

# DOS – Fourierova transformacija i spektri

Tomislav Petković

listopad 2005.

## Zadatak 1.

Odredi Fourierovu transformaciju signala

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq x \leq T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je

$$x(t) \text{ --- } X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

i

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

## Zadatak 1.

Odredi Fourierovu transformaciju signala

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq x \leq T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je

$$x(t) \text{ --- } X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

i

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Fourierovu transformaciju danog signala računamo po definiciji.  
Sada je:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega T} - \frac{1}{-j\omega} e^{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Za signal  $x_{2T}(t)$  trajanja  $2T$  vrijedi

$$x_{2T}(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right),$$

dok za signal  $x_T(t)$  trajanja  $T$  vrijedi

$$x_T(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Fourierovu transformaciju danog signala računamo po definiciji.  
Sada je:

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T \\
 &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega T} - \frac{1}{-j\omega} e^{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\
 &= 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

Za signal  $x_{2T}(t)$  trajanja  $2T$  vrijedi

$$x_{2T}(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right),$$

dok za signal  $x_T(t)$  trajanja  $T$  vrijedi

$$x_T(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Fourierovu transformaciju danog signala računamo po definiciji. Sada je:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega T} - \frac{1}{-j\omega} e^{j\omega T} = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= 2 \frac{\sin(\omega T)}{\omega} = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \end{aligned}$$

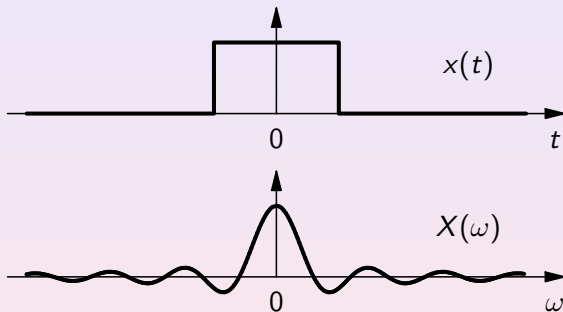
Za signal  $x_{2T}(t)$  trajanja  $2T$  vrijedi

$$x_{2T}(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right),$$

dok za signal  $x_T(t)$  trajanja  $T$  vrijedi

$$x_T(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right).$$

Signal i spektar su prikazani na slici 1.



Slika: Signal i njegov spektar

## Zadatak 2.

Odredite razvoj u Fourierov red signala koji je dobiven periodizacijom signala iz prethodnog zadatka s periodom  $T_P$  pri čemu je  $T_P > 2T$ . Skicirajte dobiveni spektar i usporedite ga sa spektrom signala iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t) e^{-j\omega_P k t} dt$$

i

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{j\omega_P k t}.$$



## Zadatak 2.

Odredite razvoj u Fourierov red signala koji je dobiven periodizacijom signala iz prethodnog zadatka s periodom  $T_P$  pri čemu je  $T_P > 2T$ . Skicirajte dobiveni spektar i usporedite ga sa spektrom signala iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x(t) \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \frac{1}{T_P} \int_{T_P} x(t) e^{-j\omega_P k t} dt$$

i

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{j\omega_P k t}.$$

Opet računamo po definiciji:

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \frac{1}{T_P} \int_{\text{po periodu}} x(t) e^{-2\pi jkt/T_P} dt \\
 &= \frac{1}{T_P} \int_{-T}^T e^{-2\pi jkt/T_P} dt = \frac{1}{T_P} \frac{T_P}{-2\pi jk} e^{-2\pi jkt/T_P} \Bigg|_{-T}^T \\
 &= \frac{1}{\pi k} \sin\left(2\pi k \frac{T}{T_P}\right) = 2 \frac{T}{T_P} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_P k T}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

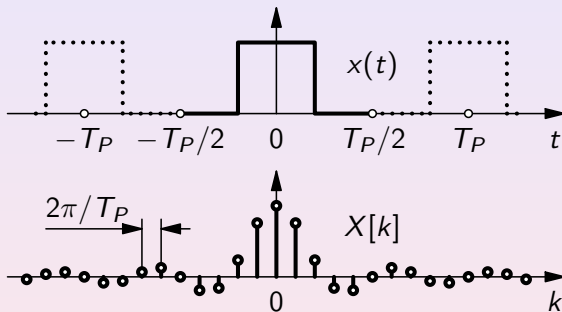
Vidimo da dobiveni spektar oblikom odgovara otipkanom spektru signala iz prošlog zadatka.

Opet računamo po definiciji:

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \frac{1}{T_P} \int_{\text{po periodu}} x(t) e^{-2\pi jkt/T_P} dt \\
 &= \frac{1}{T_P} \int_{-T}^T e^{-2\pi jkt/T_P} dt = \frac{1}{T_P} \frac{T_P}{-2\pi jk} e^{-2\pi jkt/T_P} \Big|_{-T}^T \\
 &= \frac{1}{\pi k} \sin\left(2\pi k \frac{T}{T_P}\right) = 2 \frac{T}{T_P} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_P k T}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

Vidimo da dobiveni spektar oblikom odgovara otipkanom spektru signala iz prošlog zadatka.

Signal i spektar su prikazani na slici 2.



Slika: Signal i njegov spektar

## Zadatak 3.

Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju  $\mathcal{F}_{\text{vd}}$  signala

$$x[n] = \delta[n].$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \text{ --- } X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

## Zadatak 3.

Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju  $\mathcal{F}_{\text{vd}}$  signala

$$x[n] = \delta[n].$$

Skicirajte dobiveni spektar.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \text{ --- } X(\omega),$$

pri čemu je

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega.$$

Spektar računamo prema definiciji:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1.$$

Provjerimo inverznom transformacijom jesmo li dobili ispravan rezultat:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} (e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}) \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi) = \text{sinc}(n) = \delta[n] \end{aligned}$$

Primijetite da funkcija  $\text{sinc}(n)$  poprima vrijednost nula za svaki cijelobrojni  $n$  različit od nule.

Spektar računamo prema definiciji:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} = 1.$$

Provjerimo inverznom transformacijom jesmo li dobili ispravan rezultat:

$$\begin{aligned}x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} (e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}) \\&= \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi) = \text{sinc}(n) = \delta[n]\end{aligned}$$

Primijetite da funkcija  $\text{sinc}(n)$  poprima vrijednost nula za svaki cijelobrojni  $n$  različit od nule.



### Zadatak 4.

Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju periodički proširenog signala iz prethodnog zadatka uz period  $N > 1$ . Skicirajte dobiveni spektar i usporedite ga sa spektrom iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \circ \bullet X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2\pi jkn/N}.$$

## Zadatak 4.

Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju periodički proširenog signala iz prethodnog zadatka uz period  $N > 1$ . Skicirajte dobiveni spektar i usporedite ga sa spektrom iz prethodnog zadatka.

Fourierov transformacijski par je sada

$$x[n] \text{ } \circ \text{---} \bullet \text{ } X[k],$$

pri čemu je

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi jkn/N}$$

i

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{2\pi jkn/N}.$$

Spektar računamo prema definiciji:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi jkn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]e^{-2\pi jkn/N} = e^{-2\pi jk0/N} = 1.$$

Iako smo naizgled dobili jednaki rezultat kao u prethodnom zadatku primijetite da je u ovom slučaju domena diskretna te spektar poprima vrijednost 1 samo za cjelobrojni  $k$ .