DOS – Projektiranje FIR filtara

Tomislav Petković

studeni 2005.

Zadatak 1.

Zadan je impulsni odziv FIR filtra

$$h[n] = \{\underline{1}, \sqrt{3}, 1\}.$$

Odredite:

1. jednadžbu diferencija koja opisuje zadani filtar,
2. prijenosnu funkciju u $\mathcal{Z}$-domeni $H(z)$ te položaj polova i nula sustava i
3. amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku te grupno vrijeme kašnjenja.

Nacrtajte realizaciju danog sustava.

FIR filtri su filtri s konačnim impulsnim odzivom. Opisani su diferencijalnom jednadnžbom oblika

$$a_0 y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \ldots + b_k u[n-k].$$

Impulsni odziv filtra je odziv na pobudu $\delta[n]$ te nam za FIR filtre koeficijenti impulsnog odziva odgovaraju nizu

$$h[n] = \left\{ \frac{b_0}{a_0}, \frac{b_1}{a_0}, \ldots, \frac{b_k}{a_0} \right\}$$

koji je sastavljen od koeficijenata jednadžbe.
Za zadani impulsni odziv $h[n] = \{\underline{1}, \sqrt{3}, 1\}$ dobivamo jednadžbu diferencija

$$y[n] = u[n] + \sqrt{3}u[n-1] + u[n-2].$$

FIR filtri su filtri s konačnim impulsnim odzivom. Opisani su diferencijalnom jednadnžbom oblika

$$a_0 y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \ldots + b_k u[n-k].$$

Impulsni odziv filtra je odziv na pobudu $\delta[n]$ te nam za FIR filtre koeficijenti impulsnog odziva odgovaraju nizu

$$h[n] = \left\{ \frac{b_0}{a_0}, \frac{b_1}{a_0}, \ldots, \frac{b_k}{a_0} \right\}$$

koji je sastavljen od koeficijenata jednadžbe.

Za zadani impulsni odziv $h[n] = \{\underline{1}, \sqrt{3}, 1\}$ dobivamo jednadžbu diferencija

$$y[n] = u[n] + \sqrt{3}u[n-1] + u[n-2].$$

FIR filtri su filtri s konačnim impulsnim odzivom. Opisani su diferencijalnom jednadnžbom oblika

$$a_0 y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + b_2 u[n-2] + \ldots + b_k u[n-k].$$

Impulsni odziv filtra je odziv na pobudu $\delta[n]$ te nam za FIR filtre koeficijenti impulsnog odziva odgovaraju nizu

$$h[n] = \left\{ \frac{b_0}{a_0}, \frac{b_1}{a_0}, \ldots, \frac{b_k}{a_0} \right\}$$

koji je sastavljen od koeficijenata jednadžbe.
Za zadani impulsni odziv $h[n] = \{\underline{1}, \sqrt{3}, 1\}$ dobivamo jednadžbu diferencija

$$y[n] = u[n] + \sqrt{3}u[n-1] + u[n-2].$$

Odredimo prijenosnu funkciju. Primjenom $\mathcal{Z}$ transformacije na zadanu jednadžbu diferencija

$$y[n] = u[n] + \sqrt{3}u[n-1] + u[n-2]$$

dobivamo

$$Y(z) = U(z) + \sqrt{3}z^{-1}U(z) + z^{-2}U(z).$$

Prijenosna funkcija je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1 + \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}.$$

Primijetite da prijenosna funkcija nema nazivnika. Dakle nismo dobili racionalnu funkciju nego običan polinom, no po potencijama od z^{-1}.

Odredimo prijenosnu funkciju. Primjenom $\mathcal{Z}$ transformacije na zadanu jednadžbu diferencija

$$y[n] = u[n] + \sqrt{3}u[n-1] + u[n-2]$$

dobivamo

$$Y(z) = U(z) + \sqrt{3}z^{-1}U(z) + z^{-2}U(z).$$

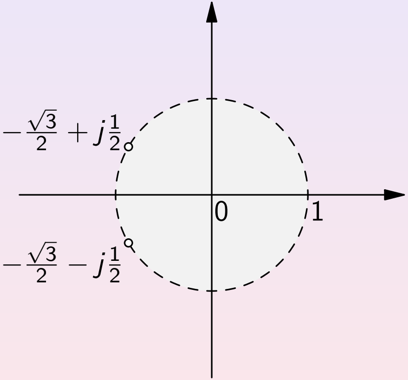
Prijenosna funkcija je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1 + \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}.$$

Primijetite da prijenosna funkcija nema nazivnika. Dakle nismo dobili racionalnu funkciju nego običan polinom, no po potencijama od z^{-1}.

Odredimo položaj polova i nula. Nule su

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{j}{2}.$$



Slika: Položaj polova i nula u kompleksnoj ravnini

Amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku za *stabilne* sustave računamo pomoću DTFT transformacije impulsnog odziva sustava $h[n]$.

Kako vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[h[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad \text{i} \quad \mathrm{DTFT}\big[h[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

frekvencijsku karakteristiku dobivamo zamjenom $z \mapsto e^{j\omega}$.

Amplitudu $A(\omega)$ i fazu $\phi(\omega)$ dobivamo iz $H(\omega)$ kao

$$A(\omega) = \big|H(\omega)\big| \quad \text{i} \quad \phi(\omega) = \arg(H(\omega)).$$

Amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku za *stabilne* sustave računamo pomoću DTFT transformacije impulsnog odziva sustava $h[n]$.
Kako vrijedi

$$\mathcal{Z}\big[h[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \quad \text{i} \quad \mathrm{DTFT}\big[h[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

frekvencijsku karakteristiku dobivamo zamjenom $z \mapsto e^{j\omega}$.
Amplitudu $A(\omega)$ i fazu $\phi(\omega)$ dobivamo iz $H(\omega)$ kao

$$A(\omega) = \big|H(\omega)\big| \quad \text{i} \quad \phi(\omega) = \arg(H(\omega)).$$

Amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku za *stabilne* sustave računamo pomoću DTFT transformacije impulsnog odziva sustava $h[n]$.
Kako vrijedi

$$\mathcal{Z}\left[h[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \quad \text{i} \quad \text{DTFT}\left[h[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

frekvencijsku karakteristiku dobivamo zamjenom $z \mapsto e^{j\omega}$.
Amplitudu $A(\omega)$ i fazu $\phi(\omega)$ dobivamo iz $H(\omega)$ kao

$$A(\omega) = \left|H(\omega)\right| \quad \text{i} \quad \phi(\omega) = \arg(H(\omega)).$$

Uvrštavanjem $e^{j\omega}$ umjesto z dobivamo

$$H(\omega) = 1 + \sqrt{3}e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}.$$

Amplitudnu i faznu karakteristiku možemo odrediti prema definicijskim izrazima, no primijetite da također možemo izlučiti $e^{-j\omega N/2} = e^{-j\omega}$. Dobivamo

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + \sqrt{3} + e^{-j\omega}\right) \\ &= e^{-j\omega}\left(\sqrt{3} + 2\cos(\omega)\right) \end{aligned}$$

Vremenski diskretne sustave čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j(a\omega+b)}, \quad R(\omega), a, b \in \mathbb{R}$$

zovemo generaliziranim sustavima s linearnom fazom.

Uvrštavanjem $e^{j\omega}$ umjesto z dobivamo

$$H(\omega) = 1 + \sqrt{3}e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}.$$

Amplitudnu i faznu karakteristiku možemo odrediti prema definicijskim izrazima, no primijetite da također možemo izlučiti $e^{-j\omega N/2} = e^{-j\omega}$. Dobivamo

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + \sqrt{3} + e^{-j\omega}\right) \\ &= e^{-j\omega}\left(\sqrt{3} + 2\cos(\omega)\right) \end{aligned}$$

Vremenski diskretne sustave čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j(a\omega+b)}, \quad R(\omega), a, b \in \mathbb{R}$$

zovemo generaliziranim sustavima s linearnom fazom.

Uvrštavanjem $e^{j\omega}$ umjesto z dobivamo

$$H(\omega) = 1 + \sqrt{3}e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}.$$

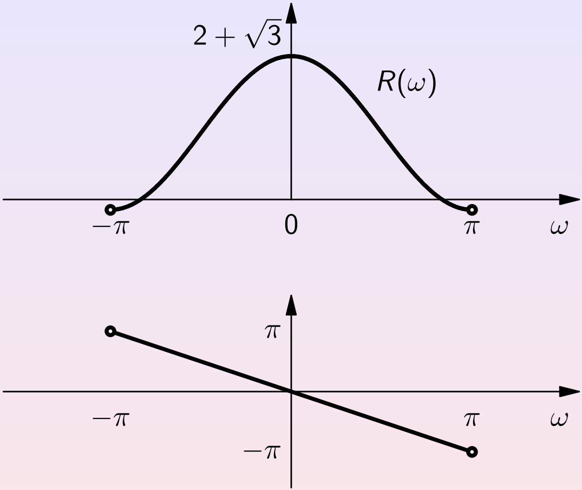
Amplitudnu i faznu karakteristiku možemo odrediti prema definicijskim izrazima, no primijetite da također možemo izlučiti $e^{-j\omega N/2} = e^{-j\omega}$. Dobivamo

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + \sqrt{3} + e^{-j\omega}\right) \\ &= e^{-j\omega}\left(\sqrt{3} + 2\cos(\omega)\right) \end{aligned}$$

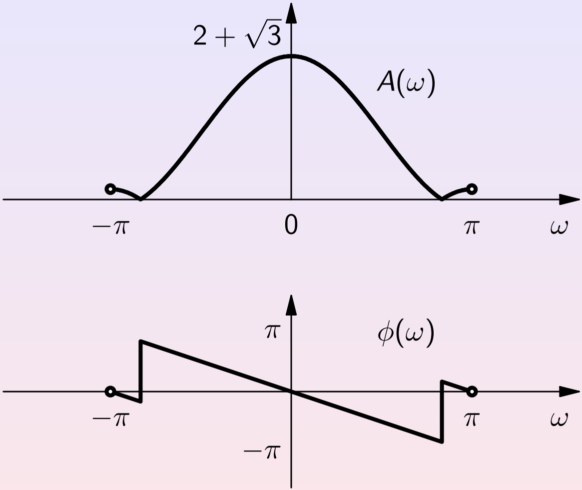
Vremenski diskretne sustave čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j(a\omega+b)}, \quad R(\omega), a, b \in \mathbb{R}$$

zovemo generaliziranim sustavima s linearnom fazom.



Slika: Generalizirani amplitudni i fazni spektar



Slika: Amplitudni i fazni spektar

Odredimo i grupno vrijeme kašnjenja. Vrijedi

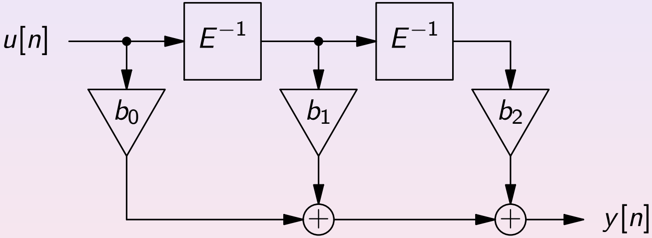
$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

pa je

$$\tau(\omega) = -\frac{d-\omega}{d\omega} = 1.$$

Dobiveno vrijeme kašnjenja je konstanta.

Realizacija filtra je prikazana na slici 4. Koeficijenti su $b_0 = b_2 = 1$ i $b_1 = \sqrt{3}$.



Slika: Direktna realizacija FIR filtra

Zadatak 2.

Za niz brojeva

$$0{,}126971, -0{,}750100, 0{,}749999, -0{,}97 \quad \text{i} \quad 0{,}869001$$

odredite zapis u obliku dvojnog komplementa i pripadnih frakcija ako raspolažete s 4 bita (3 bita i predznak). Koristite zaokruživanje na najbliži cijeli broj.

Zbog velike sklopovske složenosti koju zahtijeva računanje s pomičnim zarezom (*floating point arithmetic*) ponekad se koristi frakciona artimetika. Za frakcionu artimetiku svaki broj predstavljamo kao razlomak oblika $x/2^{B-1}$ s time da pamtimo samo brojnik x i to zapisan kao dvojni komplement u B bitova.

Za računanje vrijedi:

$$\frac{x}{2^{B-1}} + \frac{y}{2^{B-1}} = \frac{x+y}{2^{B-1}}$$

$$\frac{x}{2^{B-1}}\frac{y}{2^{B-1}} = \frac{xy}{2^{2B-2}} = \frac{xy/2^{B-1}}{2^{B-1}}$$

Zbog velike sklopovske složenosti koju zahtijeva računanje s pomičnim zarezom (*floating point arithmetic*) ponekad se koristi frakciona artimetika. Za frakcionu artimetiku svaki broj predstavljamo kao razlomak oblika $x/2^{B-1}$ s time da pamtimo samo brojnik x i to zapisan kao dvojni komplement u B bitova. Za računanje vrijedi:

$$\frac{x}{2^{B-1}} + \frac{y}{2^{B-1}} = \frac{x+y}{2^{B-1}}$$

$$\frac{x}{2^{B-1}}\frac{y}{2^{B-1}} = \frac{xy}{2^{2B-2}} = \frac{xy/2^{B-1}}{2^{B-1}}$$

x	0,126971	$-0{,}750100$	0,749999	$-0{,}97$	0,869001
$8x$	1,015768	$-6{,}0008$	5,999992	$-7{,}76$	6,952008
zaokruživanje na najbliži cijeli broj, $\hat{x} = \mathrm{round}(8x)$					
$\hat{x}$	1	-6	6	-8	7
$\hat{x}/8$	0,125	$-0{,}75$	0,75	-1	0,875
odsijecanje prema dolje, $\hat{x} = \lfloor 8x \rfloor$					
$\hat{x}$	1	-7	5	-8	6
$\hat{x}/8$	0,125	$-0{,}875$	0,625	-1	0,75

Primijetite da u slučaju odabira nekog drugog načina zaokruživanja od zaokruživanja na najbliži cijeli broj očekivana pogreška zaokruživanja prestaje biti nula (npr. za odscijecanje u prosijeku pogriješimo za 0,5).

x	0,126971	$-0{,}750100$	0,749999	$-0{,}97$	0,869001
$8x$	1,015768	$-6{,}0008$	5,999992	$-7{,}76$	6,952008
zaokruživanje na najbliži cijeli broj, $\hat{x} = \text{round}(8x)$					
$\hat{x}$	1	-6	6	-8	7
$\hat{x}/8$	0,125	$-0{,}75$	0,75	-1	0,875
odsijecanje prema dolje, $\hat{x} = \lfloor 8x \rfloor$					
$\hat{x}$	1	-7	5	-8	6
$\hat{x}/8$	0,125	$-0{,}875$	0,625	-1	0,75

Primijetite da u slučaju odabira nekog drugog načina zaokruživanja od zaokruživanja na najbliži cijeli broj očekivana pogreška zaokruživanja prestaje biti nula (npr. za odscijecanje u prosijeku pogriješimo za 0,5).

Zadatak 3.

Koristeći Hammingov vremenski otvor projektirajte visokopropusni FIR filtar četvrtog reda granične frekvecije $\pi/4$. Za dobiveni filtar odredite impulsni odziv $h[n]$ i pripadnu prijenosnu funkciju $H(z)$. Zatim nacrtajte direktnu realizaciju dobivenog filtra te odredite koeficijente kao 6-bitne frakcije (5 bita i predznak) dobivene zaokruživanjem na najbliži cijeli broj. Odredite i usporedite frekvencijske karakteristike idealnog filtra, dobivenog FIR filtra te FIR filtra čiji su koeficijenti kvantizirani.

Hammingov otvor je određen s

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right].$$

Impulsni odziv idealnog visokopropusnog filtra granične frekvencije ω_0 je

$$h_{\mathrm{VP}}[n] = \begin{cases} 1 - \omega_0/\pi, & n = 0 \\ -\dfrac{\sin(n\omega_0)}{n\pi}, & \text{inače} \end{cases}.$$

Hammingov otvor je određen s

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right].$$

Impulsni odziv idealnog visokopropusnog filtra granične frekvencije ω_0 je

$$h_{\mathrm{VP}}[n] = \begin{cases} 1 - \omega_0/\pi, & n = 0 \\ -\dfrac{\sin(n\omega_0)}{n\pi}, & \text{inače} \end{cases}.$$

Računamo impulsni odziv filtra prema danim izrazima uvrštavanjem $n = \{\underline{-2}, -1, 0, 1, 2\}$.

n	-2	-1	0	1	2
$h_{\mathrm{VP}}[n]$	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
$w[n]$	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
$h[n]$	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

Impulsni odziv filtra prije zaokruživanja koeficijenata je

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}.$$

Računamo impulsni odziv filtra prema danim izrazima uvrštavanjem $n = \{\underline{-2}, -1, 0, 1, 2\}$.

n	-2	-1	0	1	2
$h_{\mathrm{VP}}[n]$	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
$w[n]$	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
$h[n]$	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

Impulsni odziv filtra prije zaokruživanja koeficijenata je

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}.$$

Računamo impulsni odziv filtra prema danim izrazima uvrštavanjem $n = \{\underline{-2}, -1, 0, 1, 2\}$.

n	-2	-1	0	1	2
$h_{\mathrm{VP}}[n]$	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
$w[n]$	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
$h[n]$	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

Impulsni odziv filtra prije zaokruživanja koeficijenata je

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}.$$

Računamo impulsni odziv filtra prema danim izrazima uvrštavanjem $n = \{\underline{-2}, -1, 0, 1, 2\}$.

n	-2	-1	0	1	2
$h_{\mathrm{VP}}[n]$	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
$w[n]$	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
$h[n]$	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

Impulsni odziv filtra prije zaokruživanja koeficijenata je

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}.$$

Računamo impulsni odziv filtra prema danim izrazima uvrštavanjem $n = \{\underline{-2}, -1, 0, 1, 2\}$.

n	-2	-1	0	1	2
$h_{\mathrm{VP}}[n]$	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
$w[n]$	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
$h[n]$	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

Impulsni odziv filtra prije zaokruživanja koeficijenata je

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}.$$

Sada kvantiziramo impulsni odziv $h[n]$ uz raspoloživih $B = 6$ bitova. Vrijedi

$$\hat{h}[n] = \frac{\text{round}\left(2^{B-1} h[n]\right)}{2^{B-1}} = \frac{\text{round}\left(32 h[n]\right)}{32}$$

Dobivamo

$$\hat{h}[n] = \{\underline{0}, -0{,}125, 0{,}75, -0{,}125, 0\}.$$

Kako su dva krajnja koeficijenta postala nula nakon zaokruživanja dobivena realizacija ne bi bila zadovoljavajuća.

Sada kvantiziramo impulsni odziv $h[n]$ uz raspoloživih $B = 6$ bitova. Vrijedi

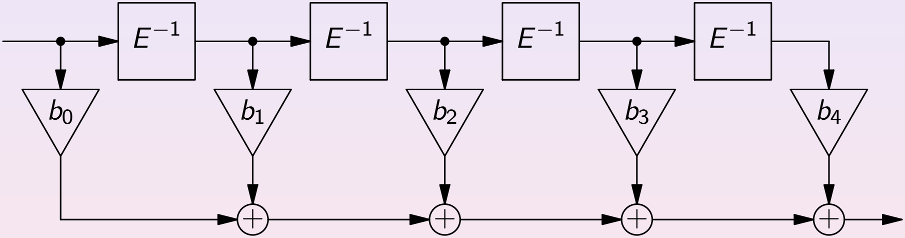
$$\hat{h}[n] = \frac{\text{round}\left(2^{B-1}h[n]\right)}{2^{B-1}} = \frac{\text{round}\left(32h[n]\right)}{32}$$

Dobivamo

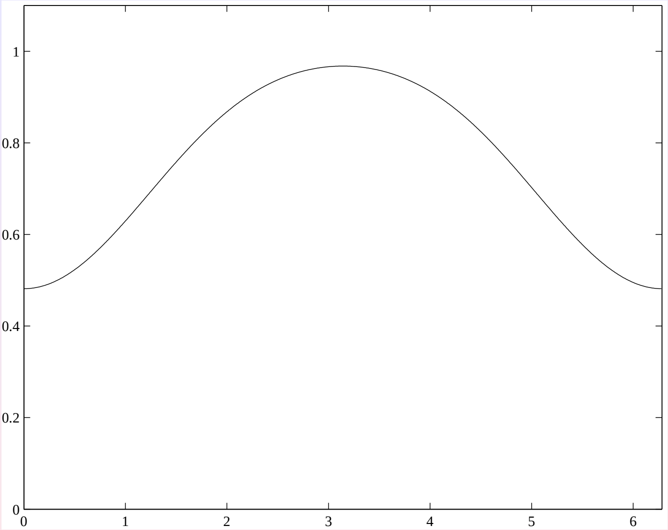
$$\hat{h}[n] = \{\underline{0}, -0{,}125, 0{,}75, -0{,}125, 0\}.$$

Kako su dva krajnja koeficijenta postala nula nakon zaokruživanja dobivena realizacija ne bi bila zadovoljavajuća.

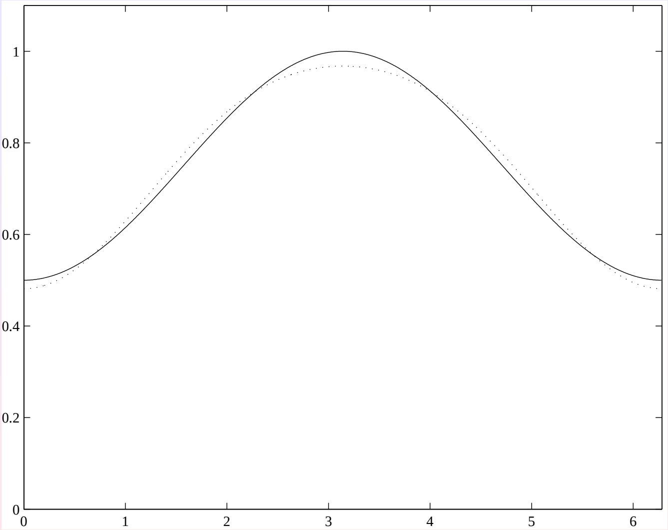
Realizacija filtra je prikazana na slici 5. Koeficijenti su $b_0 = b_4 = 0$, $b_1 = b_3 = -0{,}125$ i $b_2 = 0{,}75$.



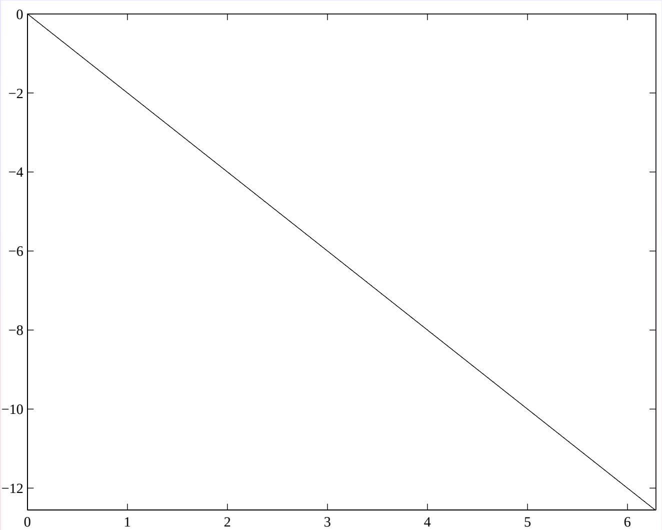
Slika: Direktna realizacija FIR filtra



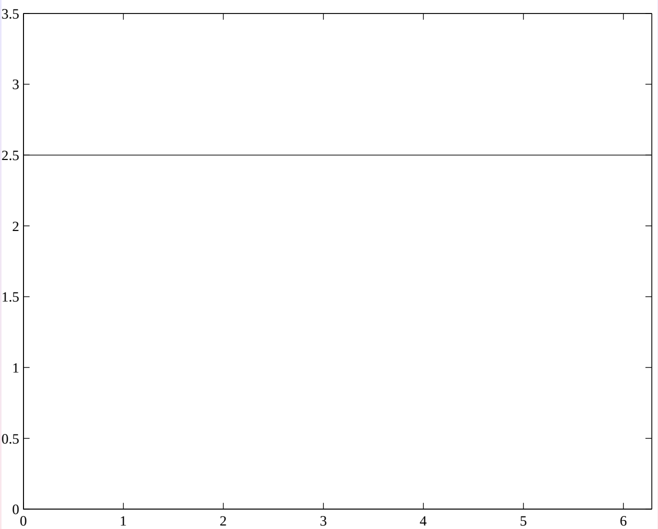
Slika: Amplitudno-frekvencijska karakteristika filtra prije kvantizacije koeficijenata.



Slika: Amplitudno-frekvencijska karakteristika filtra nakon kvantizacije koeficijenata.



Slika: Fazno-frekvencijska karakteristika filtra prije i nakon kvantizacije koeficijenata.



Slika: Grupno vrijeme kašnjenja prije i nakon kvantizacije koeficijenata.