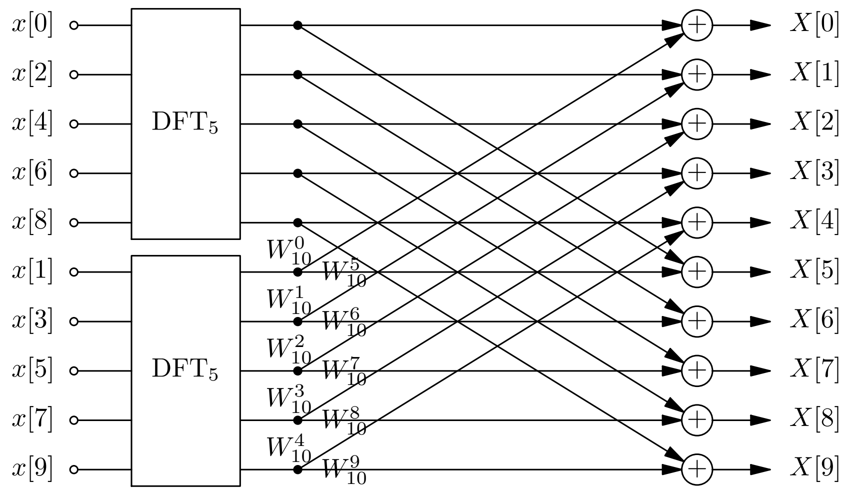
Konačna transformacija je kombinacija $X_p[k]$ i $X_n[k]$

$$X[k] = X_p[k] + W_{10}^{k} X_n[k] = 1 + W_{10}^{k}.$$

Zadatak 4.

Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0\}$$



Slika 3: Povezivanje dva DFT_5 bloka za računanje DFT_{10}

računanjem samo jedne kompleksne diskretne Fourierove transformacije (RE2FFT postupak).

Koristimo RE2FFT postupak:

1. stvaramo kompleksni niz $x_1[n] + jx_2[n]$,
2. računamo DFT_N tako dobivenog niza
3. kombiniramo realni i imaginarni dio dobivene transformacije kako bi dobili $X_1[k]$ i $X_2[k]$

Odredimo najprije DFT_4 transformaciju niza

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n] = \{\underline{1+j}, 0, 0, 0\}.$$

Sada je

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = (1+j)W_4^{0k} = 1 + j.$$

Spektar $X_1[k]$ dobivamo kombinacijom spektra $X[k]$ i zrcaljenog spektra. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\big[X_1[k]\big] &= \mathrm{Re}[X[k]] + \mathrm{Re}[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}\big[X_1[k]\big] &= \mathrm{Im}[X[k]] - \mathrm{Im}[X[4-k]] \end{aligned}$$

Dobivamo

$$2\,\mathrm{Re}\big[X_1[k]\big] = \{\underline{2}, 2, 2, 2\} \quad \text{i} \quad 2\,\mathrm{Im}\big[X_1[k]\big] = \{\underline{0}, 0, 0, 0\}$$

te je

$$X_1[k] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}.$$

Spektar $X_2[k]$ opet dobivamo kombinacijom spektra $X[k]$ i zrcaljenog spektra. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\big[X_2[k]\big] &= \mathrm{Im}[X[k]] + \mathrm{Im}[X[4-k]] \\ -2\,\mathrm{Im}\big[X_2[k]\big] &= \mathrm{Re}[X[k]] - \mathrm{Re}[X[4-k]] \end{aligned}$$

Dobivamo

$$2\,\mathrm{Re}\big[X_2[k]\big] = \{\underline{2}, 2, 2, 2\} \quad \text{i} \quad -2\,\mathrm{Im}\big[X_2[k]\big] = \{\underline{0}, 0, 0, 0\}$$

te je

$$X_2[k] = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}.$$

Implementacija na računalu
Nije potrebno otkrivati toplu vodu – drugi su prije vas već napravili optimalne implementacije FFT algoritma.

FFTW bibilioteka napisana u C i razvijena na MIT-u (Matteo Frigo i Steven G. Johnson):

- `http://www.fftw.org/`
- slobodno dostupna (GNU GPL)