DOS – Otipkavanje i kvantizacija

Tomislav Petković

listopad 2005.

Zadatak 1.

Otipkaj kontinuirane signale frekvencija 3, 7 i 13 Hz određene s

$$x_1(t) = \cos(6\pi t), \quad x_2(t) = \cos(14\pi t) \quad \text{i} \quad x_3(t) = \cos(26\pi t)$$

ako je frekvencija otipkavanja $f_s = 10\,\text{Hz}$, tj. ako je period otipkavanja $T_s = 0{,}1\,\text{s}$. Nacrtaj i usporedi otipkane nizove.

Otipkavanje signala dobivamo:

$$x_1[n] = x_1(nT_s) = \cos(6\pi n T_s) = \cos(0{,}6\pi n)$$
$$x_2[n] = x_2(nT_s) = \cos(14\pi n T_s) = \cos(1{,}4\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)$$
$$x_3[n] = x_3(nT_s) = \cos(26\pi n T_s) = \cos(2{,}6\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)$$

Vidimo da smo otipkavanjem dobili tri identična signala što nam predstavlja problem jer ne možemo uvijek jednoznačno rekonstuirati polazni kontinuirani signal.

Otipkavanjem signala dobivamo:

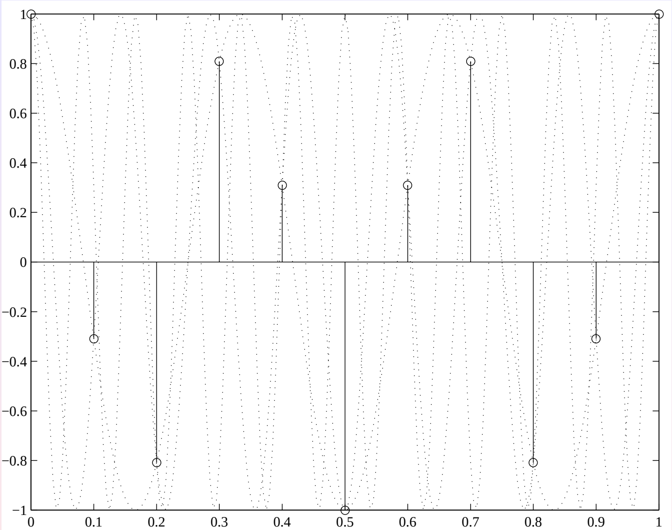
$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= x_1(nT_s) = \cos(6\pi nT_s) = \cos(0{,}6\pi n)\\
x_2[n] &= x_2(nT_s) = \cos(14\pi nT_s) = \cos(1{,}4\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)\\
x_3[n] &= x_3(nT_s) = \cos(26\pi nT_s) = \cos(2{,}6\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)
\end{aligned}
$$

Vidimo da smo otipkavanjem dobili tri identična signala što nam predstavlja problem jer ne možemo uvijek jednoznačno rekonstuirati polazni kontinuirani signal.

Otipkavanjem signala dobivamo:

$$x_1[n] = x_1(nT_s) = \cos(6\pi nT_s) = \cos(0{,}6\pi n)$$
$$x_2[n] = x_2(nT_s) = \cos(14\pi nT_s) = \cos(1{,}4\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)$$
$$x_3[n] = x_3(nT_s) = \cos(26\pi nT_s) = \cos(2{,}6\pi n - 2\pi n) = \cos(0{,}6\pi n)$$

Vidimo da smo otipkavanjem dobili tri identična signala što nam predstavlja problem jer ne možemo uvijek jednoznačno rekonstuirati polazni kontinuirani signal.



Slika: Tri kontinuirana signala i rezultat otipkavanja

Zadatak 2.

Signal

$$x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos(24000\pi t + \pi/3) + \sin(16000\pi t)$$

otipkan je frekvencijom otipkavanja $f_s = 10\,\mathrm{kHz}$. Odredite vremenski oblik signala nakon rekonstrukcije idealnim interpolatorom.

Kako promatramo linearnu kombinaciju sinusoida možemu svaku analizirati odvojeno. Prvo provjeravamo je li došlo do preklapanja spektra.

Polovina frekvencije otipkavanja je $f_s/2 = 5\,\mathrm{kHz}$. Kako su frekvencije zadanih sinusoida $4\,\mathrm{kHz}$, $12\,\mathrm{kHz}$ i $8\,\mathrm{kHz}$ samo za prvu sinusoidu $x_1(t)$ frekvencije $4\,\mathrm{kHz}$ ne dolazi do preklapanja spektra. Rezultat rekonstrukcije za ostale dvije sinusoide moramo izračunati.

Kako promatramo linearnu kombinaciju sinusoida možemu svaku analizirati odvojeno. Prvo provjeravamo je li došlo do preklapanja spektra.
Polovina frekvencije otipkavanja je $f_s/2 = 5\,\mathrm{kHz}$. Kako su frekvencije zadanih sinusoida $4\,\mathrm{kHz}$, $12\,\mathrm{kHz}$ i $8\,\mathrm{kHz}$ samo za prvu sinusoidu $x_1(t)$ frekvencije $4\,\mathrm{kHz}$ ne dolazi do preklapanja spektra. Rezultat rekonstrukcije za ostale dvije sinusoide moramo izračunati.

Za drugu sinusoidu vrijedi

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = 2\cos(24000\pi n T_s + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3).$$

Primijetite da dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta, odnosno vrijedi

$$2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3 + 2\pi n k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je kofecijent uz n iz intervala $[-\pi, \pi]$. Odabiremo $k = -1$ te je otipkani signal

$$x_2[n] = 2\cos(0{,}4\pi n + \pi/3).$$

Rekonstruirani signal je

$$x_{2R}(t) = 2\cos(0{,}4\pi t f_s + \pi/3) = 2\cos(4000\pi t + \pi/3).$$

Vidimo da je frekvencija rekonstuiranog signala 2 kHz.

Za drugu sinusoidu vrijedi

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = 2\cos(24000\pi nT_s + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3).$$

Primijetite da dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta, odnosno vrijedi

$$2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3 + 2\pi nk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je kofecijent uz n iz intervala $[-\pi, \pi]$. Odabiremo $k = -1$ te je otipkani signal

$$x_2[n] = 2\cos(0{,}4\pi n + \pi/3).$$

Rekonstruirani signal je

$$x_{2R}(t) = 2\cos(0{,}4\pi t f_s + \pi/3) = 2\cos(4000\pi t + \pi/3).$$

Vidimo da je frekvencija rekonstuiranog signala 2 kHz.

Za drugu sinusoidu vrijedi

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = 2\cos(24000\pi nT_s + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3).$$

Primijetite da dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta, odnosno vrijedi

$$2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3 + 2\pi nk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je kofecijent uz n iz intervala $[-\pi, \pi]$. Odabiremo $k = -1$ te je otipkani signal

$$x_2[n] = 2\cos(0{,}4\pi n + \pi/3).$$

Rekonstruirani signal je

$$x_{2R}(t) = 2\cos(0{,}4\pi t f_s + \pi/3) = 2\cos(4000\pi t + \pi/3).$$

Vidimo da je frekvencija rekonstuiranog signala 2 kHz.

Za drugu sinusoidu vrijedi

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = 2\cos(24000\pi n T_s + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3).$$

Primijetite da dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta, odnosno vrijedi

$$2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3) = 2\cos(2{,}4\pi n + \pi/3 + 2\pi nk), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je kofecijent uz n iz intervala $[-\pi, \pi]$. Odabiremo $k = -1$ te je otipkani signal

$$x_2[n] = 2\cos(0{,}4\pi n + \pi/3).$$

Rekonstruirani signal je

$$x_{2R}(t) = 2\cos(0{,}4\pi t f_s + \pi/3) = 2\cos(4000\pi t + \pi/3).$$

Vidimo da je frekvencija rekonstuiranog signala 2 kHz.

Na jednak način računamo izgled rekonstruiranog signala $x_3(t)$ frekvencije 8 kHz. Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
x_{1R}(t) &= \sin(8000\pi t) \\
x_{2R}(t) &= 2\cos(4000\pi t + \pi/3) \\
x_{3R}(t) &= \sin(4000\pi t + \pi)
\end{aligned}
$$

Signal nakon rekonstrukcije je

$$x_R(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos(4000\pi t + \pi/3) + \sin(4000\pi t + \pi).$$

Na jednak način računamo izgled rekonstruiranog signala $x_3(t)$ frekvencije 8 kHz. Dobivamo:

$$\begin{aligned} x_{1R}(t) &= \sin(8000\pi t) \\ x_{2R}(t) &= 2\cos(4000\pi t + \pi/3) \\ x_{3R}(t) &= \sin(4000\pi t + \pi) \end{aligned}$$

Signal nakon rekonstrukcije je

$$x_R(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos(4000\pi t + \pi/3) + \sin(4000\pi t + \pi).$$

Zadatak 3.

Za konačni niz

$$x[n] = \{\underline{1}, 2, -1, 2\}$$

odredite interpolacijsku funkciju oblika sinc. Izračunajte vrijednost interpolacijske funkcije za $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ uz period otipkavanja $T = 1\,\mathrm{s}$.

U idealnom slučaju polazni otipkani kontinuirani signal dobivamo propuštanjem diskretnog signala kroz idealni nisko-propusni filtar. Impulsni odziv idealnog nisko-propusnog filtra je oblika sinc funkcije te se ona koristi kao interpolacijska funkcija.

Opisani postupak možemo prikazati kao konvoluciju, odnosno vrijedi

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

ili raspisano

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin\left(\pi \frac{t - nT_s}{T_s}\right)}{\pi \frac{t - nT_s}{T_s}}$$

U idealnom slučaju polazni otipkani kontinuirani signal dobivamo propuštanjem diskretnog signala kroz idealni nisko-propusni filtar. Impulsni odziv idealnog nisko-propusnog filtra je oblika sinc funkcije te se ona koristi kao interpolacijska funkcija.
Opisani postupak možemo prikazati kao konvoluciju, odnosno vrijedi

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

ili raspisano

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin\left(\pi \dfrac{t - nT_s}{T_s}\right)}{\pi \dfrac{t - nT_s}{T_s}}$$

Za zadani signal sada je

$$\begin{aligned} x_r(t) &= x[0]\,\mathrm{sinc}(t) + x[1]\,\mathrm{sinc}(t-1) \\ &\quad + x[2]\,\mathrm{sinc}(t-2) + x[3]\,\mathrm{sinc}(t-3) \\ &= \mathrm{sinc}(t) + 2\,\mathrm{sinc}(t-1) - \mathrm{sinc}(t-2) + 2\,\mathrm{sinc}(t-3) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ dobivamo

$$\begin{aligned} x_r(1{,}5\,\mathrm{s}) &= \mathrm{sinc}(1{,}5) + 2\,\mathrm{sinc}(0{,}5) - \mathrm{sinc}(-0{,}5) + 2\,\mathrm{sinc}(-1{,}5) \\ &= -\frac{2}{3\pi} + 2\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + 2\frac{-2}{3\pi} = 0 \end{aligned}$$

Za zadani signal sada je

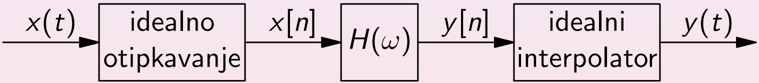
$$\begin{aligned} x_r(t) &= x[0]\operatorname{sinc}(t) + x[1]\operatorname{sinc}(t-1) \\ &\quad + x[2]\operatorname{sinc}(t-2) + x[3]\operatorname{sinc}(t-3) \\ &= \operatorname{sinc}(t) + 2\operatorname{sinc}(t-1) - \operatorname{sinc}(t-2) + 2\operatorname{sinc}(t-3) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $t = 1{,}5\,\mathrm{s}$ dobivamo

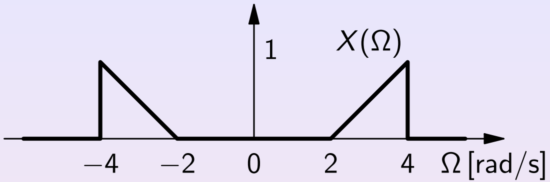
$$\begin{aligned} x_r(1{,}5\,\mathrm{s}) &= \operatorname{sinc}(1{,}5) + 2\operatorname{sinc}(0{,}5) - \operatorname{sinc}(-0{,}5) + 2\operatorname{sinc}(-1{,}5) \\ &= -\frac{2}{3\pi} + 2\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + 2\frac{-2}{3\pi} = 0 \end{aligned}$$

Zadatak 4.

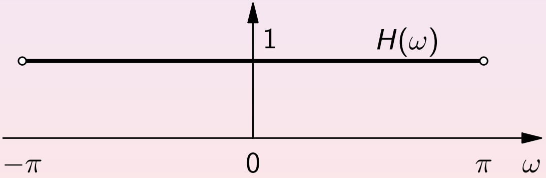
Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?



Slika: Sustav za obradbu signala



Slika: Spektar kontinuiranog signala



Slika: Prijenosna funkcija digitalnog filtra

Zadatak 5.

Ponekad je potrebno promijeniti frekvenciju otipkavanja signala nakon što je signal otipkan. Povećavamo li frekvenciju otipkavanja govorimo o pretipkavanju i interpolaciji signala, a smanjujemo li frekvenciju otipkavanja govorimo o podtipkavanju i decimaciji signala.

Razmotrite najjednostavniji interpolator koji samo povećava frekvenciju otipkavanja ubacivanjem nula između uzoraka. Takav sustav je opisan izrazom

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & n/L \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Odredi odnos između spektara nizova $x[n]$ i $y[n]$.

Odredimo $\mathcal{Z}$ transformaciju signala $y[n]$. Vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n/L\in\mathbb{Z}} x[n/L]z^{-n}$$

Zamijenimo sada n/L sa m. Dobivamo pretipkani spektar

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-Lm} = X(z^L).$$

Fourierovu transformaciju dobivamo ako zamijenimo z sa $e^{j\omega}$. Tada je

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega nL} = X(e^{j\omega L}).$$

Odredimo $\mathcal{Z}$ transformaciju signala $y[n]$. Vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n/L\in\mathbb{Z}} x[n/L]z^{-n}$$

Zamijenimo sada n/L sa m. Dobivamo pretipkani spektar

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]z^{-Lm} = X(z^L).$$

Fourierovu transformaciju dobivamo ako zamijenimo z sa $e^{j\omega}$.
Tada je

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega nL} = X(e^{j\omega L}).$$

Za podtipkavanje ostavljamo svaki M-ti uzorak,

$$y[n] = x[nM],$$

pa dobivamo

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k})$$

(izvedite za vježbu).

Slika: Promjena frekvencije otipkavanja

Za podtipkavanje ostavljamo svaki M-ti uzorak,

$$y[n] = x[nM],$$

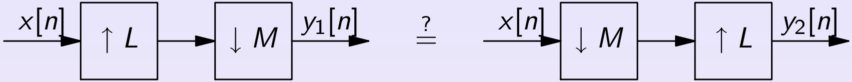
pa dobivamo

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^{-k})$$

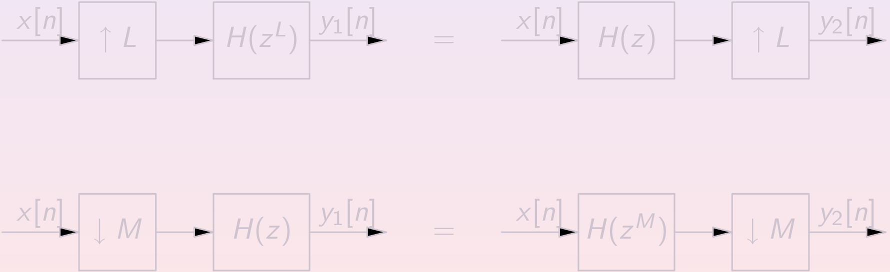
(izvedite za vježbu).

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

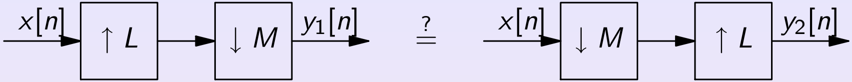
Slika: Promjena frekvencije otipkavanja



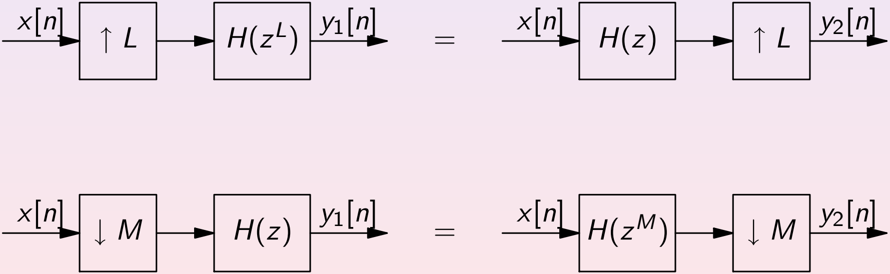
Slika: Zamjena mjesta u kaskadi (M i L su relativno prosti)



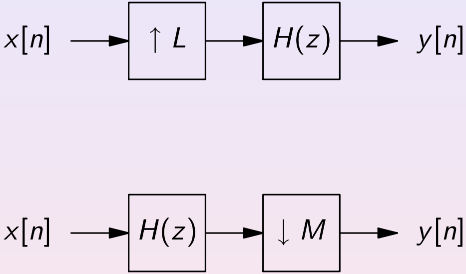
Slika: Ekvivalentne kaskade



Slika: Zamjena mjesta u kaskadi (M i L su relativno prosti)



Slika: Ekvivalentne kaskade



Slika: Interpolator i decimator

Zadatak 6.

Kvantizirajte niz brojeva

$$x[n] = \{0{,}12, 1{,}10, -6{,}08, 5{,}99, -7{,}78, -8{,}58, 8{,}01, 7{,}97\}$$

ako raspolažete s 4 bita za prikaz broja u obliku dvojnog komplementa (3 bita i predznak). Koristite slijedeće metode kvantizacije:

1. zaokruživanje na najbliži cijeli broj (`round`),
2. odsijecanje prema dolje (`floor`),
3. odsijecanje prema gore (`ceil`) i
4. odsijecanje prema nuli (`fix`).

Raspolažemo li s B bita možemo prikazati brojeve u rasponu

$$[-2^{B-1}, 2^{B-1} - 1].$$

Za zadani niz dobivamo:

x	0,12	1,10	−6,08	5,99	−7,78	−8,58	8,01	7,97
round(x)	0	1	−7	6	−8	−9	8	8
$\lfloor x \rfloor$	0	1	−7	5	−8	−9	8	7
$\lceil x \rceil$	1	2	−6	6	−7	−8	9	8
fix(x)	0	1	−6	5	−7	−8	8	7

Kako raspolažemo s rasponom od −8 do 7 vrijednosti 8 i 9 postaju 7 dok −9 postaje −8 (kvantizacija s zasićenjem, lošije rješenje bi bilo prematanje za koje 8 postaje −8).

Raspolažemo li s B bita možemo prikazati brojeve u rasponu

$$[-2^{B-1}, 2^{B-1} - 1].$$

Za zadani niz dobivamo:

x	0,12	1,10	$-6{,}08$	5,99	$-7{,}78$	$-8{,}58$	8,01	7,97
round(x)	0	1	-7	6	-8	-9	8	8
$\lfloor x \rfloor$	0	1	-7	5	-8	-9	8	7
$\lceil x \rceil$	1	2	-6	6	-7	-8	9	8
fix(x)	0	1	-6	5	-7	-8	8	7

Kako raspolažemo s rasponom od -8 do 7 vrijednosti 8 i 9 postaju 7 dok -9 postaje -8 (kvantizacija s zasićenjem, lošije rješenje bi bilo prematanje za koje 8 postaje -8).

Zadatak 7.

Kvantiziramo kontinuirani signal s faktorom ispune $\gamma = 5$. Odredi SNR za taj signal ako ga kvantiziramo s $r = 1, 2, 4, 8$ i 16 bitova. Skiciraj ovisnost SNR o broju bitova r.

Za signal $x(t)$ s faktorom ispune γ uz pretpostavku nezavisnosti signala $x(t)$ i pogreške kvantizacije odnos signal/šum je

$$\mathrm{SNR} = 20r\log_{10}(2) + 10\log_{10}\left(\frac{3}{\gamma^2}\right).$$

Uz zadani faktor ispune $\gamma = 5$ dobivamo $10\log_{10}(3\gamma^{-2}) = -9{,}21\,\mathrm{dB}$. Sada je

$$\begin{aligned}
r = 1: &\quad \mathrm{SNR} = -3{,}19\,\mathrm{dB}\\
r = 2: &\quad \mathrm{SNR} = 2{,}83\,\mathrm{dB}\\
r = 4: &\quad \mathrm{SNR} = 14{,}87\,\mathrm{dB}\\
r = 8: &\quad \mathrm{SNR} = 38{,}96\,\mathrm{dB}\\
r = 16: &\quad \mathrm{SNR} = 87{,}12\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Karakteristika je linearna po varijabli r i prikazana je na slici 9.

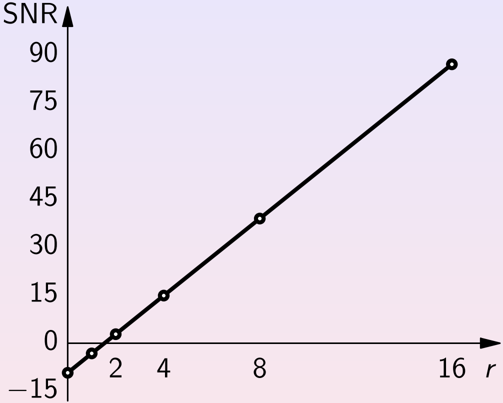
Za signal $x(t)$ s faktorom ispune γ uz pretpostavku nezavisnosti signala $x(t)$ i pogreške kvantizacije odnos signal/šum je

$$\mathrm{SNR} = 20r\log_{10}(2) + 10\log_{10}\left(\frac{3}{\gamma^2}\right).$$

Uz zadani faktor ispune $\gamma = 5$ dobivamo $10\log_{10}(3\gamma^{-2}) = -9{,}21\,\mathrm{dB}$. Sada je

$$\begin{aligned}
r = 1: &\quad \mathrm{SNR} = -3{,}19\,\mathrm{dB}\\
r = 2: &\quad \mathrm{SNR} = 2{,}83\,\mathrm{dB}\\
r = 4: &\quad \mathrm{SNR} = 14{,}87\,\mathrm{dB}\\
r = 8: &\quad \mathrm{SNR} = 38{,}96\,\mathrm{dB}\\
r = 16: &\quad \mathrm{SNR} = 87{,}12\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Karakteristika je linearna po varijabli r i prikazana je na slici 9.



Slika: Ovisnost SNR o broju bitova r