Zbirka riješenih ispitnih rokova iz Digitalne obradbe signala

Tomislav Petković

24. listopad 2005.

1. Umjesto uvoda

Ova zbirka sadrži riješene pismene ispite iz predmeta "Digitalna obradba signala" koji se predaje u 8. semestru na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Namijenjena je prvenstveno studentima kao pomoć pri pripremanju ispita ili kolokvija, no nadam se da će poslužiti svima zaniteresiranima za područje digitalne obrade signala.

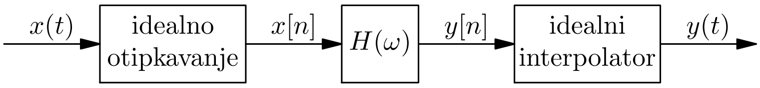
Od danih rješenja zadanih zadataka neka nisu u potpunosti točna, a neka su čak i djelomično kriva pa čitatelj mora biti oprezan prilikom korištenja zbirke. No pažljivim rješavanjem danih zadataka te greške se lagano uočavaju, a zainteresiraniji čitatelji mogu se prihvatiti traženja krivih rješenja. Možda vam takav *lov na zakopano blago* učini rješavanje zanimljivijim. Kako su sva rješenja zadataka skenirana rješenja pisana rukom na papiru sve takve nenamjerne pogreške postaju trajna osobina ovog dokumenta, odnosno nikakvi ispravci neće biti objavljivani ili uključeni u ovu zbirku.

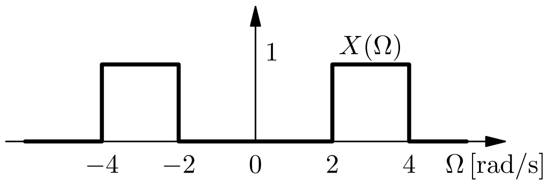
Sadržani su pismeni ispiti davani od rujna 2004. do rujna 2005. godine.

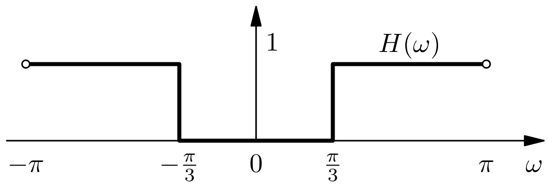
Ovim putem također bih se želio zahvaliti studentu Tomislavu Gracinu na trudu uloženom u skeniranje rukom pisanih rješenja.

Digitalna obradba signala
Dekanski rok – 28. rujna 2005.

1. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







2. Za realni niz uzoraka

$$\{\underline{0{,}126}, -0{,}126, -1, 1, -0{,}875, 0{,}875, -0{,}756\}$$

odredite prikaz u obliku frakcija te zatim i pripadnih cijelih brojeva ako na raspolaganju imate 5 bitova (jedan bit predznaka te 4 bita mantise), i to za slijedeće metode kvantizacije:

a) zaokruživanje na najbliži cijeli broj,

b) simetrično odsijecanje prema nuli i

c) odsijecanje prema dolje.

3. Odredite linearnu i cirkularnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}.$$

4. IIR sustav je opisan prijenosnom funkcijom

$$H(z) = 0{,}4\frac{0{,}8 + 0{,}35z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0{,}8z^{-2}}\frac{0{,}3 + 0{,}65z^{-1}}{1 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}7z^{-2}}.$$

Ispitajte stabilnost zadanog filtra te skicirajte direktnu I, direktnu II i kaskadnu realizaciju (proizvoljna kombinacija kaskada) te na skice upišite koeficijente filtra.

5. Mali Ivica se sav sretan vratio iz dućana s najboljom 3D kraticom koju novac može kupiti, no kada ju je spojio bio je razočaran zbog loše slike i čudnih pojava na zaslonu. Ivica se zamislio nad problemom te je zaključio da se smetnje javljaju zbog nešto starijeg zaslona čija elektronika unosi smetnje. Štoviše, Ivica je odredio da se unešena smetnja može modelirati jednostavnim propuštanjem digitalnog video-signala kroz sustav s impulsnim odzivom $h[n]$ koji modelira jeku,

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}1\delta[n - m],$$

gdje je m konstanta. Ivica je odlučio otkloniti problem dodatnim programiranjem kartice tako da se signal prije slanja propušta kroz filtar s impulsnim odzivom $g[n]$ čime bi poništio utjecaj $h[n]$. Odziv $g[n]$ je odredio korištenjem DFT-a u $N = 4m$ točaka na slijedeći način:

1. odredio je spektar $H[k]$ kao $\mathrm{DFT}_{4m}\big[h[n]\big]$,
2. izračunao je spektar $G[k]$ kao $G[k] = 1/H[k]$ i
3. odredio je konačni impulsni odziv $g[n]$ uzimanjem jednog perioda signala $\tilde{g}[n] = \mathrm{IDFT}_{4m}\big[G[k]\big]$.

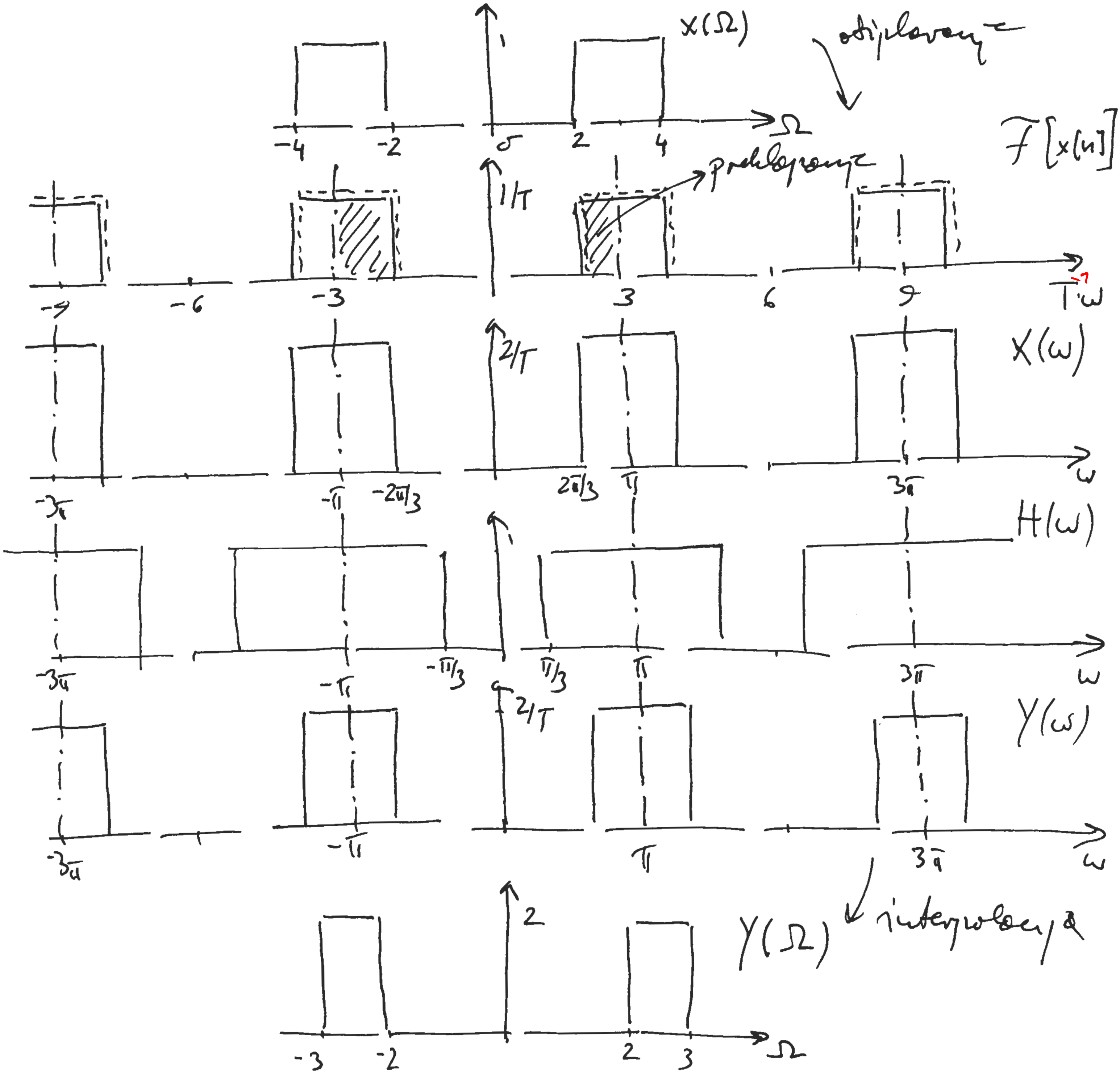
Korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije odredi impulsni odziv sustava koji u potpunosti poništava utjecaj $h[n]$ i usporedi ga s odzivom $g[n]$ kojeg je dobio mali Ivica. Koliko je Ivica pogriješio?

Uputa: DFT transformacija u N točaka niza a^n je $\dfrac{1-a^N}{1-aW_N^k}$ (suma konačnog geometrijskog reda).

1) $x(t) \rightarrow$ idealno otipkavanje $\xrightarrow{x[n]}$ $H(\omega)$ $\xrightarrow{y[n]}$ idealni interpolator $\rightarrow y(t)$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 < 2 \cdot \omega_{max} = 8$ došlo je do preklapanja spektra



(2) $x[n] = \{0{,}126,\ -0{,}126,\ -1,\ 1,\ -0{,}875,\ 0{,}875,\ -0{,}756\}$

x	0,126	-0,126	-1	1	-0,875	0,875	-0,756
$2^4 \cdot x$	2,0160	-2,0160	-16	16	-14	14	-12,0960
a)	2	-2	-16	16	-14	14	-12
b)	2	-2	-16	16	-14	14	-12
c)	2	-3	-16	16	-14	14	-13
a)	0,125	-0,125	-1	1	-0,875	0,875	-0,75
b)	0,125	-0,125	-1	1	-0,875	0,875	-0,75
c)	0,125	-0,125	-1	1	-0,875	0,875	-0,75

a - zaokruživanje na najbliži cijeli broj

b - simetrično odsijecanje prema nuli

c - odsijecanje prema dolje

③ $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$, $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}$

linearna konvolucija $y_\ell[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

$$y_\ell[n] = \{\underline{1}, -1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, -1\}$$

cirkularna konvolucija $y_c[n] = x_1[n] \, ⑤ \, x_2[n] = \sum_{i=0}^{5} x_1[i]\, x_2[n-i \bmod 5]$

$$y_c[n] = \{\underline{1}, 0, -2, -1, 0\}$$

④

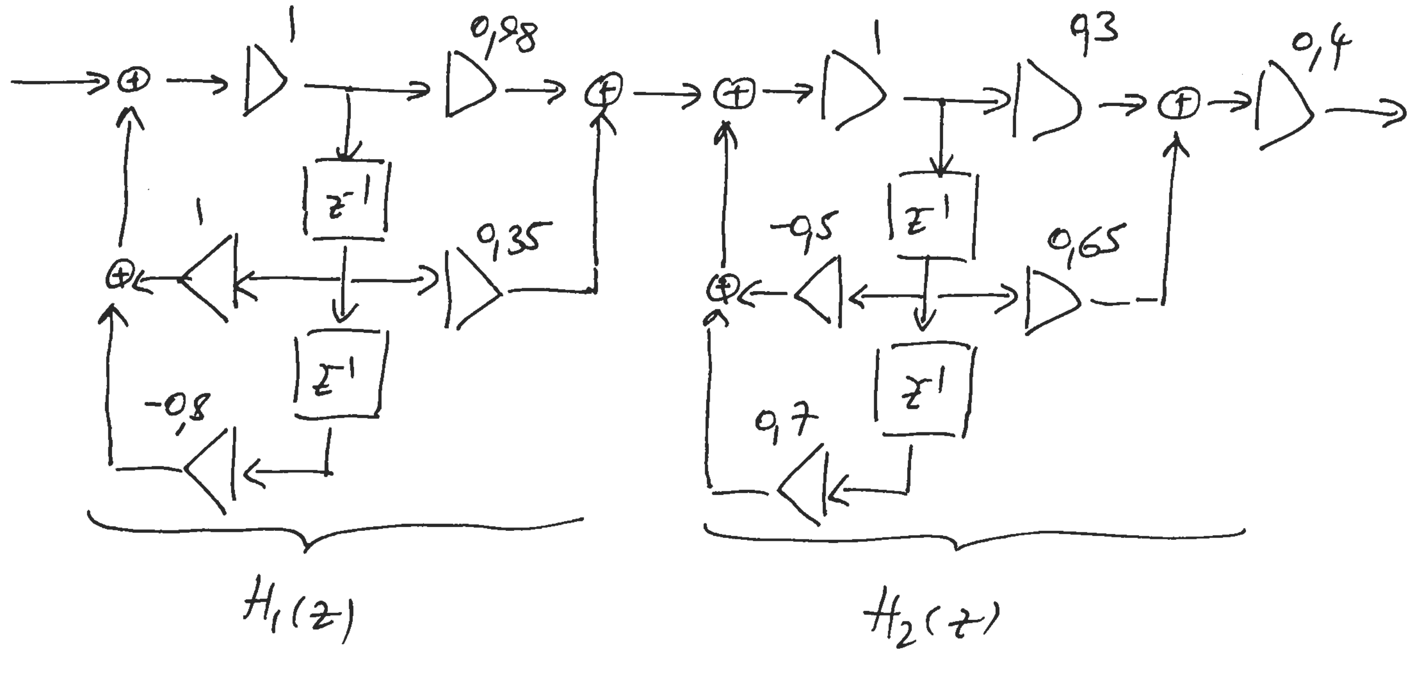
$$H(z) = 0{,}4 \underbrace{\frac{0{,}8 + 0{,}35z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0{,}8z^{-2}}}_{H_1(z)} \underbrace{\frac{0{,}3 + 0{,}65z^{-1}}{1 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}7z^{-2}}}_{H_2(z)}$$

ispitajmo najprije stabilnost filtra

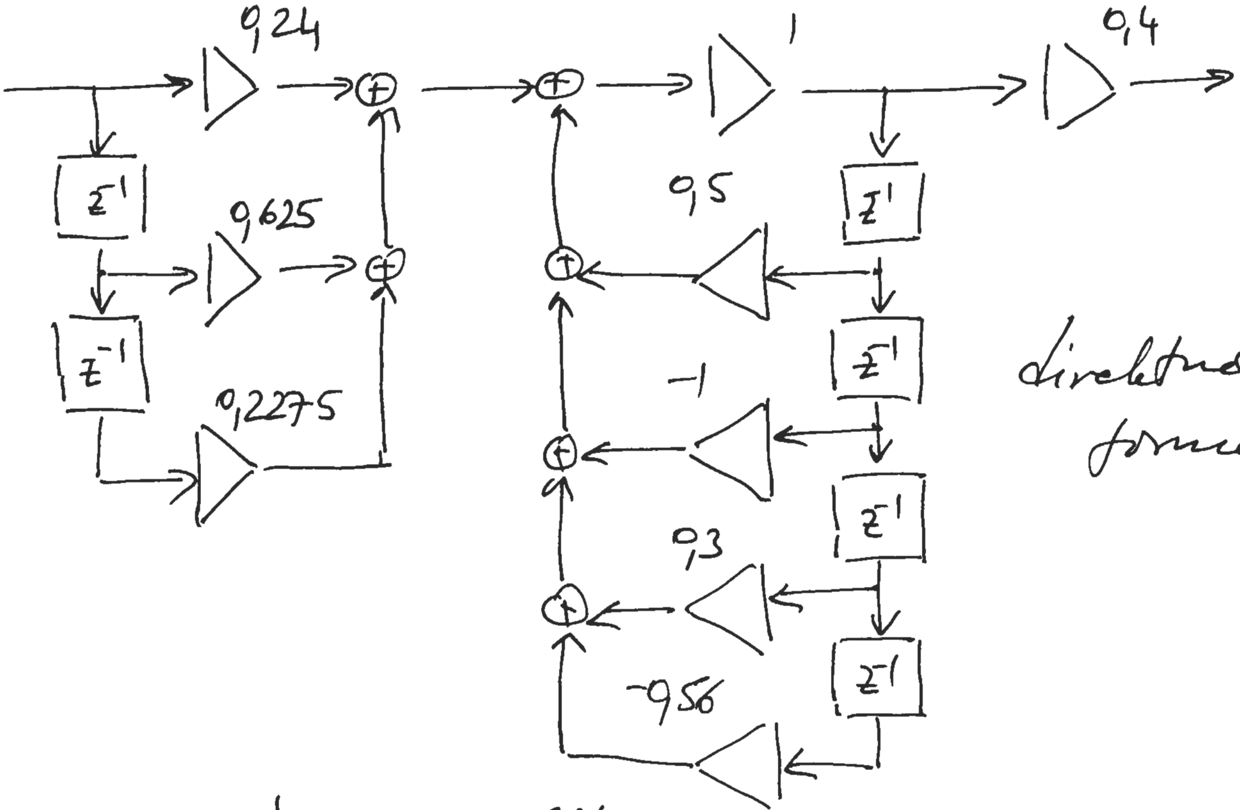
$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}8}}{2} \approx 0{,}5 \pm j0{,}7416, \quad |p_{1,2}| = 0{,}8944$$

$$p_{3,4} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}7}}{2} \approx -0{,}25 \pm j0{,}7984, \quad |p_{3,4}| = 0{,}8367$$

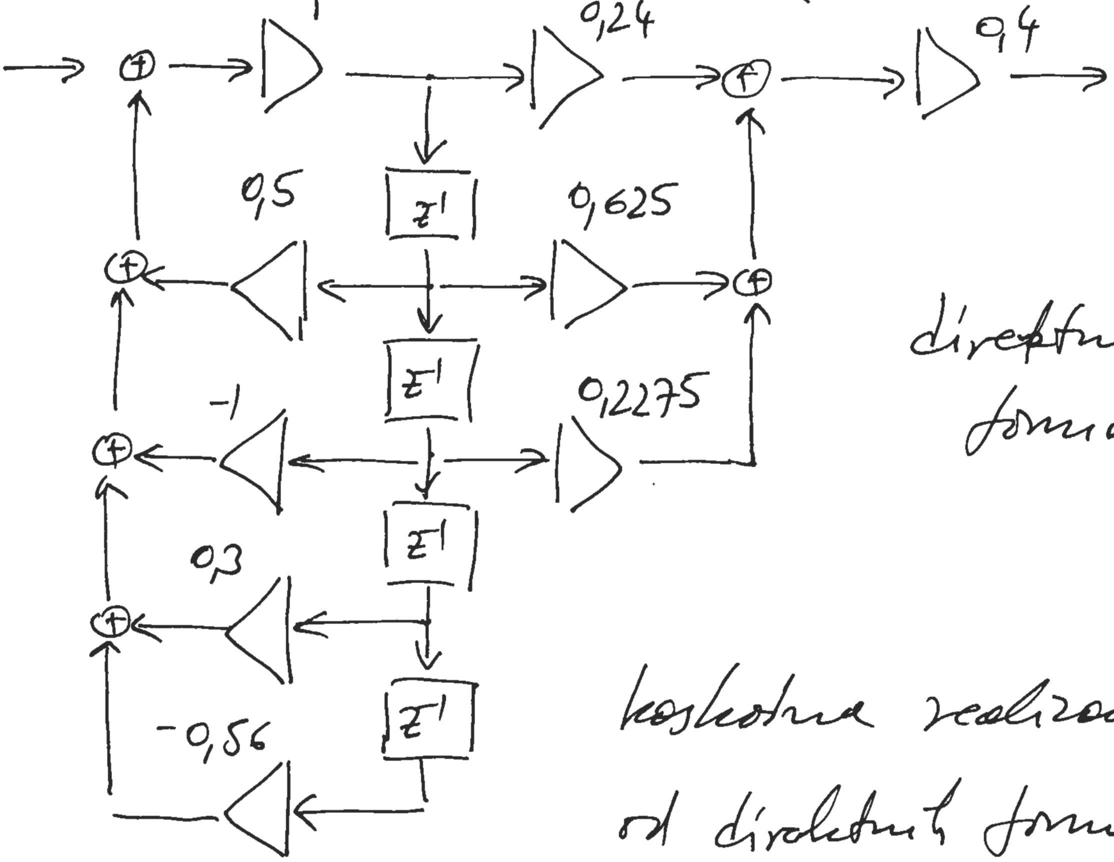
kako se polovi nalaze unutar jedinične kružnice zadani filtar je stabilan



$$H(z) = 0{,}4 \; \frac{0{,}24 + 0{,}625 z^{-1} + 0{,}2275 z^{-2}}{1 - 0{,}5 z^{-1} + z^{-2} - 0{,}3 z^{-3} + 0{,}56 z^{-4}}$$



direktna forma I



direktna forma II

kaskadna realizacija je bolje od direktnih formi zbog manjih zahtjeva za dinamikom u pojedinim čvorovima

(5) $h[n] = \delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-m]$

$$H[k] = DFT_{4m}\left[h[n]\right] = \sum_{n=0}^{4m-1}\left(\delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-m]\right) W_{4m}^{nk} =$$

$$= W_{4m}^{0k} - 0{,}1\,W_{4m}^{mk} = 1 - 0{,}1\,W_4^{k}$$

$$G[k] = \frac{1}{H[k]} = \frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}$$

$$DFT_N\left[a^n\right] = \frac{1-a^N}{1-a\,W_N^{k}} \Rightarrow IDFT_4\left[\frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}\right] = \frac{1}{1-0{,}1^4}\,(0{,}1)^n$$

$$g[n] = IDFT_{4m}\left[\frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(1/10)^4}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = r\cdot m,\ r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Prvi izraz određujemo korištenjem Z transformacije

$$H(z) = 1 - 0{,}1\,z^{-m} \Rightarrow H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1-0{,}1\,z^{-m}}$$

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{10}z^{-m}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n z^{-nm} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \left(z^m\right)^{-n}$$

$$h^{-1}[n] = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = r\cdot m,\ r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

usporedimo sada dobivene odzive

$$g[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-(1/10)^4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n/m}, & n=r\cdot m,\ r\in\mathbb{N},\ n\in[0,N-1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

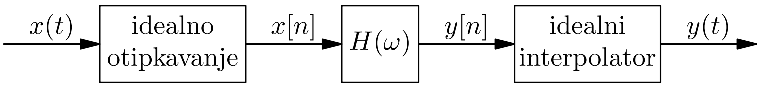
$$h^{-1}[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\right)^{n/m}, & n=r\cdot m,\ r\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

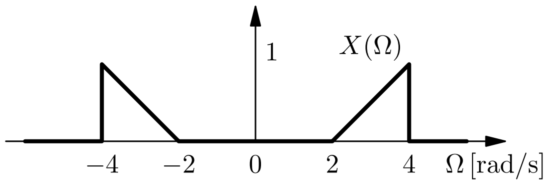
odziv $g[n]$ u odnosu na $h^{-1}[n]$ ima konačan broj članova te se osim toga razlikuje i za konstantu $\frac{1}{1-(1/10)^4}$

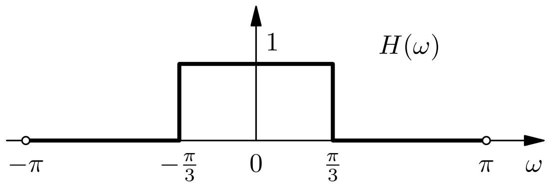
povećavanjem duljine DFT-a se sve više približujemo idealnom odzivu $h^{-1}[n]$ te je samo potrebno odabrati N takav da je pogreška unutar prihvatljivih granica

Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 23. rujna 2005.

1. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/6$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







2. Za realni niz uzoraka

$$\{\underline{0{,}126}, -0{,}126, -1, 1, -0{,}875, 0{,}875, -0{,}756\}$$

odredite prikaz u obliku frakcija te zatim i pripadnih cijelih brojeva ako na raspolaganju imate 5 bitova (jedan bit predznaka te 4 bita mantise), i to za slijedeće metode kvantizacije

a) zaokruživanje na najbliži cijeli broj,

b) simetrično odsijecanje prema nuli i

c) odsijecanje prema dolje.

3. Impulsni odziv diskretnog sustava je

$$h_{\mathrm{LP}}[n] = \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin\!\Big(\frac{2n+1}{2}\omega_0\Big), \quad n \in \Big[-\frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}\Big].$$

Odredite impulsni odziv $h[n]$ i prijenosnu funkciju $H(z)$ FIR filtra reda $N = 5$ projektiranog pomoću Hammingovog vremenskog otvora ako je $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Skicirajte amplitudnu i frekvencijsku karakteristiku dobivenog filtra te nacrtajte blok shemu filtra s upisanim izračunatim koeficijentima.

Hammingov otvor je određen izrazom

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\!\Big(\frac{\pi(2n+1)}{N}\Big), \quad n \in \Big[-\frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}\Big].$$

4. IIR sustav je opisan prijenosnom funkcijom

$$H(z) = 0{,}4\frac{0{,}8 + 0{,}35z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0{,}8z^{-2}}\,\frac{0{,}3 + 0{,}65z^{-1}}{1 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}7z^{-2}}.$$

Skicirajte direktnu I i II realizaciju te kaskadnu realizaciju (proizvoljna kombinacija kaskada) te na skice upišite koeficijente filtra. Ispitajte stabilnost zadanog filtra te komentirajte upotrebljivost svake od realizacija.

5. Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{\underline{4}, 2, 0, 2\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-4}, 2, 0, 2\}$$

računanjem samo jedne kompleksne diskretne Fourierove transformacije.

Uputa: Koristi RE2FFT postupak.

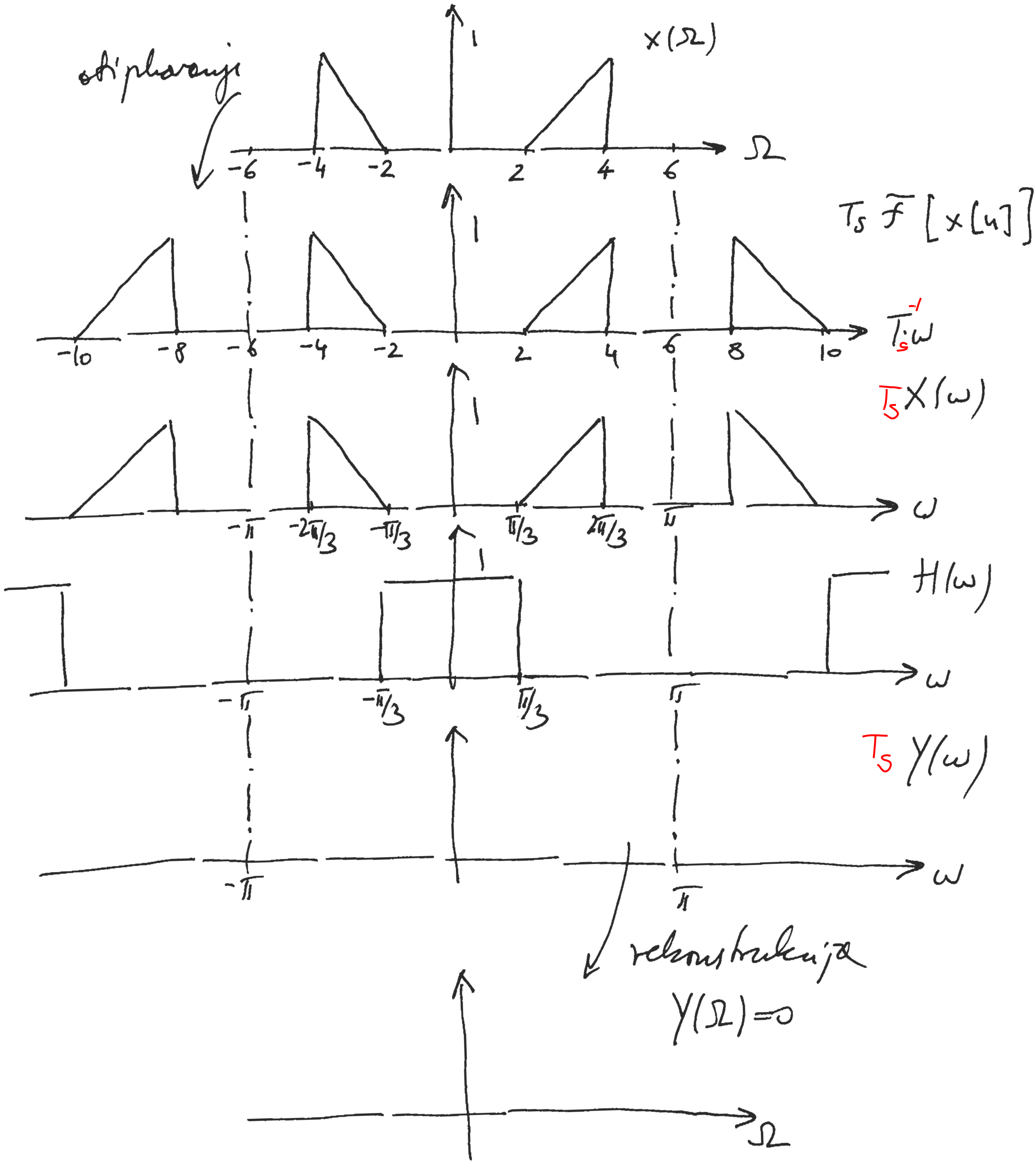
DOS, 2005. 9.23.

①

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{idealno otipkavanje}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{idealni interpolator}} \rightarrow y(t)$$

$$T_S = \pi/6 \Rightarrow \omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

kako je $\omega_S = 12 > 2 \cdot \omega_{max} = 8$ nema preklapanja spektra



(2) $x[n] = \{ 0{,}126,\ -0{,}126,\ -1,\ 1,\ -0{,}875,\ 0{,}875,\ -0{,}756 \}$

x	0,126	-0,126	-1	1	-0,875	0,875	-0,756
$2^4 \cdot x$	2,0160	-2,0160	-16	16	-14	14	-12,0960
a)	2	-2	-16	16	-14	14	-12
b)	2	-2	-16	16	-14	14	-12
c)	2	-3	-16	16	-14	14	-13
a)	0,125	-0,125	-1	1	-0,875	0,875	-0,75
b)	0,125	-0,125	-1	1	-0,875	0,875	-0,75
c)	0,125	-0,1875	-1	1	-0,875	0,875	-0,8125

a - zaokruživanje na najbliži cijeli broj

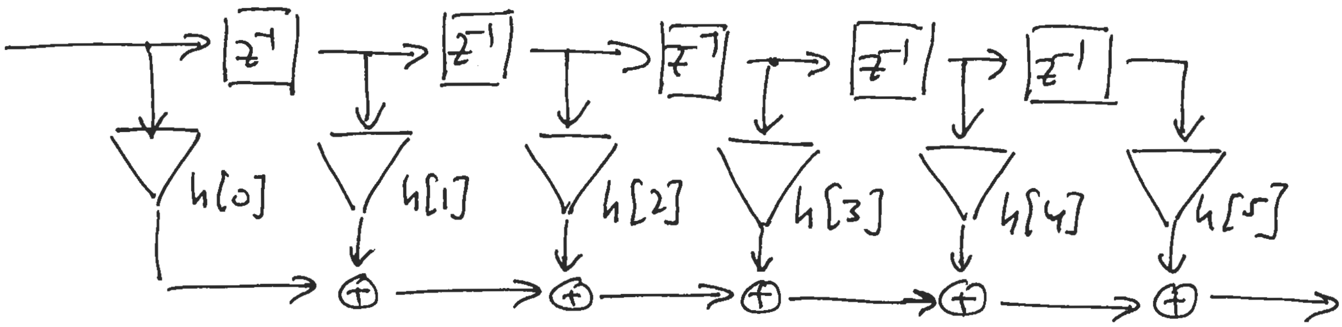
b - simetrično odsijecanje prema nuli

c - odsijecanje prema dolje

③ $\begin{cases} h_{LP}[n] = \dfrac{2}{\pi(2n+1)} \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\omega_0\right) \\ w[n] = 0{,}54 + 0{,}46 \cos\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{N}\right) \\ n \in \left[-\dfrac{N+1}{2}, \dfrac{N-1}{2}\right], \quad \omega_0 = \pi/2 \end{cases}$

n	-3	-2	-1	0	1	2
h_{LP}	$-0{,}0900$	$0{,}1501$	$0{,}4502$	$0{,}4502$	$0{,}1501$	$-0{,}0900$
w	$0{,}0800$	$0{,}3979$	$0{,}9121$	$0{,}9121$	$0{,}3979$	$0{,}0800$
h	$-0{,}0072$	$0{,}0597$	$0{,}4106$	$0{,}4106$	$0{,}0597$	$-0{,}0072$

$h[n] = \{\underline{-0{,}0072}, 0{,}0597, 0{,}4106, 0{,}0597, -0{,}0072\}$

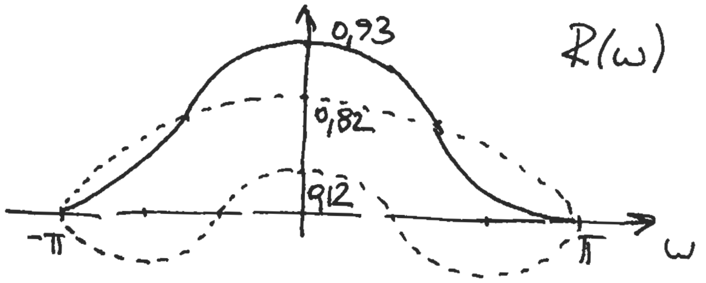


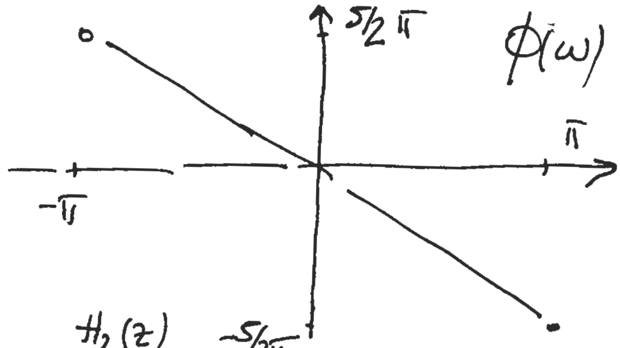
$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-2j\omega} + h[3]e^{-3j\omega} + h[4]e^{-4j\omega} + h[5]e^{-5j\omega}$$

$$= e^{-5/2 j\omega}\Big((h[0]+h[5])\cos(5/2\,\omega) + $$

$$+ (h[1]+h[4])\cos(3/2\,\omega) + (h[2]+h[3])\cos(\tfrac{1}{2}\omega)\Big)$$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{e^{-5/2\, j\omega}}_{\phi(\omega)} \underbrace{\Big(-0{,}0144\cos(5/2\,\omega) + 0{,}1194\cos(3/2\,\omega) + 0{,}8212\cos(1/2\,\omega)\Big)}_{R(\omega)}$$





(4)

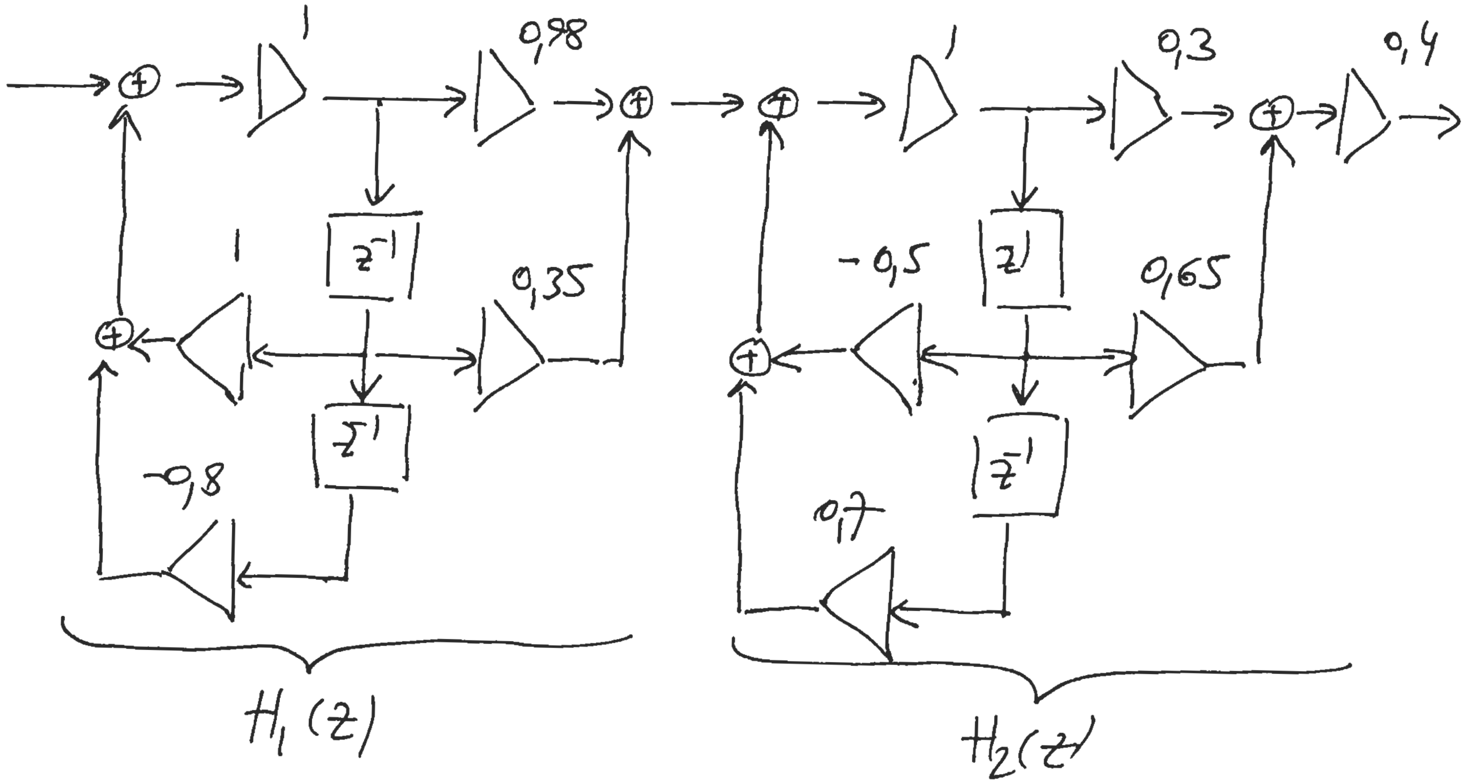
$$H(z) = 0,4\,\overbrace{\frac{0,8 + 0,35z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0,8z^{-2}}}^{H_1(z)} \cdot \overbrace{\frac{0,3 + 0,65z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1} + 0,7z^{-2}}}^{H_2(z)}$$

ispitajmo najprije stabilnost filtra

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 0,8}}{2} \approx 0,5 \pm j0,7416, \quad |p_{1,2}| = 0,8944$$

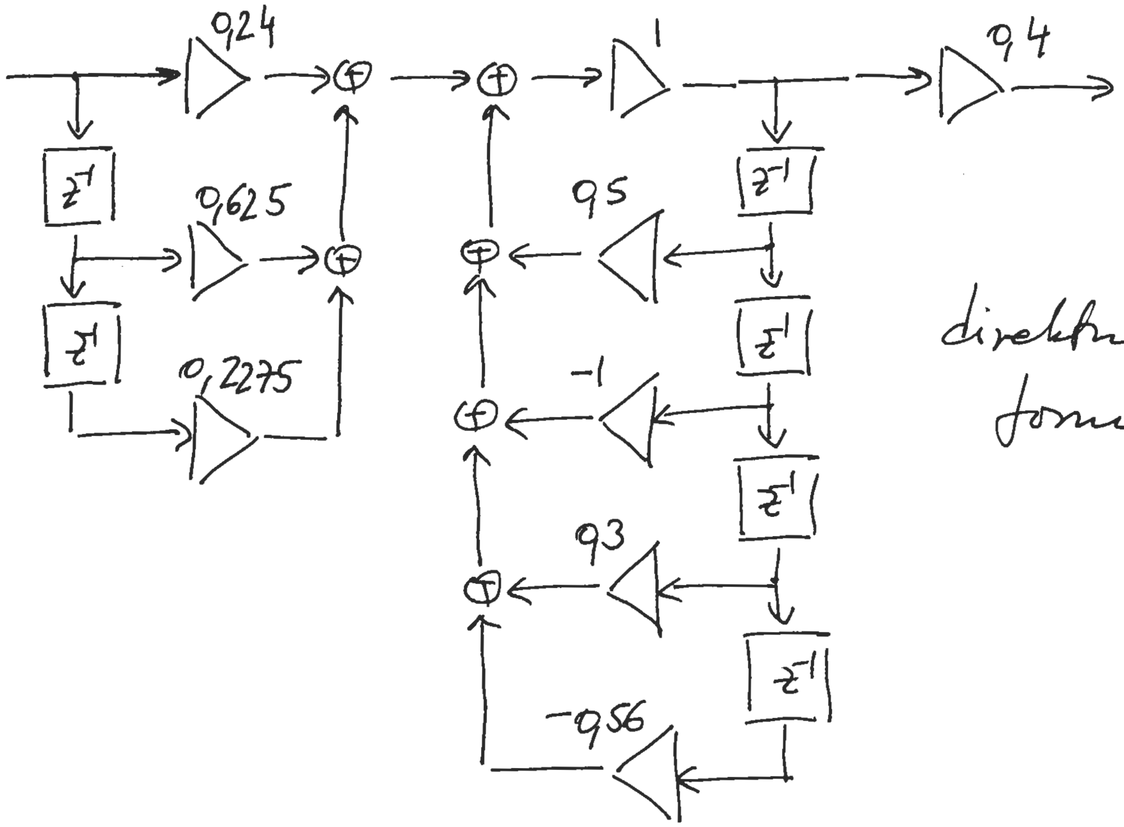
$$p_{3,4} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4\cdot 0,7}}{2} \approx -0,25 \pm j0,7984, \quad |p_{3,4}| = 0,8367$$

kako se polovi nalaze unutar jedinične kružnice zadani filtar je stabilan

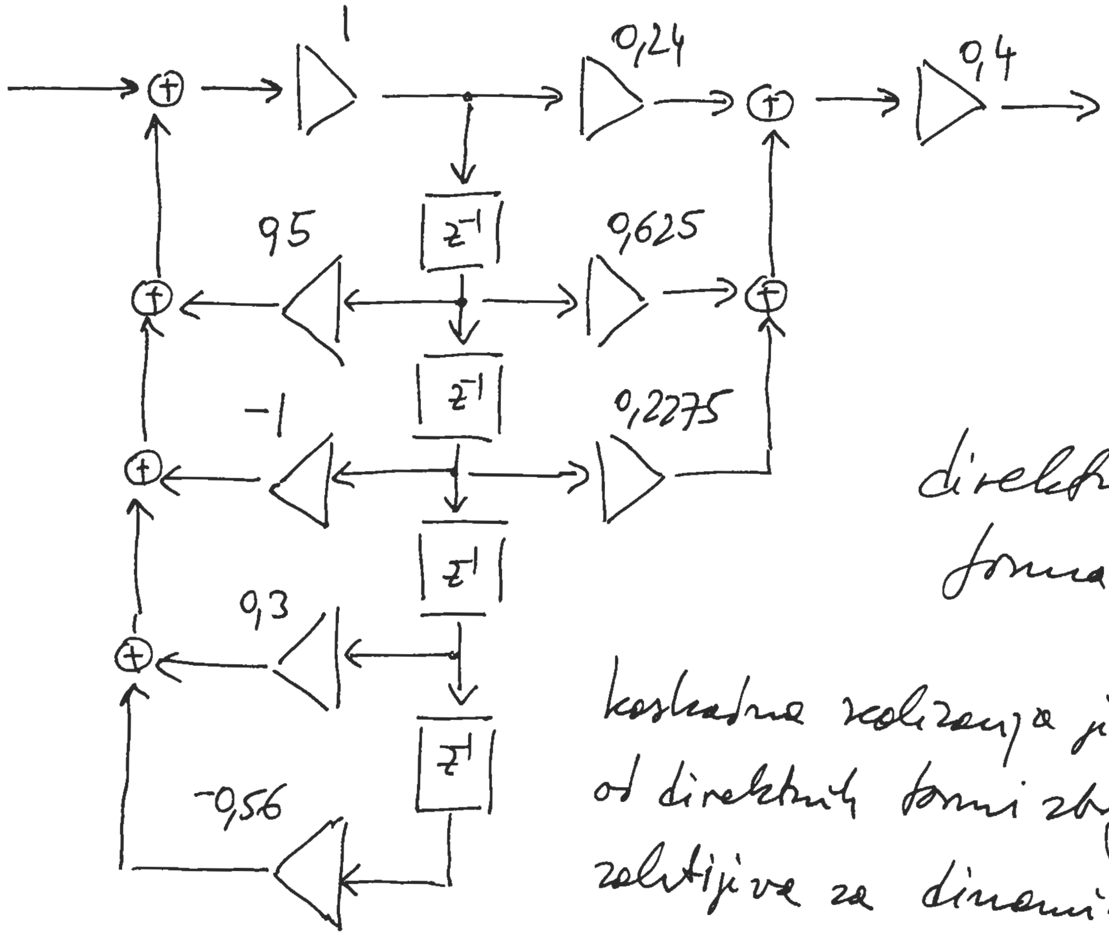


kaskadna realizacija

$$H(z) = 0{,}4\ \frac{0{,}24 + 0{,}625 z^{-1} + 0{,}2275 z^{-2}}{1 - 0{,}5 z^{-1} + z^{-2} - 0{,}3 z^{-3} + 0{,}56 z^{-4}}$$



direktna forma I



direktna forma II

kaskadna realizacija je bolja od direktnih formi zbog manjih zahtjeva za dinamikom u pojedinim čvorovima

⑤ $\begin{cases} x_1[n] = \{\underline{4}, 2, 0, 2\} \\ x_2[n] = \{\underline{-4}, 2, 0, 2\} \end{cases}$

$$x[n] = \{\underline{4-4j}, 2+2j, 0, 2+2j\}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = 4-4j + (2+2j)W_4^{k} + (2+2j)W_4^{3k}$$

$$X[0] = 4-4j + 2+2j + 2+2j = 8$$

$$X[1] = 4-4j - j(2+2j) + j(2+2j) = 4-4j$$

$$X[2] = 4-4j - (2+2j) - (2+2j) = -8j$$

$$X[3] = 4-4j + j(2+2j) - j(2+2j) = 4-4j$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}[X_1[k]] = \mathrm{Re}[X[k]] + \mathrm{Re}[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}[X_1[k]] = \mathrm{Im}[X[k]] - \mathrm{Im}[X[4-k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}[X_1[k]] = \{\underline{8+8}, 4+4, 0+0, 4+4\}$$

$$2\,\mathrm{Im}[X_1[k]] = \{\underline{0-0}, -4-(-4), -8-(-8), -4-(-4)\}$$

$$X_1[k] = \{\underline{8}, 4, 0, 4\}$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}[X_2[k]] = \mathrm{Im}[X[k]] + \mathrm{Im}[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}[X_2[k]] = \mathrm{Re}[X[4-k]] - \mathrm{Re}[X[k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}[X_2[k]] = \{\underline{0+0}, -4-4, -8-8, -4-4\}$$

$$2\,\mathrm{Im}[X_2[k]] = \{\underline{8-8}, 4-4, 0-0, 4-4\}$$

$$X_2[k] = \{\underline{0}, -4, -8, -4\}$$

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 16. rujna 2005.

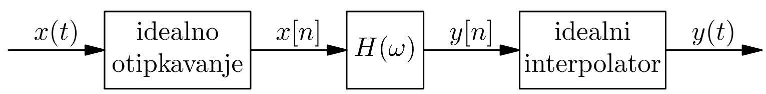
1. Odredite najmanju potrebnu frekvenciju otipkavanja f_s pri kojoj neće doći do preklapanja spektra za slijedeće signale koje dovodimo na ulaz u A/D pretvornik:

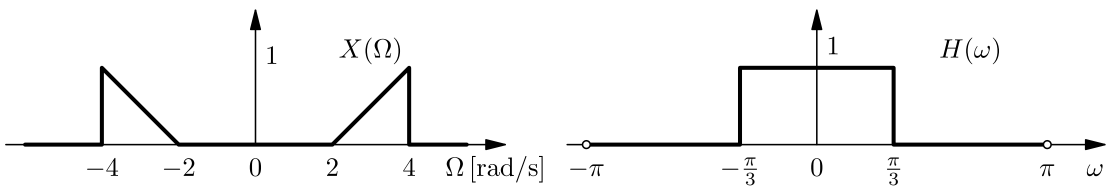
a) pravokutni signal frekvencije 100 Hz,

b) linearnu kombinaciju tri sinusna signala frekvencija $f_1 = 1{,}00\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 10{,}01\,\mathrm{Hz}$ i $f_3 = 9{,}99\,\mathrm{Hz}$, i

c) linearnu kombinaciju trokutastog signala frekvencije 1 Hz i sinusnog signala frekvencije $f = 10\,\mathrm{kHz}$.

2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?





3. Impulsni odziv FIR filtra je

$$h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\}.$$

Na ulaz tog filtra dovodimo signal

$$x[n] = \{\underline{-2}, 1, 1, 2\}$$

Ostali uzorci signala i impulsnog odziva su jednaki nuli. Dani filtar želimo izvesti na računalu uz korištenje DFT transformacije u N točaka. Kako time računamo cirkularnu konvoluciju odredi koji N moramo odabrati ako obrađujemo po 6 uzoraka u bloku te provođenjem tog postupka odredi odziv sustava na zadanu pobudu!

4. Bilinearnom transformacijom uz $T = 1$ projektirajte digitalni filtar ako je prijenosna funkcija analognog prototipa

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Odredite tip dobivenog digitalnog filtra (NP, VP, PP ili PB) te ispitajte je li stabilan. Kolika je granična frekvencija dobivenog digitalnog filtra ako je poznato da je granična frekvencija analognog filtra $\Omega_g = 0{,}1741$?

5. Raspolažete s tri bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u šest točaka? Ako je poznato da blok za računanje DFT-a u dvije točke obavi dva kompleksna zbrajanja i jedno kompleksno množenje odredi ukupni broj operacija za cijelu strukturu koja računa DFT u šest točaka.

DOS, 2005. 9. 16.

① da bi izbjegli preklapanje spektra frekvencija otipkavanja mora biti veća od dvostruke najviše frekvencije signala

za signale a) i c) (pravokutni i trokutasti signal) ne postoji najveća frekvencijska komponenta te uvijek dolazi do preklapanja spektra

$$f_{sa}, f_{sc} \to \infty$$

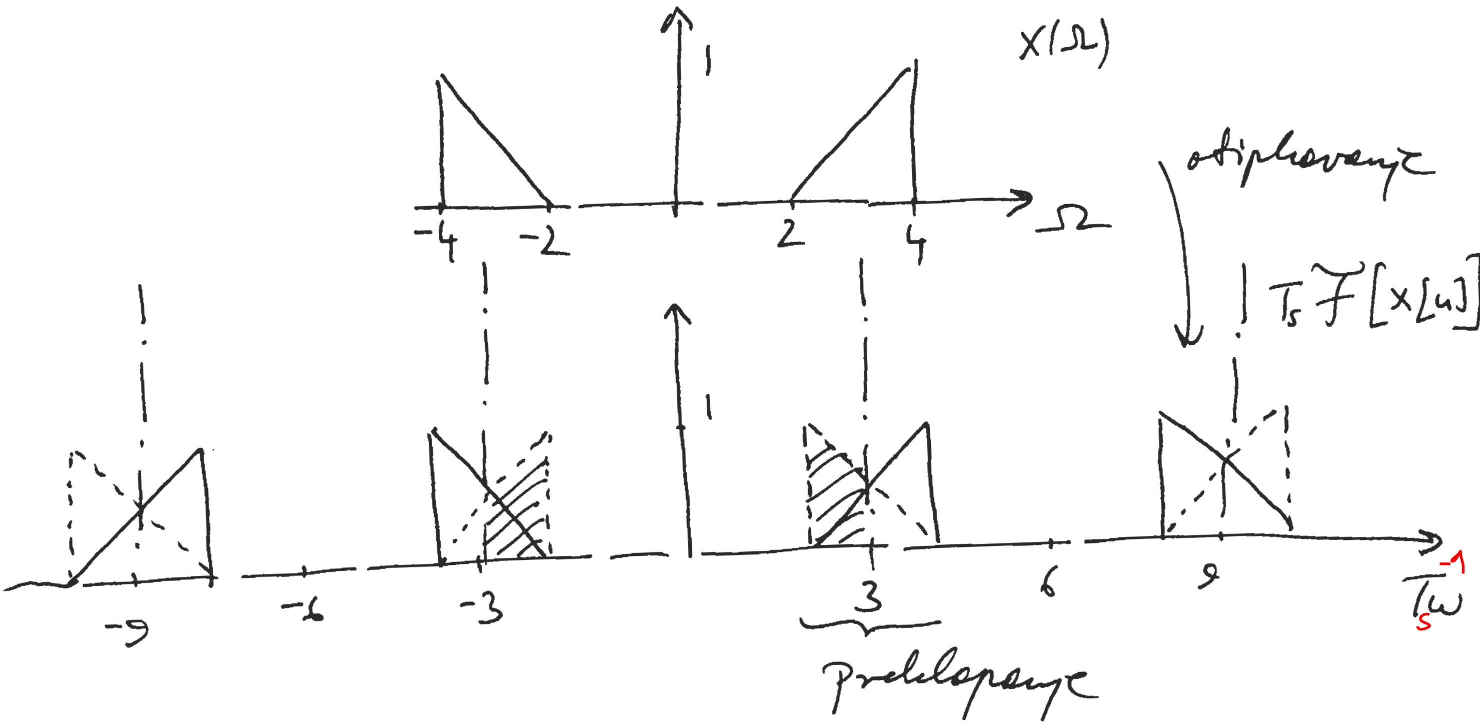
b) $f_1 = 1\,Hz$, $f_2 = 10{,}01\,Hz$, $f_3 = 9{,}99\,Hz$

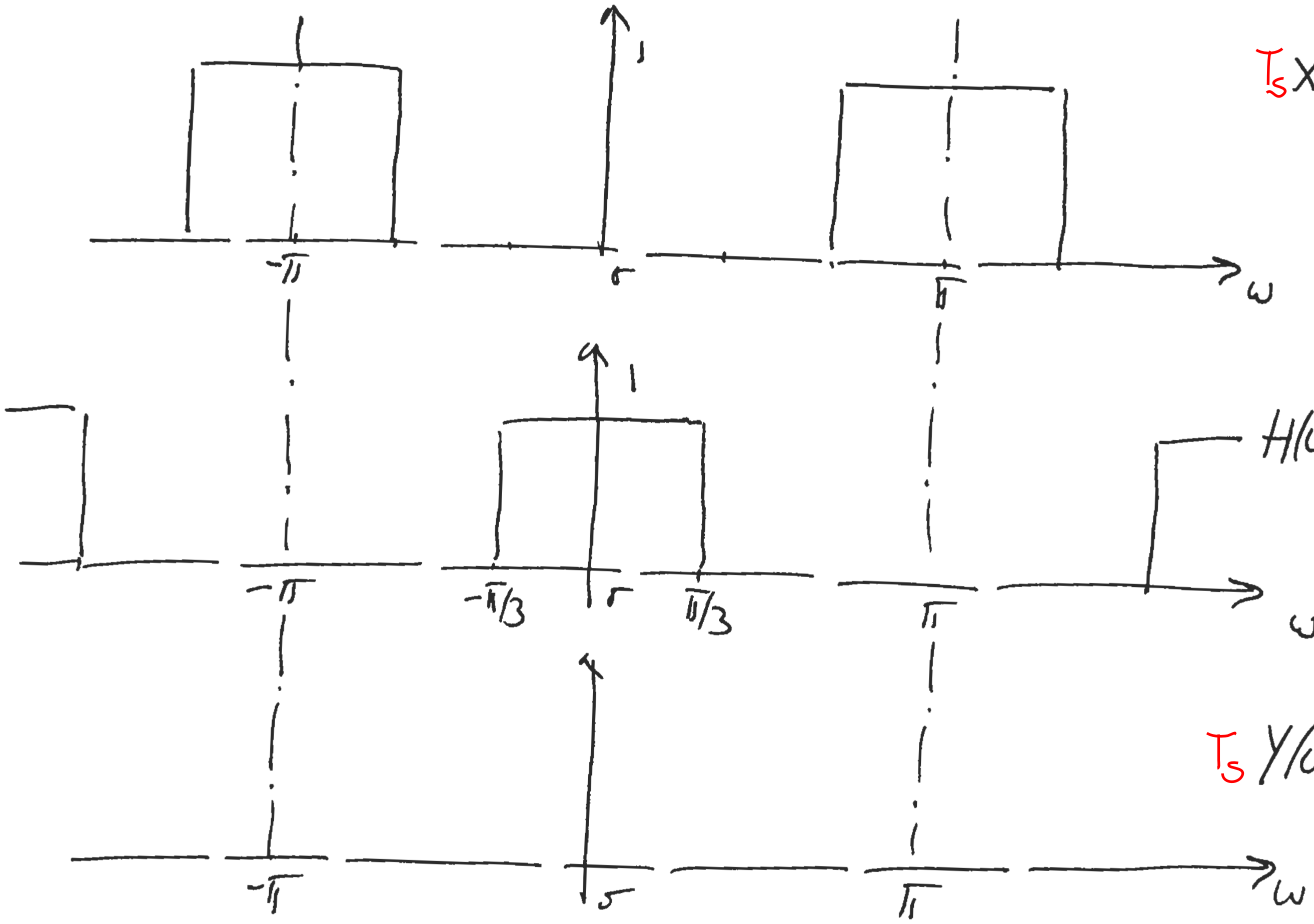
$$f_{sc} = 2 \cdot \max(f_1, f_2, f_3) = 2 \cdot 10{,}01\,Hz = 20{,}02\,Hz$$

② $x(t) \rightarrow$ idealno otipkavanje $\xrightarrow{x[n]}$ $H(\omega)$ $\xrightarrow{y[n]}$ idealni interpolator $\rightarrow y(t)$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 < 2 \cdot \omega_{max} = 8$ došlo je do preklapanja spektra





$Y(\omega)=0$ te je i $Y(\Omega)=0$ i $y(t)=0$

(3)

$$\begin{cases} h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\} \\ x[n] = \{\underline{-2}, 1, 1, 2\} \end{cases}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n]$$

FIR

obrađujemo li signal $x[n]$ u blokovima od po 6 uzoraka moramo svaki put odrediti konvoluciju $x[n]$ i $h[n]$ koja je duljine $6+6-1=11$

kako želimo koristiti DFT odabiremo $N=11$

postupak odgovara preklopi-i-zbroji metodi pri tome je $x_m[n]$ ulazni blok i vrijedi

$$x_m[n] = \begin{cases} x[n+m\cdot 6], & 0 \leq n < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

u našem slučaju je izlaz duljine $6+4-1=9$ te moramo odrediti dva izlazna bloka te ih preklopiti

1 BLOK: $h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\}$

$$x_0[n] = \{\underline{-2}, 1, 1, 2, 0, 0\}$$

$$y_c[n] = h[n] \; ⑪ \; x_0[n] = \sum_{i=0}^{10} h[i]\, x_0[n-i \bmod 11]$$

$$y_c[n] = \{\underbrace{-2, 1, 3, 3, -2, -5}_{\text{REZULTAT}}, \underbrace{-1, 1, 2, 0, 0}_{\text{PREKLAPAMO S DRUGIM BLOKOM I ZBRAJAMO}}\}$$

$$y_0[n] = \{\underline{-2}, 1, 3, 3, -2, -5\}$$

2 BLOK: $h[n] = \{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1\}$

$$x_1[n] = \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y_c[n] = \{\underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0}_{\text{REZULTAT}}, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0}_{\text{PREKLAPAMO S DRUGIM BLOKOM I ZBRAJAMO}}\}$$

$$y_1[n] = \{\underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0\} + \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 0\}$$

$$= \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 0, 0\}$$

ostale blokove ne trebamo računati jer daju nula

(4)

$$H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}, \quad s \mapsto \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 2\,\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{1}{8\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + 2\cdot 4\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2\cdot 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} =$$

$$= \frac{z^3+3z^2+3z+1}{8(z-1)^3 + 8(z-1)^2(z+1) + 4(z-1)(z+1)^2 + (z+1)^3}$$

odredimo polinom u nazivniku

$$\left.\begin{aligned} &8(z^3-3z^2+3z+1) \\ &+8(z^3-z^2-z+1) \\ &+4(z^3+z^2-z-1) \\ &+(z^3+3z^2+3z+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &z^3(8+8+4+1) = 21z^3 \\ &z^2(-3\cdot 8-8+4+3) = -25z^2 \\ &z(3\cdot 8-8-4+3) = 15 \\ &-8+8-4+1 = -3 \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{z^3+3z^2+3z+1}{21z^3-25z^2+15z-3}$$

kako bilinearna transformacija čuva stabilnost i tip promatramo prototip $H(s)$

$$s^3+2s^2+2s+1 = (s+1)(s^2-s+1) + 2s(s+1)$$
$$= (s+1)(s^2+s+1)$$

$$p_1 = -1, \quad p_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

kako su svi polovi u lijevoj poluravnini sustav je stabilan

iz položaja polova vidimo da je sustav NP filtar

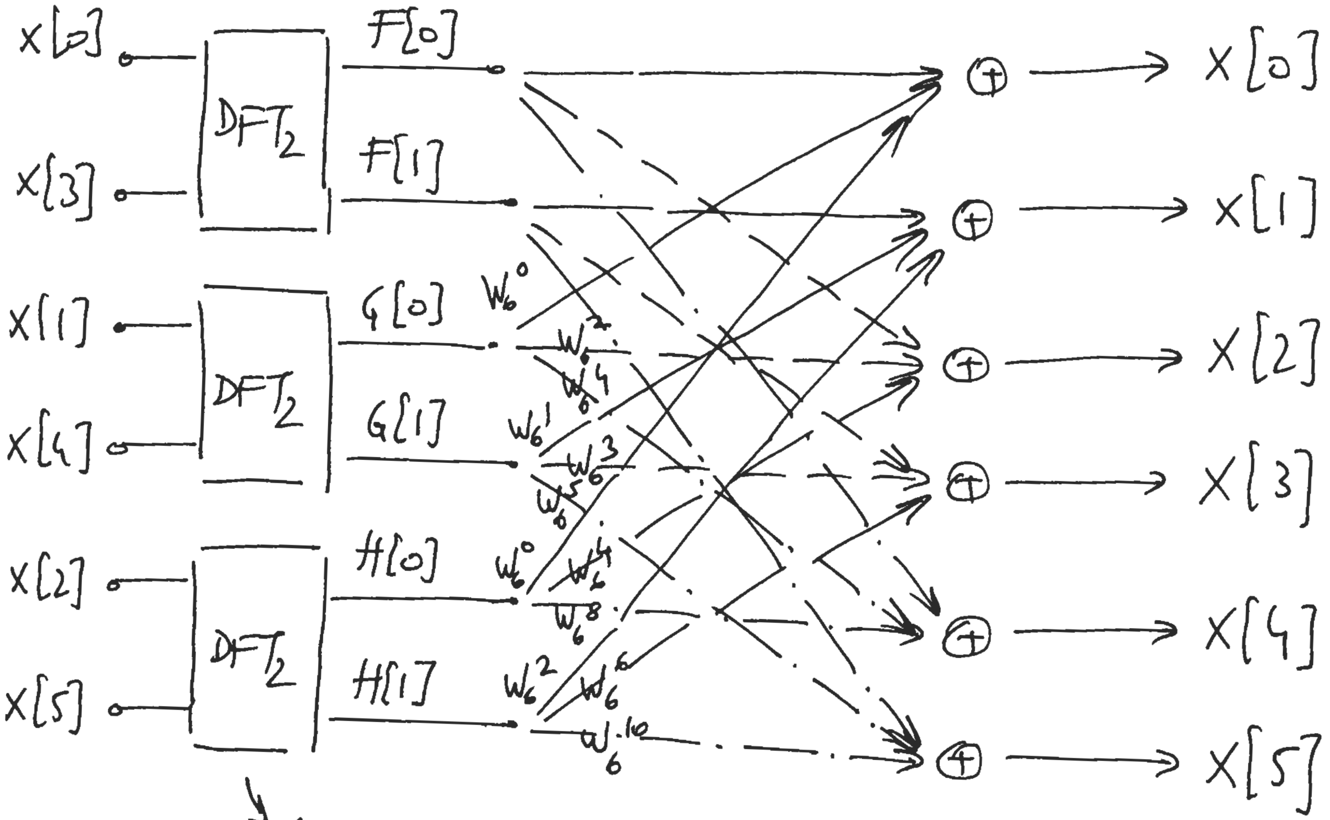
$\Omega_g = 0{,}1741$

$$\omega_g = 2\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\Omega_g \cdot T}{2}\right) = 0{,}1737$$

⑤ $X[k] = \sum_{n=0}^{5} x[n] W_6^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[3n] W_6^{3nk} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+1] W_6^{(3n+1)k}$

$+ \sum_{n=0}^{1} x[3n+2] W_6^{(3n+2)k} = \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n] W_2^{nk}}_{F} + W_6^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n+1] W_2^{nk}}_{G}$

$+ W_6^{2k} \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[3n+2] W_2^{nk}}_{H}$



blok obavi 1 množenje i 2 zbrajanja

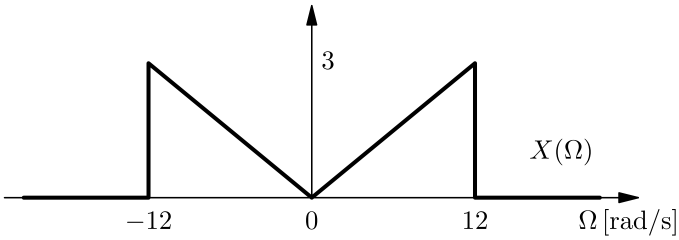
množenja s W_6^0, W_6^3, W_6^0 i W_6^6 ne računamo jer se operacija prenosi u zbrajalo na izlazu

	množenja	zbrajanja
DFT_2	1	2
DFT_2	1	2
DFT_2	1	2
mreža	8	6
	11	12

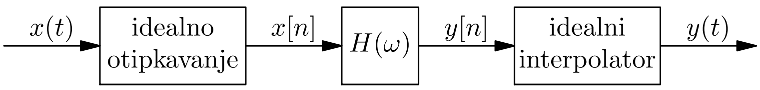
cijela struktura obavi 11 kompleksnih množenja i 12 kompleksnih zbrajanja što odgovara obavljanju 44 realna množenja i 46 realnih zbrajanja (kompleksno zbrajanje ima 2 realna zbrajanja dok kompleksno množenje ima 4 realna množenja i 2 realna zbrajanja)

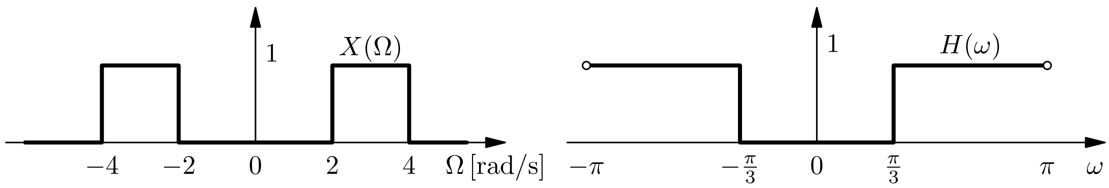
Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 5. rujna 2005.

1. Kontinuirani signal $x(t)$ ima spektar $X(\Omega)$ zadan slikom. Uzorkujemo signal s periodom otipkavanja T_s te dobivamo niz $x_n = x(nT_s)$. Skicirajte izgled spektra otipkanog signala za periode otipkavanja $T_{s1} = \pi/3$ i $T_{s2} = \pi/12$. Za koje od zadanih perioda otipkavanja je došlo do preklapanja spektra?



2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?





3. FIR filtar je opisan prijenosnom funkcijom

$$H(z) = 0{,}678 + 0{,}230z^{-1} - 0{,}400z^{-2} + 0{,}333z^{-3}.$$

Za zadani FIR filtar skicirajte blok shemu te na nju upišite koeficijente kvantizirane na 4 bita (3 bita i predznak) ako koristimo odsijecanje prema dolje. Odgovara li dobiveni FIR filtar nekom od poznatih tipova FIR filtara (I, II, III ili IV)?

4. Bilinearnom transformacijom uz $T = 1$ projektirajte digitalni filtar ako je prototipni analogni filtar opisan prijenosnom funkcijom

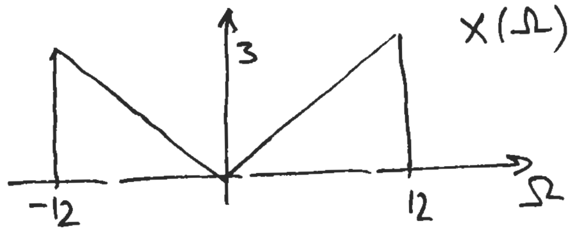
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}.$$

Ispitajte stabilnost te odredite tip (NP, VP, PP ili PB) dobivenog digitalnog filtra! Skicirajte direktnu formu II te na skicu upišite dobivene koeficijente filtra ako na raspolaganju imate 6 bitne frakcije (1 bit za predznak te 5 bitova mantise). Koristite zaokruživanje na najbliži cijeli broj.

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u četiri točke? Ako je poznato da blok za računanje DFT-a u dvije točke obavi dva kompleksna zbrajanja i jedno kompleksno množenje odredi ukupni broj operacija za cijelu strukturu koja računa DFT u četiri točke (množenja s jedinicom ne računaj u ukupni broj operacija).

DOS, 2005. 9. 5.

①

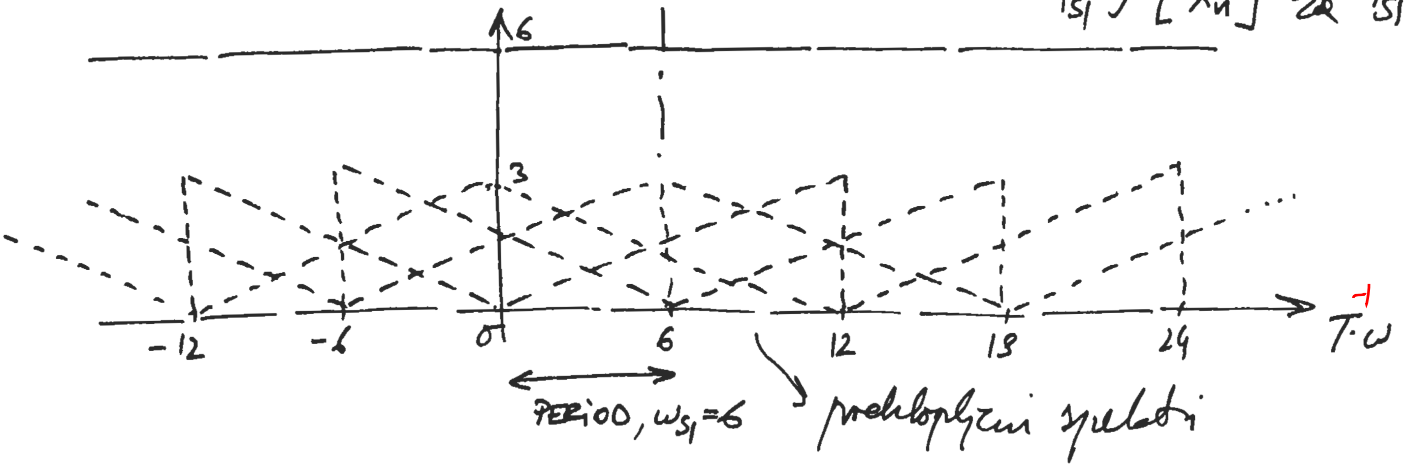


$$T_{s_1} = \pi/3 \Rightarrow \omega_{s_1} = \frac{2\pi}{T_{s_1}} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 < 2\cdot\omega_{max} = 24$$

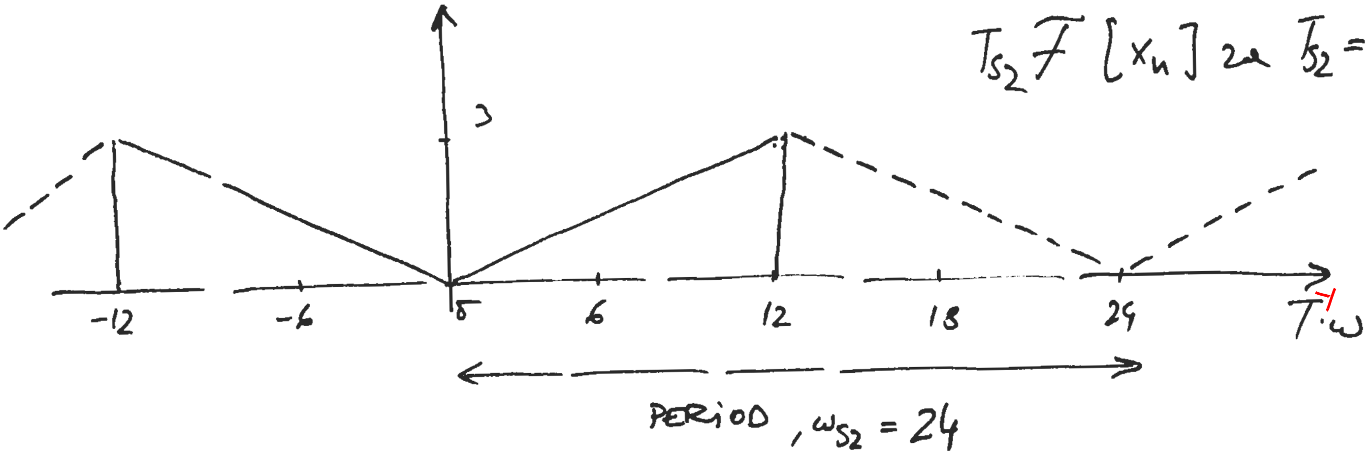
$$T_{s_2} = \pi/12 \Rightarrow \omega_{s_2} = \frac{2\pi}{T_{s_2}} = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24 \geq 2\cdot\omega_{max} = 24$$

Za period otipkavanja T_{s1} došlo je do preklapanja spektra, dok je za period otipkavanja T_{s2} signal kritično otipkan

$T_{s1}\mathcal{F}[x_n]$ za $T_{s1} = \pi/3$



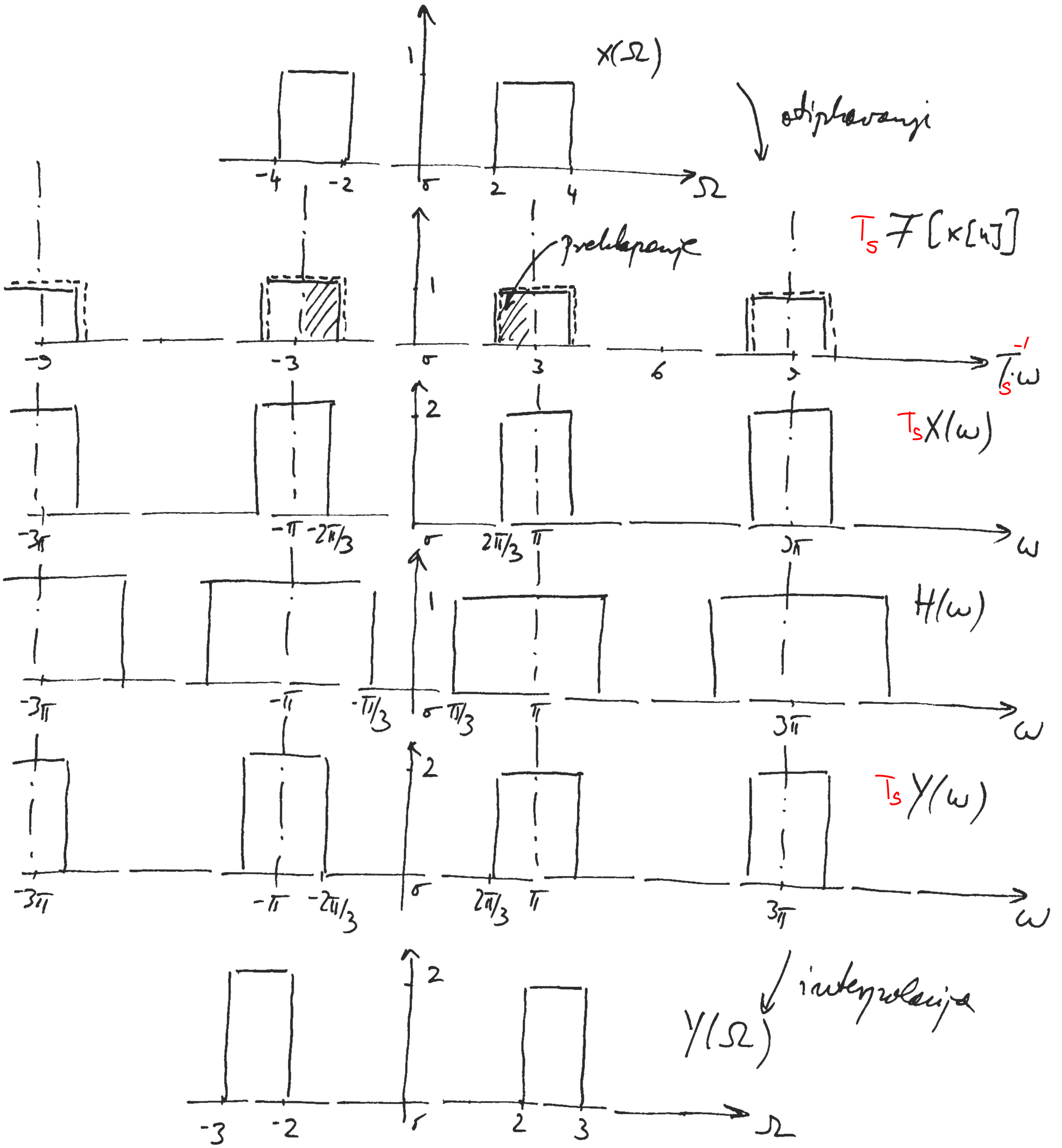
$T_{s2}\mathcal{F}[x_n]$ za $T_{s2} = \pi/12$



2) $x(t) \rightarrow$ [idealno otipkavanje] $\xrightarrow{x[n]}$ [$H(\omega)$] $\xrightarrow{y[n]}$ [idealni interpolator] $\rightarrow y(t)$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 < 2\cdot\omega_{max} = 8$ došlo je do preklapanja spektra



③ $H(z) = 0{,}678 + 0{,}230 z^{-1} - 0{,}400 z^{-2} + 0{,}333 z^{-3}$

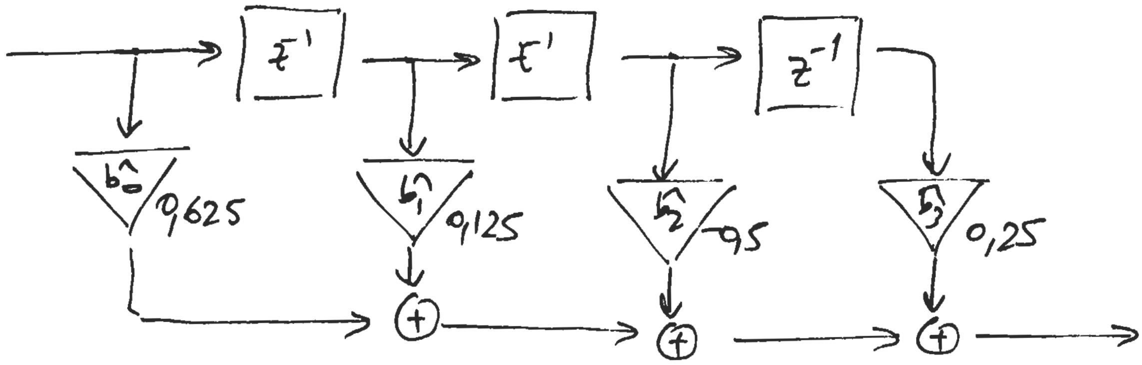
$$\hat{b}_0 = \frac{1}{8} \lfloor 0{,}678 \cdot 8 \rfloor = 5/8 = 0{,}625$$

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{8} \lfloor 0{,}230 \cdot 8 \rfloor = 1/8 = 0{,}125$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{8} \lfloor -0{,}400 \cdot 8 \rfloor = -4/8 = -0{,}5$$

$$\hat{b}_3 = \frac{1}{8} \lfloor 0{,}333 \cdot 8 \rfloor = 2/8 = 0{,}25$$

kako dobiveni odziv nije niti simetričan niti antisimetričan FIR filtar nije neki od tipova I, II, III ili IV



④

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}, \quad s \mapsto \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 2\,\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{4\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{4\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - \sqrt{2}\cdot 2\,\frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{4(z-1)^2}{4(z-1)^2 - 2\sqrt{2}\,(z^2-1) + (z+1)^2}$$

$$= \frac{4z^2 - 8z + 4}{(5-2\sqrt{2})z^2 - 6z + 5 + 2\sqrt{2}} \approx \frac{4z^2 - 8z + 4}{2{,}1716 z^2 - 6z + 7{,}8284}$$

bilinearna transformacija čuva tip filtra i stabilnost tako da možemo umjesto digitalnog filtra $H(z)$ promatrati prototip $H(s)$

$$p_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

kako filtar nije stabilan nije moguće odrediti frekvencijsku karakteristiku, a time ni tip filtra

$$H(z) = \frac{4z^2 - 8z + 4}{(5-2\sqrt{2})z^2 - 6z + 5 + 2\sqrt{2}} \approx 1{,}0219 \, \frac{0{,}5 - z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}{0{,}2774 - 0{,}7664z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(0{,}5 \cdot 32) = \frac{16}{32} = 0{,}5$$

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(-1 \cdot 32) = -\frac{32}{32} = -1$$

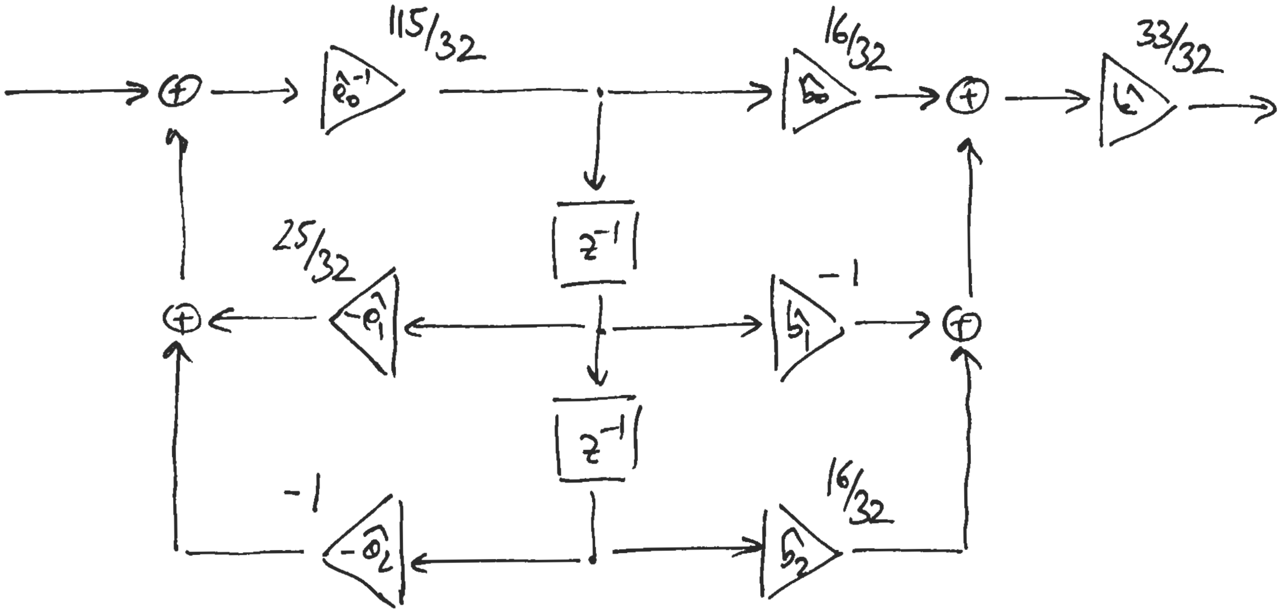
$$\hat{b}_2 = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(0{,}5 \cdot 32) = \frac{16}{32} = 0{,}5$$

$$\hat{a}_0^{-1} = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(32/0{,}2774) = \frac{115}{32} = 3{,}5938$$

$$\hat{a}_1^{+1} = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(-0{,}7664 \cdot 32) = -\frac{25}{32} = -0{,}7812$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(1 \cdot 32) = \frac{32}{32} = 1$$

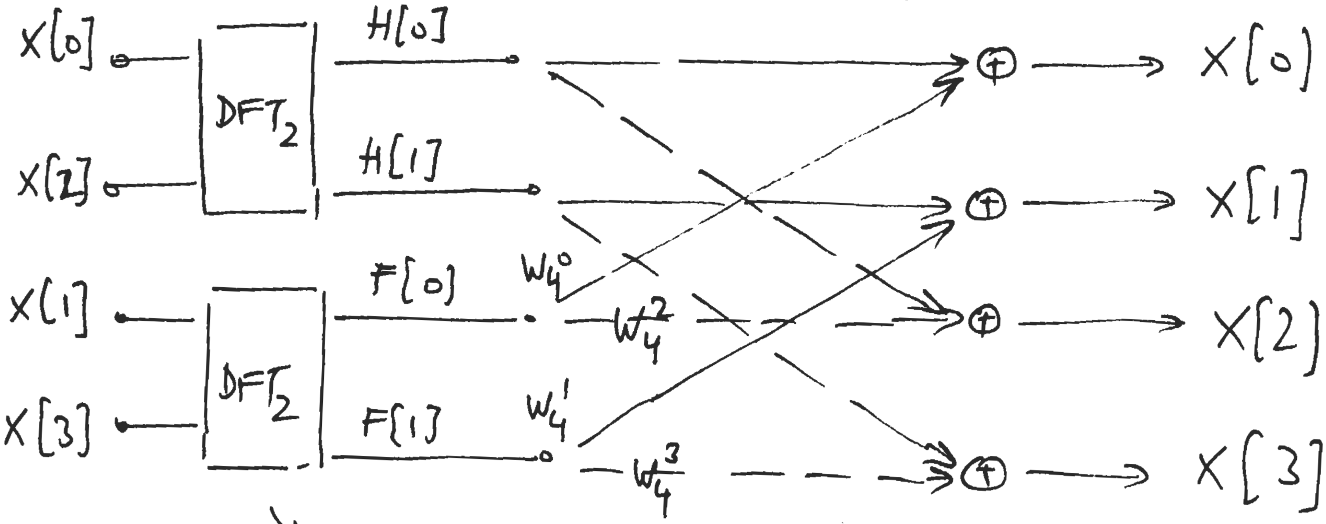
$$\hat{k} = \frac{1}{32}\,\text{round}\,(1{,}0219 \cdot 32) = \frac{33}{32} = 1{,}0312$$



5

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_4^{(2n+1)k}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[2n] W_2^{nk}}_{H} + W_4^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_2^{nk}}_{F}$$



→ blok obavi ~~2~~ 1 množenja i dva zbrajanja

odredimo ukupni broj množenja i zbrajanja za cijelu strukturu:

	množenja	zbrajanja
DFT_2	1	2
DFT_2	1	2
mreža	3	4
	5	8

cijela struktura obavi 5 kompleksnih množenja i 8 kompleksnih zbrajanja što odgovara obavljanju 20 realnih množenja i 26 realnih zbrajanja (kompleksno zbrajanje ima 2 realna zbrajanja dok kompleksno množenje ima 4 realna množenja i 2 realna zbrajanja)

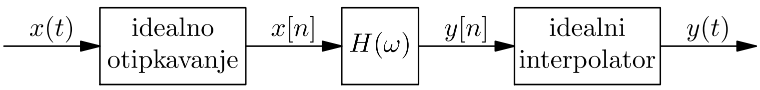
Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 12. srpnja 2005.

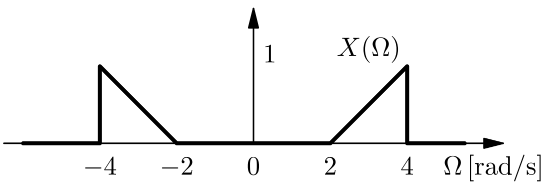
1. Odredite interpolacijsku funkciju oblika $\mathrm{sinc}(x)$ za signal

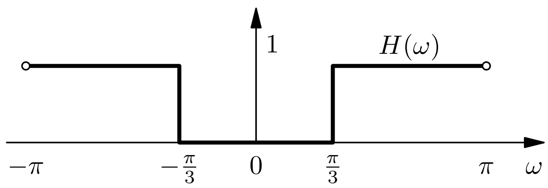
$$x[n] = \{\underline{8}, -8, 0, -8, 0, -8\}$$

ako je poznato da je signal otipkan s periodom $T = 1\,\mathrm{ms}$. Izračunajte vrijednost interpolacijske funkcije u trenutku $t = 2{,}5\,\mathrm{ms}$

2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







3. Promatramo kaskadu dva FIR filtra čije su prijenosne funkcije

$$H_1(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} \quad \text{i} \quad H_2(z) = -1 + 2z^{-1} + z^{-2}.$$

Odredi prijenosnu funkciju i impulsni odziv kaskade te skiciraj položaj nula u kompleksnoj ravnini. Kojem tipu FIR filtra odgovara kaskada, a kojem svaki od elemenata kaskade (tip I, II, III ili IV)?

4. Metodom jednakog impulsnog odziva odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog iz prototipa

$$H(s) = 6\frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s)(s^2 + 5s + 6)}.$$

Neka je $T = 0{,}1$. Je li dobiveni diskretni sustav stabilan?

5. Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 1, 0, 1\}$$

računanjem samo jedne kompleksne diskretne Fourierove transformacije.

Uputa: Koristi RE2FFT postupak.

DOS, 12. 7. 2005.

① $x[n] = \{\underline{8}, -8, 0, -8, 0, -8\}$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin(\pi/T\,(t-nT))}{\pi/T\,(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

$$x_r(t) = 8\operatorname{sinc}(t) - 8\operatorname{sinc}(t-1) - 8\operatorname{sinc}(t-3) - 8\operatorname{sinc}(t-5)$$

$$x_r(5/2) = 8\operatorname{sinc}(5/2) - 8\operatorname{sinc}(3/2) - 8\operatorname{sinc}(-1/2) - 8\operatorname{sinc}(-5/2) =$$

$$= 8\cdot\frac{2}{5\pi} - 8\cdot\left(-\frac{2}{3\pi}\right) - 8\,\frac{2}{\pi} - 8\cdot\frac{2}{5\pi} =$$

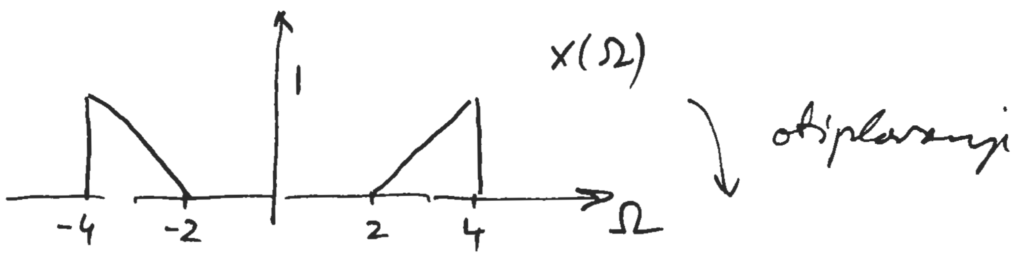
$$= \frac{8}{15\pi}(6 + 10 - 30 - 6) = -\frac{32}{3\pi} \approx -3{,}3953$$

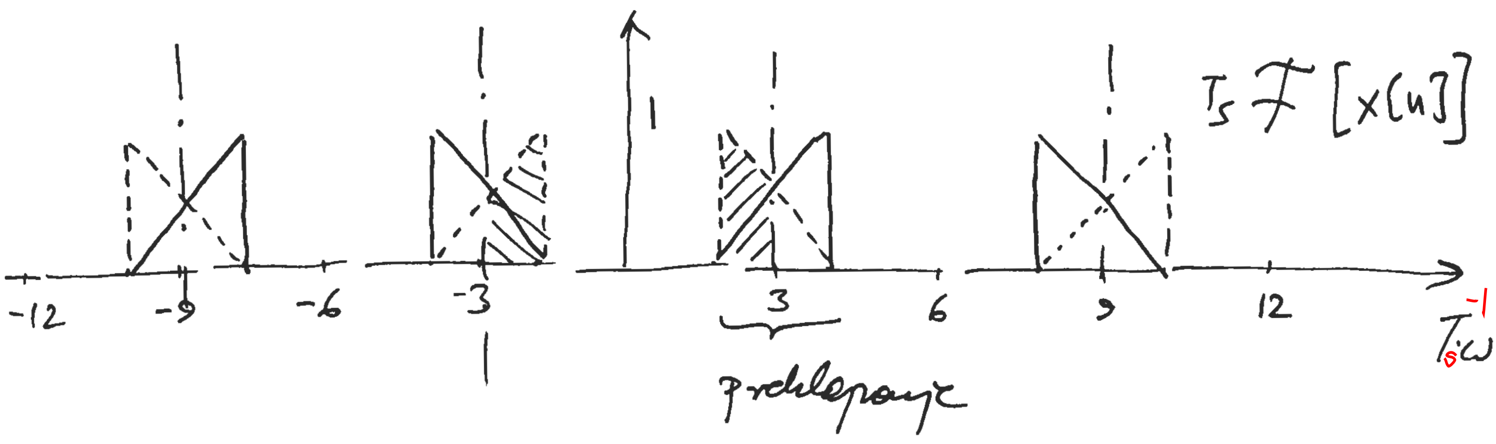
②

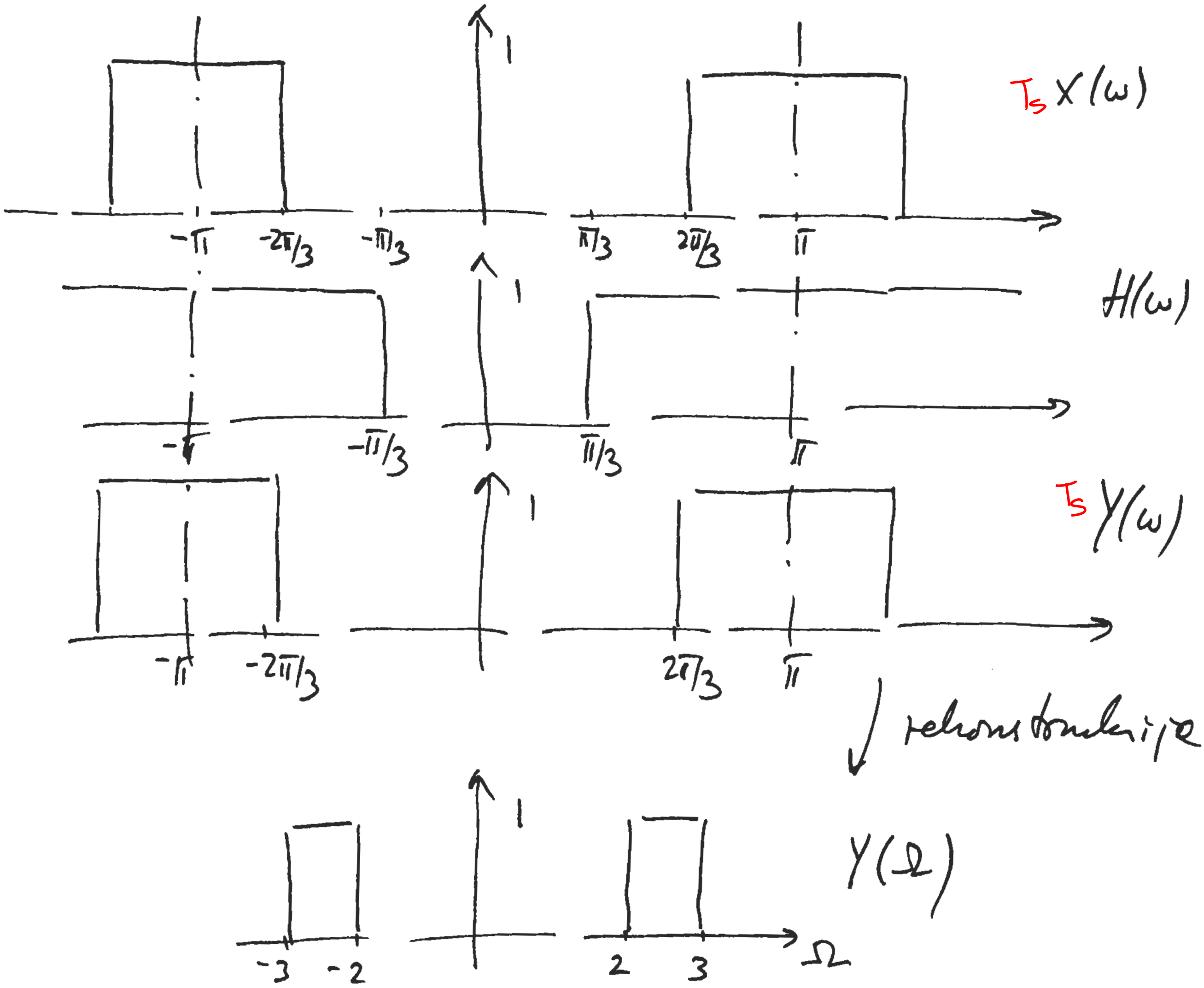
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{idealno otipkavanje}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{idealni interpolator}} \longrightarrow y(t)$$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 < 2\cdot\omega_{max} = 8$ došlo je do preklapanja spektra

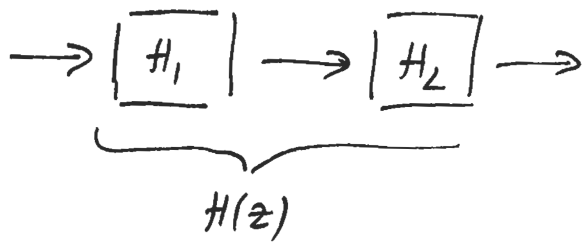






③ $$H_1(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$H_2(z) = -1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$



$$H(z) = H_1(z)\cdot H_2(z) = (1 + 2z^{-1} - z^{-2})\cdot(-1 + 2z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = -1 + 6z^{-2} - z^{-4}$$

zadani FIR filtri $H_1(z)$ i $H_2(z)$ ne pripadaju niti jednom od standardna 4 tipa, dok je dobiveni filtar simetričan parnog reda (tip I)

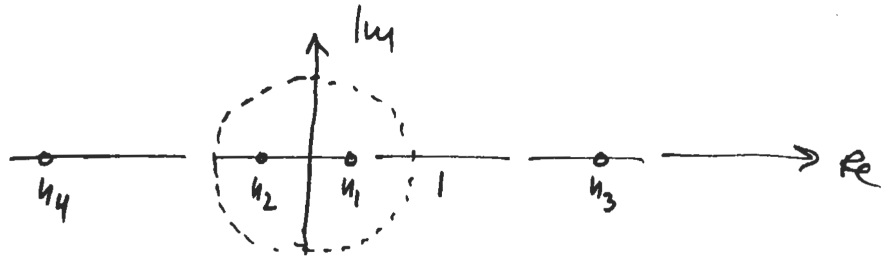
$$-1+6z^{-2}-z^{-4}=0 \Rightarrow z^{-2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{-2} = 3\mp 2\sqrt{2}$$

$$n_1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \approx 0,4142$$

$$n_2 = -\sqrt{3-2\sqrt{3}} \approx -0,4142$$

$$n_3 = \sqrt{3+2\sqrt{2}} \approx 2,4142$$

$$n_4 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}} \approx -2,4142$$



(4)

$$H(s) = 6\,\frac{3s^3+7s^2+10s+7}{(s^2+s)(s^2+5s+6)}, \quad T=0,1$$

najprije određujemo $h(t)$ iz rastava na parcijalne razlomke

$$(s^2+s)(s^2+5s+6) = s(s+1)(s+2)(s+3)$$

$$a_0 = s\cdot H(s)\big|_{s=0} = 6\cdot\frac{7}{1\cdot 2\cdot 3} = 7$$

$$a_1 = (s+1)\,H(s)\big|_{s=-1} = 6\cdot\frac{-3+7-10+7}{-1\cdot 1\cdot 2} = -3$$

$$a_2 = (s+2)\,H(s)\big|_{s=-2} = 6\cdot\frac{-3\cdot 8+7\cdot 4-10\cdot 2+7}{-2\cdot(-1)\cdot 1} = -27$$

$$a_4 = (s+3)\,H(s)\big|_{s=-3} = 6\cdot\frac{-3\cdot 27+7\cdot 9-10\cdot 3+7}{-3\cdot(-2)\cdot(-1)} = 41$$

$$H(s) = \frac{7}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{-27}{s+2} + \frac{41}{s+3}$$

$$h(t) = 7 - 3e^{-t} - 27e^{-2t} + 41e^{-3t}$$

$$h[n] = h(n \cdot T) = 7 - 3e^{-n/10} - 27e^{-n/5} + 41e^{-3n/10}$$

$$H(z) = 7\frac{z}{z-1} - 3\frac{z}{z-e^{-1/10}} - 27\frac{z}{z-e^{-1/5}} + 41\frac{z}{z-e^{-3/10}}$$

dobiveni diskretni sustav je stabilan (trajni režim nalazi se na granici stabilnosti) jer se polovi nalaze unutar jedinične kružnice u z-ravnini

5

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 1, 0, 1\}$$

$$x_2[n] = \{\underline{-3}, 1, 0, 1\}$$

$$x[n] = \{\underline{5-3j}, 1+j, 0, 1+j\}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\,W_4^{nk} = 5-3j + (1+j)\,W_4^{k} + (1+j)\,W_4^{3k}$$

$$X[0] = 5-3j + 1+j + 1+j = 7-j$$

$$X[1] = 5-3j - j(1+j) + j(1+j) = 5-3j$$

$$X[2] = 5-3j - (1+j) - (1+j) = 3-5j$$

$$X[4] = 5-3j + j(1+j) - j(1+j) = 5-3j$$

$$X[k] = \{\underline{7-j}, 5-3j, 3-5j, 5-3j\}$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,[X_1[k]] = \mathrm{Re}\,[X[k]] + \mathrm{Re}\,[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}\,[X_1[k]] = \mathrm{Im}\,[X[k]] - \mathrm{Im}\,[X[4-k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}\,[X_1[k]] = \{\underline{7+7},\ 5+5,\ 3+3,\ 5+5\}$$

$$2\,\mathrm{Im}\,[X_1[k]] = \{\underline{-1-(-1)},\ -3-(-3),\ -5-(-5),\ -3-(-3)\}$$

$$X_1[k] = \{\underline{7},\ 5,\ 3,\ 5\}$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,[X_2[k]] = \mathrm{Im}\,[X[k]] + \mathrm{Im}\,[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}\,[X_2[k]] = \mathrm{Re}\,[X[4-k]] - \mathrm{Re}\,[X[k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}\,[X_2[k]] = \{\underline{-1+(-1)},\ -3+(-3),\ -5+(-5),\ -3+(-3)\}$$

$$2\,\mathrm{Im}\,[X_2[k]] = \{\underline{7-7},\ 5-5,\ 3-3,\ 5-5\}$$

$$X_2[k] = \{\underline{-1},\ -3,\ -5,\ -3\}$$

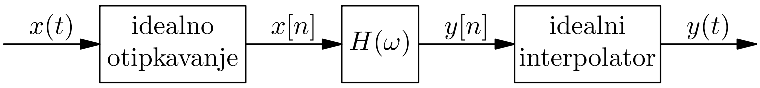
Digitalna obradba signala

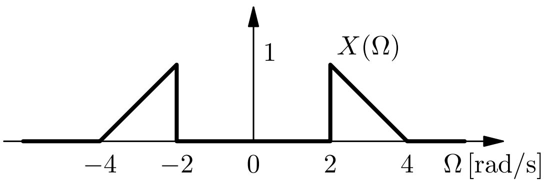
Pismeni ispit – 4. srpnja 2005.

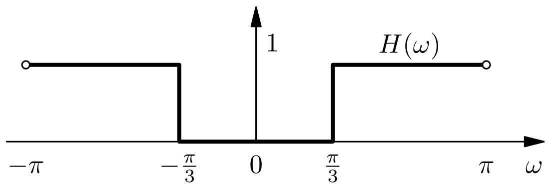
1. Odredite i skicirajte diskretnu Fourierovu transformaciju duljine 6 signala

$$x[n] = \{\underline{8}, -8, 0, -8, 0, -8\}.$$

2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







3. Raspolažemo je jednim FIR filtrom i s jednim IIR filtrom čije su prijenosne funkcije

$$H_{\mathrm{FIR}}(z) = 1 + az^{-1} - az^{-3} - z^{-4} \quad \text{i} \quad H_{\mathrm{IIR}} = \frac{1}{1 - z^{-2}},$$

gdje je a nepoznata realna konstanta. Odredi prijenosnu funkciju kaskade ta dva filtra te odziv kaskade na pobudu

$$u[n] = \delta[n] - \sqrt{2}\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

ako znaš da FIR filtar ima nulu na frekvenciji $\omega = 3\pi/4$.

4. Digitalni filtar s beskonačnim impulsnim odzivom određen je prijenosnom funkcijom

$$H(z) = \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}.$$

Odredite polove i nule zadanog sustava te nacrtajte njihov položaj u kompleksnoj ravnini. Je li filtar stabilan i zašto? Nacrtajte realizaciju filtra transponiranom direktnom formom II te na sliku upišite skalirane i kvantizirane koeficijente filtra ako na raspolaganju imate 4 bita (1 bit predznaka te tri bita mantise). Utječe li kvantizacija koju ste odabrali na stabilnost filtra?

5. Odredite cirkularnu konvoluciju duljine 12 signala

$$x_1[n] = \{\underline{-2}, 0, 1, 1, 0, 2\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{2}, 0, 1, 1, 0, -2\}.$$

Signale proširite s nulama prema potrebi. Koji dio dobivene cirkularne konvolucije odgovara linearnoj konvoluciji zadanih signala?

① $x[n] = \{\underline{8}, -8, 0, -8, 0, -8\}$

$$X[k] = DFT_6\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{5} x[n]\, W_6^{nk}$$

$$= 8W_6^0 - 8W_6^k - 8W_6^{3k} - 8W_6^{5k} = 8\left(1 - W_2^k - W_6^k - W_6^{-k}\right)$$

$$X[0] = 8(1-1-1-1) = 8\cdot(-2) = -16$$

$$X[1] = 8\left(1-(-1)-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)-\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = 8\cdot 1 = 8$$

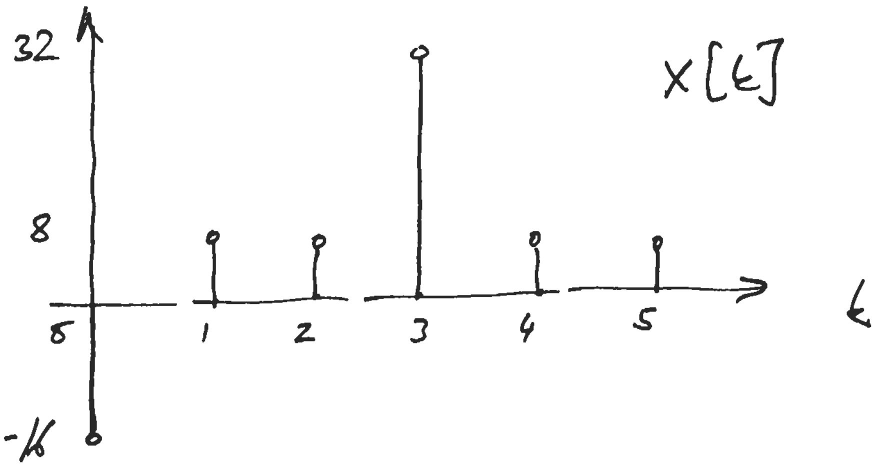
$$X[2] = 8\left(1-1-\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)-\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = 8\cdot 1 = 8$$

$$X[3] = 8\left(1-(-1)-(-1)-(-1)\right) = 8\cdot 4 = 32$$

$$X[4] = 8\left(1-1-\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)-\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = 8\cdot 1 = 8$$

$$X[5] = 8\left(1-(-1)-\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = 8\cdot 1 = 8$$

$$X[k] = \{\underline{-16}, 8, 8, 32, 8, 8\}$$

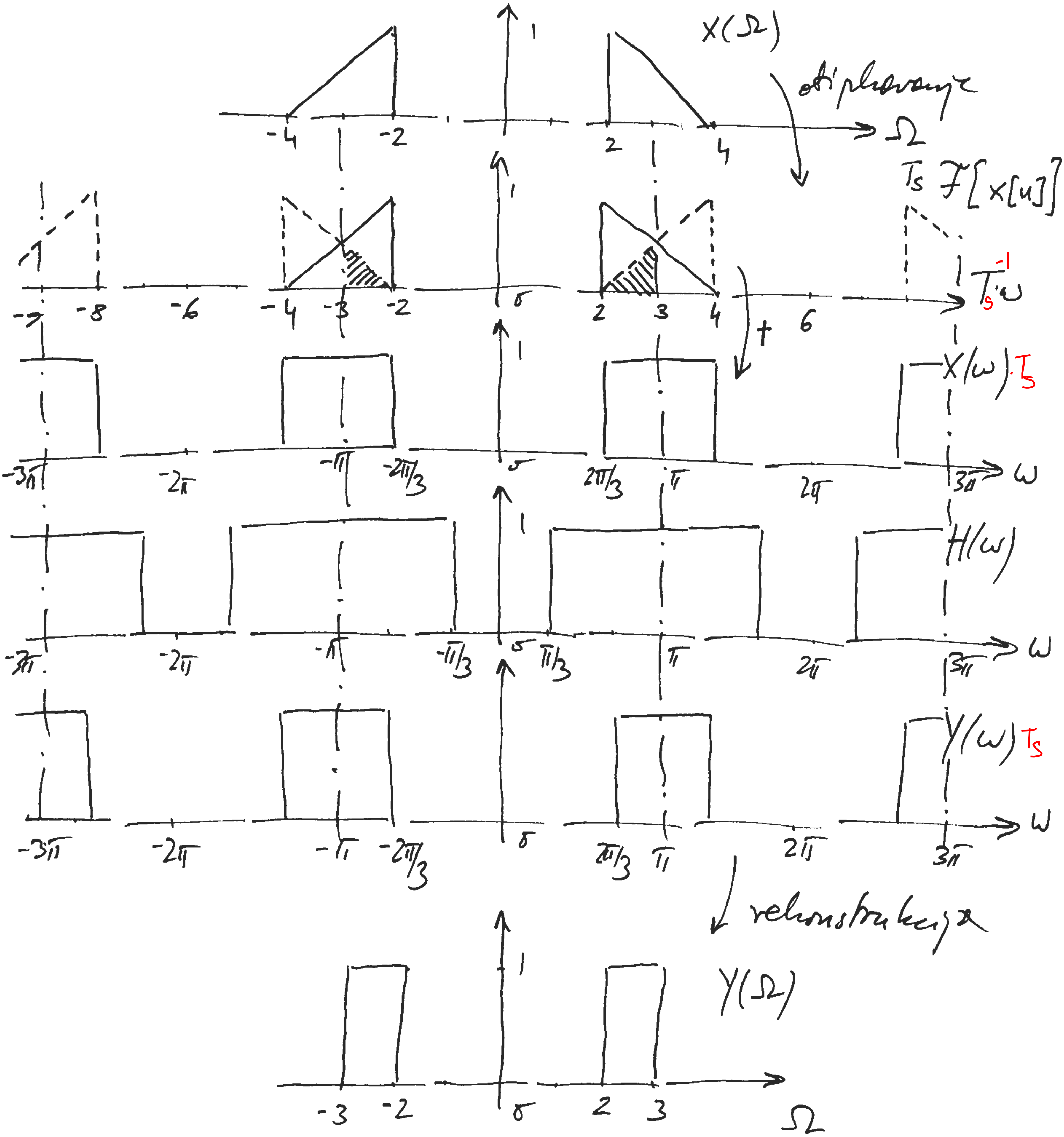


spektar je čisto realni, $X[k] \in \mathbb{R}$

② $x(t) \rightarrow$ idealno otipljavanje $\xrightarrow{x[n]}$ $H(\omega)$ $\xrightarrow{y[n]}$ idealni interpolator $\xrightarrow{y(t)}$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 < 2\cdot\omega_{max} = 8$ došlo je do prekrivanja spektra



(3) $H_{IIR}(z) = \dfrac{1}{1-z^{-2}}$

$$H_{FIR}(z) = 1 + az^{-1} - az^{-3} - z^{-4} = (1-z^{-2})(1+az^{-1}+z^{-2})$$

odredimo najprije konstantu a

$$z_{1,2} = \pm 1, \quad z_{3,4} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4}$$

$$e^{\pm j3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{j}{\sqrt{2}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4} = z_{3,4} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

kaskada FIR i IIR filtara je

$$x[n] \longrightarrow \underbrace{\boxed{H_{FIR}(z)} \longrightarrow \boxed{H_{IIR}(z)}}_{H(z)} \longrightarrow y[n]$$

$$H(z) = H_{FIR}(z) \cdot H_{IIR}(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}(1-z^{-2})(1+\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2})$$

$$H(z) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$$

$$\begin{cases} h[n] = \delta[n] + \sqrt{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2] = \{\underline{1}, \sqrt{2}, 1\} \\ x[n] = \delta[n] - \sqrt{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2] = \{\underline{1}, -\sqrt{2}, 1\} \end{cases}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]\,x[n-i]$$

$$= \delta[n] + \delta[n-4]$$

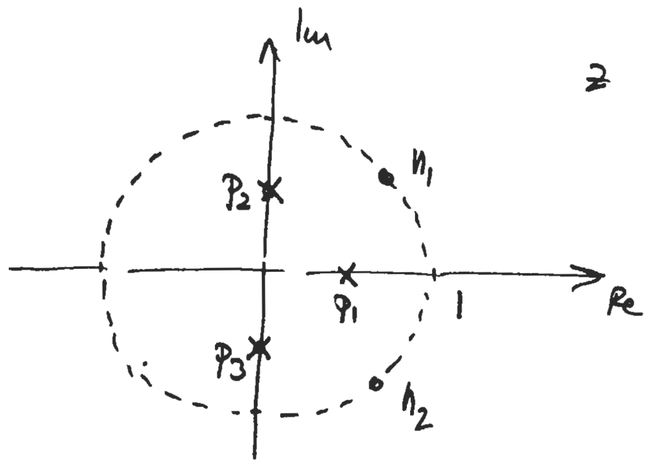
$$y[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 1\}$$

④ $$H(z) = \frac{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

$$1-\tfrac{1}{2}z^{-1}=0 \Rightarrow p_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$1+\tfrac{1}{4}z^{-2}=0 \Rightarrow p_{2,3} = \pm j\,\tfrac{1}{2}$$

$$1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}=0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{\sqrt{2}^2-4}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$$



kako se svi polovi nalaze unutar jedinične kružnice u z-ravnini sustav je stabilan

$$H(z) = \sqrt{2}\,\frac{1/\sqrt{2} - z^{-1} + 1/\sqrt{2}\,z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$= 1{,}4142\cdot\frac{0{,}7071 - 1\cdot z^{-1} + 0{,}7071\,z^{-2}}{1-0{,}5\,z^{-1}+0{,}25\,z^{-2}-0{,}125\,z^{-3}}$$

$$\hat{b}_0 = \tfrac{1}{8}\,\text{round}(0{,}7071\cdot 8) = \tfrac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\hat{b}_1 = -1$$

$$\hat{b}_2 = \tfrac{1}{8}\,\text{round}(0{,}7071\cdot 8) = \tfrac{6}{8} = 0{,}75$$

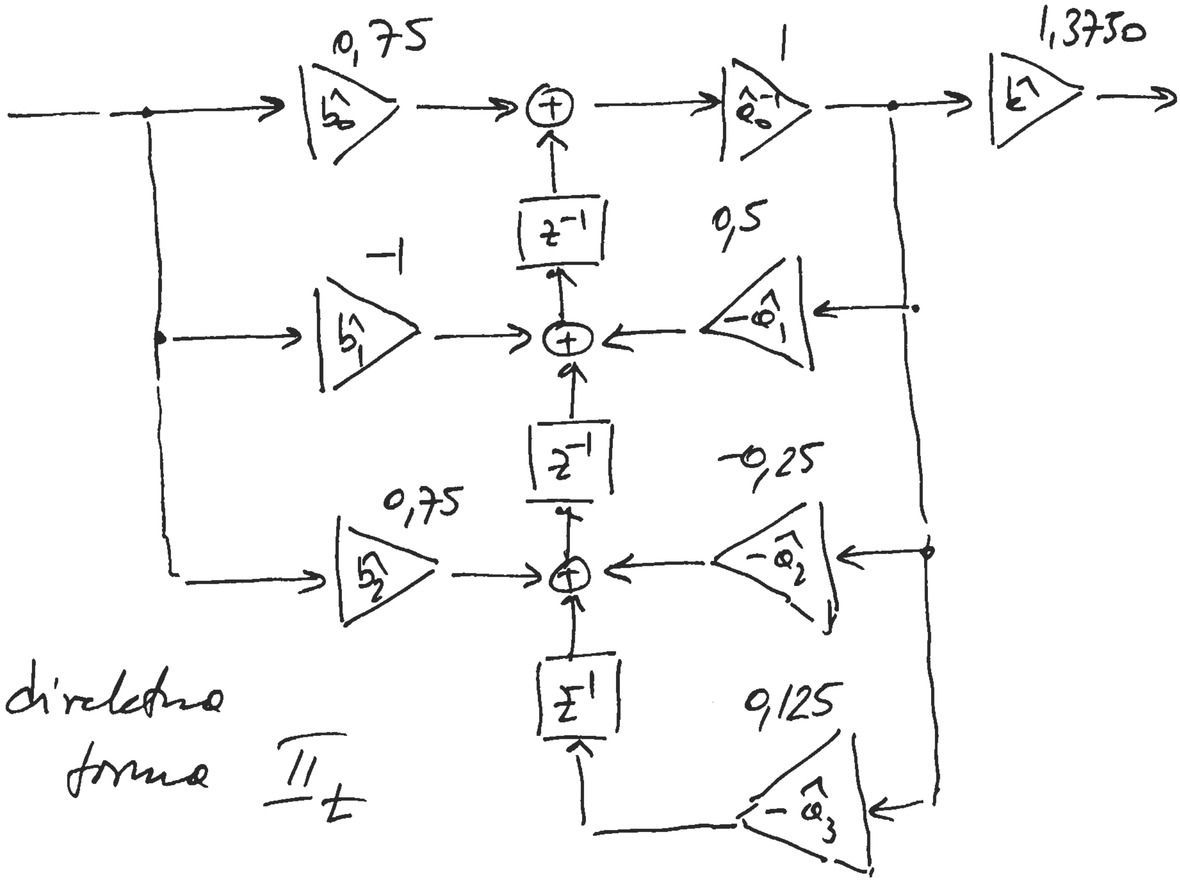
$$\hat{a}_0^{-1} = \tfrac{1}{8}\,\text{round}(8/1) = 1$$

$$\hat{a}_1 = \tfrac{1}{8}\,\text{round}(-0{,}5\cdot 8) = -\tfrac{4}{8} = -0{,}5$$

$$\hat{a}_2 = \tfrac{1}{8}\,\text{round}(0{,}25\cdot 8) = \tfrac{2}{8} = 0{,}25$$

$\hat{a}_3 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(-0{,}125 \cdot 8) = -\frac{1}{8} = -0{,}125$

$\hat{k} = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(1{,}4142 \cdot 8) = \frac{11}{8} = 1{,}3750$



direktna forma $\underline{II}_t$

(5)

$x_1[n] = \{\underline{-2}, 0, 1, 1, 0, 2\}$

$x_2[n] = \{\underline{2}, 0, 1, 1, 0, -2\}$

da bi izračunali x_1 ⑫ x_2 signale proširujemo s nulama s desne strane do duljine 12

$$y_c[n] = \sum_{i=0}^{12-1} x_2[i]\, x_1[n-i \bmod 12]$$

$$y_c[n] = \{\underline{-4}, 0, 0, 0, 1, 10, 1, 0, 0, 0, -4, 0\}$$

odredimo i linearnu konvoluciju

$$y_e[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$$

$$y_e[n] = \{ \underline{-4}, 0, 0, 0, 1, 10, 1, 0, 0, 0, -4 \}$$

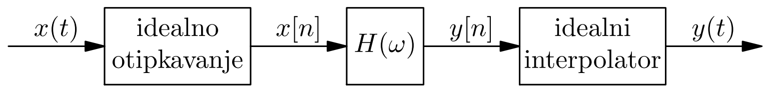
linearnu konvoluciju možemo odrediti preko cirkularne ako proširimo signale do duljine

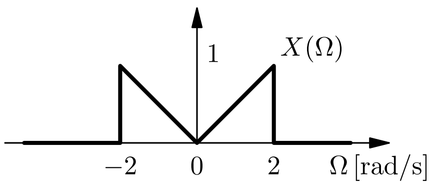
$$l_1 + l_2 - 1 = 11$$

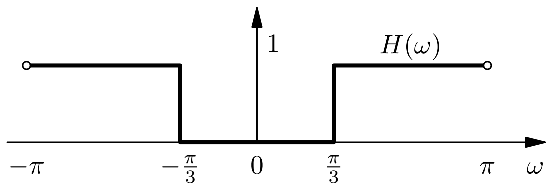
u našem slučaju su signali prošireni do duljine 12 te prvih 11 uzoraka odgovara linearnoj konvoluciji $x_1[n] * x_2[n]$

Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 20. lipnja 2005.

1. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







2. Promatramo FIR filtar s prijenosnom funkcijom oblika

$$H(z) = 1 + az^{-1} + bz^{-2} - az^{-3} - z^{-4}.$$

Odredi amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku te izračunaj njen iznos za frekvencije $\omega = 0$ i $\omega = \pi$. Odredi uvjete koje moraju zadovoljavati realne konstanate a i b da bi fazna karakteristika bila linearna. Uz tako određene uvjete odredi vrijednosti konstanti a i b tako da filtar ima nulu na frekvenciji $\omega = 3\pi/4$. Za taj slučaj skiciraj amplitudnu i faznu karakteristiku te grupno vrijeme kašnjenja te nacrtaj položaj svih nula filtera.

3. Zadan je niskopropusni digitalni filtar s monotono-padajućom amplitudnom karakteristikom opisan prijenosnom funkcijom

$$H_{\mathrm{NP}}(z) = k\frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{4 - 2\sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}}.$$

Odredite konstantu k tako da pojačanje istosmjerne komponente bude jedinično te za tu konstantu k odredite maksimalni iznos valovitosti u području propuštanja ako je poznato da je granična frekvencija $\pi/6$. Iz ovog NP filtra sada projektirajte visoko-propusni filtrar $H_{\mathrm{VP}}(z)$ čija je granična frekvencija $5\pi/6$. Koliko je pojačanje dobivenog filtra na polovini frekvencije otipkavanja te kolika je njegova valovitost u području propuštanja?

4. Odredite linearnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{-2}, 0, 1, 1, 0, 2\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{2}, 0, 1, 1, 0, -2\}.$$

Kako možemo dobivenu linearnu konvolciju odrediti pomoću cirkularne konvolucije?

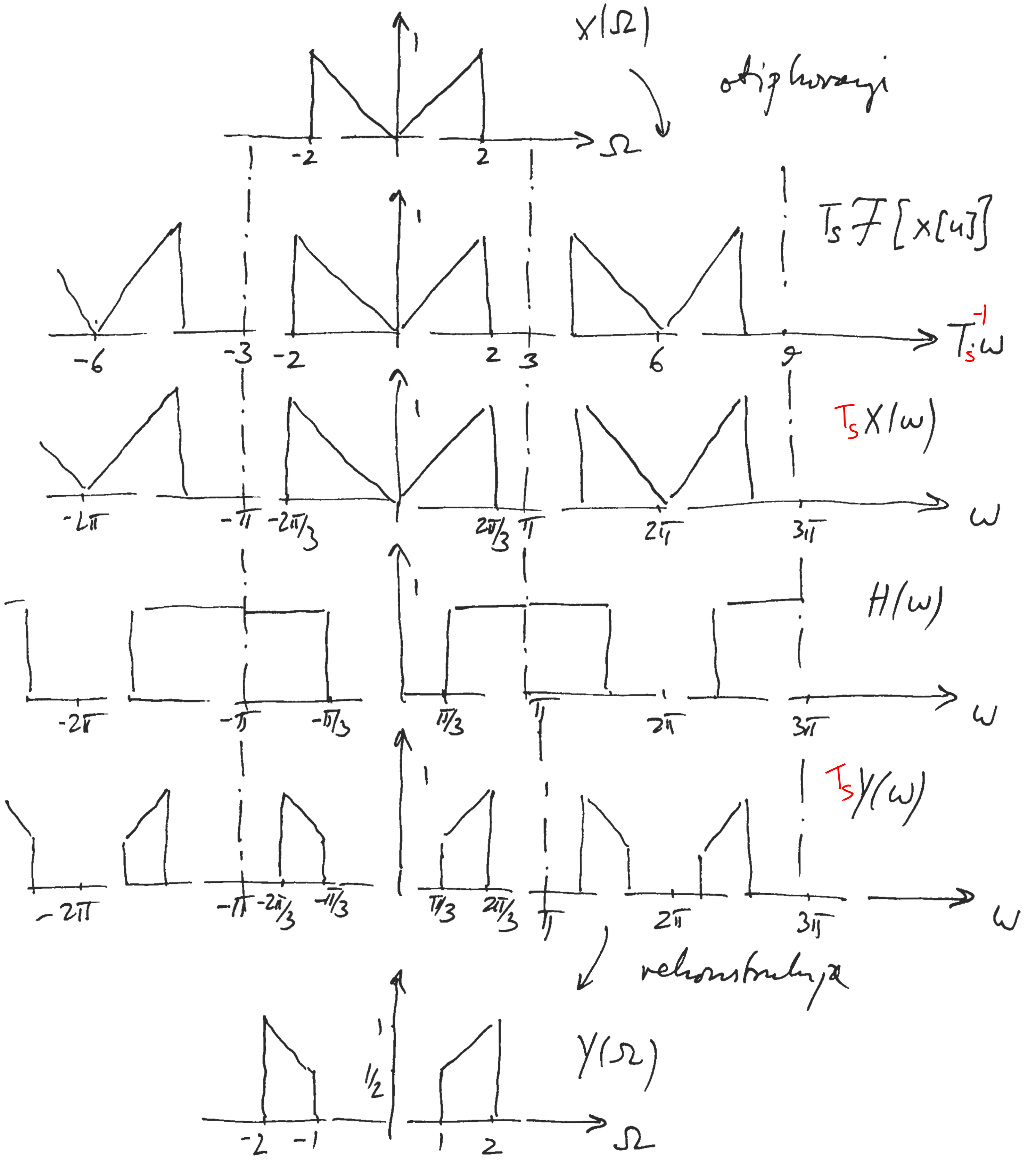
5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u tri točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u šest točaka?

DOS, 9. 5. 2005.

① $x(t) \rightarrow \boxed{\text{idealno otipkavanje}} \xrightarrow{x[n]} \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{y[n]} \boxed{\text{idealni interpolator}} \rightarrow y(t)$

$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 > 2 \cdot \omega_{max} = 4$ nema preklapanja spektra



(2) $H(z) = 1 + az^{-1} + bz^{-2} - az^{-3} - z^{-4}$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + ae^{-j\omega} + be^{-2j\omega} - ae^{-3j\omega} - e^{-4j\omega} =$$

$$= e^{-2j\omega}\left(e^{2j\omega} - e^{-2j\omega} + a(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) + b\right) =$$

$$= \underbrace{j e^{-2j\omega}}_{\phi(\omega)} \underbrace{\left(2\sin(2\omega) + 2a\sin(\omega) + \frac{b}{j}\right)}_{R(\omega)}$$

$H(e^{j\cdot 0}) = b$, $H(e^{j\cdot\pi}) = b$

za generaliziranu linearnu fazu je $R(\omega) \in \mathbb{R}$ te mora biti $\frac{b}{j} = 0$, odnosno $b = 0$, dok na a nema uvjeta, dakle $a \in \mathbb{R}$

$$H(z) = 1 + az^{-1} - az^{-3} - z^{-4} = (1 - z^{-2})(1 + az^{-1} + z^{-2})$$

$$z_{1,2} = \pm 1, \quad z_{4,3} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$$

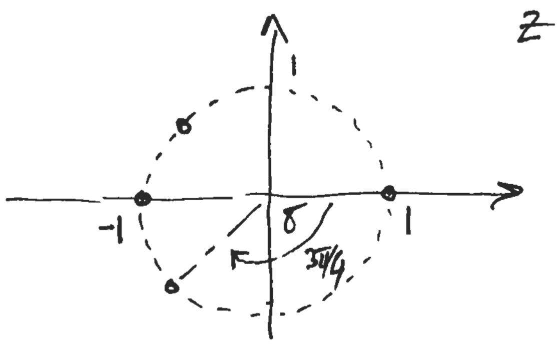
$$e^{\pm j3\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{j}{\sqrt{2}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} = z_{3,4} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$H(z) = 1 + \sqrt{2}z^{-1} - \sqrt{2}z^{-3} - z^{-4}$$

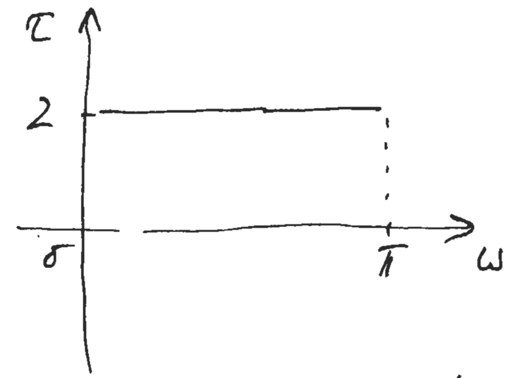
$$R(\omega) = 2\sin(2\omega) + 2\sqrt{2}\sin(\omega)$$

$$\phi(\omega) = -2\omega + \pi/2$$

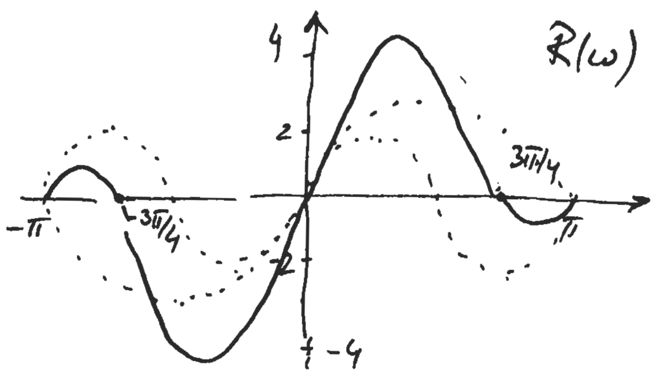
$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\phi(\omega) = 2$$

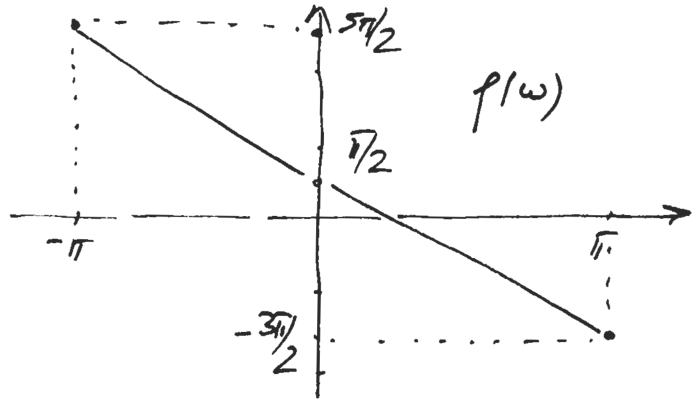


nule sustava



grupno vrijeme kašnjenja





(3)
$$H_{NP}(z) = k \, \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{4 - 2\sqrt{3}\, z^{-1} + z^{-2}}$$

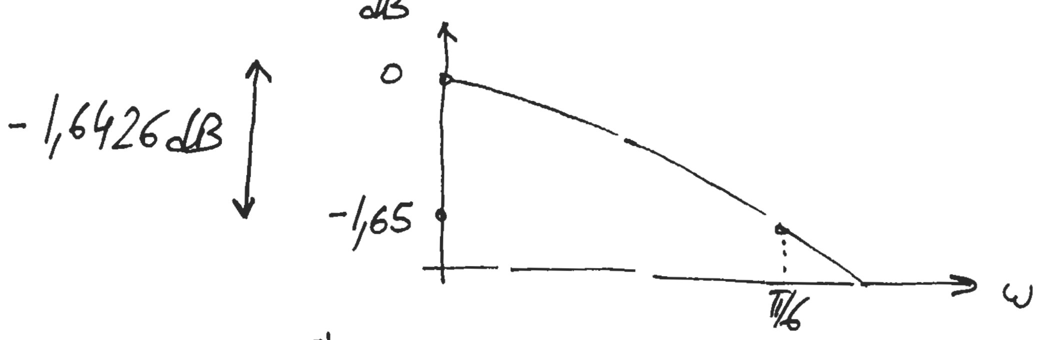
$$H_{NP}(e^{j\cdot 0}) = 1 = k \, \frac{1+2+1}{4 - 2\sqrt{3} + 1} \Rightarrow k = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}3840$$

karakteristika je monotona te uz zadanu ω_g valovitost određujemo kao razliku pojačanja u $\omega = 0$ i $\omega = \omega_g = \pi/6$

$$\omega = 0 \Rightarrow A_{NP}(0) = 1 = 0\,dB$$

$$\omega = \pi/6 \Rightarrow A_{NP}(\pi/6) = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{|1 + 2e^{-j\pi/6} + e^{-j\pi/3}|}{|4 - 2\sqrt{3}\, e^{-j\pi/6} + e^{-j\pi/3}|} \approx 0{,}8274 =$$

$$= -1{,}6462\ dB$$



$$z_{NP}^{-1} = -\frac{z_{VP}^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z_{VP}^{-1}}, \quad \alpha = \frac{-\cos\left(\frac{\omega_{NP} + \omega_{VP}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{NP} - \omega_{VP}}{2}\right)}$$

$$\omega_{NP} = \frac{\pi}{6}, \quad \omega_{VP} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{0}{1/2} = 0$$

$$z_{NP}^{-1} = -z_{VP}^{-1}$$

$$H_{VP}(z) = \frac{5-2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{4+2\sqrt{3}z^{-1}+z^{-2}}$$

kako je karakteristika samo „okrenuta" vrijedi

$$A_{VP}(\pi) = A_{LP}(0) = 1 = 0\,dB$$

$$A_{VP}(\omega_{VP}) = A_{LP}(\omega) = 0{,}8274 = -1{,}6462\,dB$$

4)

$$x_1[n] = \{\underline{-2}, 0, 1, 1, 0, 2\}$$

$$x_2[n] = \{\underline{2}, 0, 1, 1, 0, -2\}$$

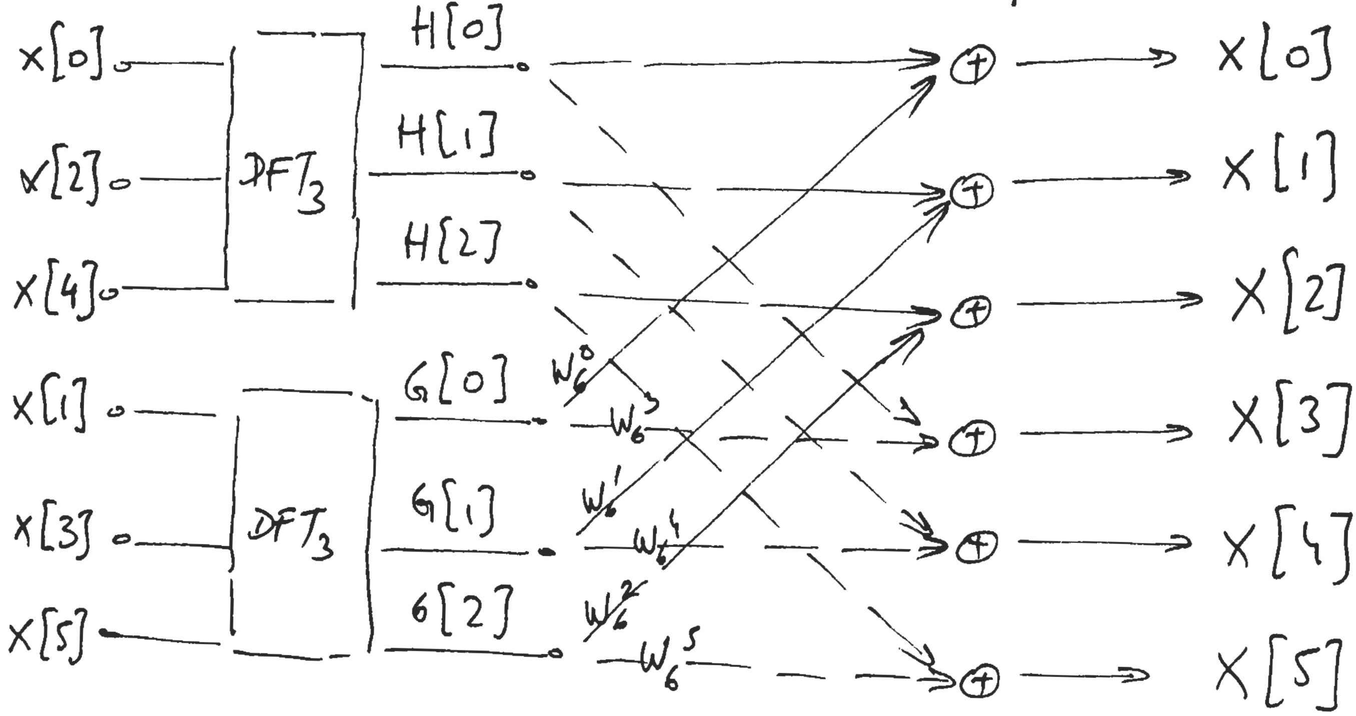
$$y_e[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$$

$$y_e[n] = \{\underline{-4}, 0, 0, 0, 1, 10, 1, 0, 0, 0, -4\}$$

linearnu konvoluciju pomoću cirkularne računamo tako da proširimo oba signala s nulama do duljine $l_1 + l_2 - 1 = 11$ te računamo cirkularnu konvoluciju duljine 9 tako proširenih signala

(5) $$X[k] = \sum_{n=0}^{5} x[n] W_6^{nk} = \sum_{n=0}^{2} x[2n] W_6^{2nk} + \sum_{n=0}^{2} x[2n+1] W_6^{(2n+1)k}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{2} x[2n] W_3^{nk}}_{H} + W_6^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{2} x[2n+1] W_3^{nk}}_{G}$$

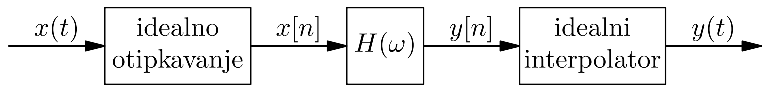


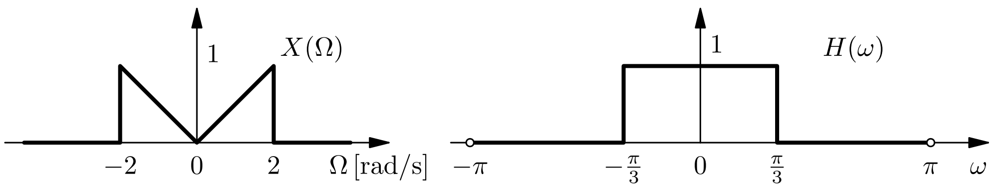
Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 9. svibnja 2005.

1. Odredite i skicirajte inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju spektra $X[k] = \{\underline{0}, 4, 8, 4\}$? Je li dobiveni niz $x[n]$ parni ili neparni niz?

2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?





3. Prijenosna funkcija FIR filtra je

$$H(z) = 0{,}356 + 0{,}980z^{-1} - 0{,}980z^{-2} - 0{,}378z^{-3}.$$

Nacrtajte blok shemu realizacije filtra te na sliku upišite vrijednosti koeficijenata filtra u obliku frakcija dobivenih zaokruživanjem na najbliži cijeli broj ako raspolažete s 4 bita (3 bita i predznak). Izračunate i u dodatnoj tablici upišite vrijednosti koeficijenata filtra ako koristimo odsijecanje prema dolje i ako koristimo simetrično odsijecanje prema nuli. Kojem tipu (tip I, II, III ili IV) odgovara zadani FIR filtar prije zaokruživanja koeficijenata, a kojem dobivene realizacije uz različite metode zaokruživanja? Ima li filtar ili neka od realizacija linearnu fazu?

4. Odredite linearnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{2}, 0, 2, 0, -2\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{2}, 0, 2, 0, -2\}.$$

Kako možemo dobivenu linearnu konvolciju odrediti pomoću cirkularne konvolucije?

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u sedam točkaka. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u četrnaest točaka?

DOS, 9. 5. 2005.

① $X[k] = \{\underline{0}, 4, 8, 4\}$

$$x[n] = \mathrm{IDFT}_4\left[X[k]\right] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]\, W_4^{-nk} = \frac{1}{4}\left(4W_4^{-n} + 8W_4^{-2n} + 4W_4^{-3n}\right)$$

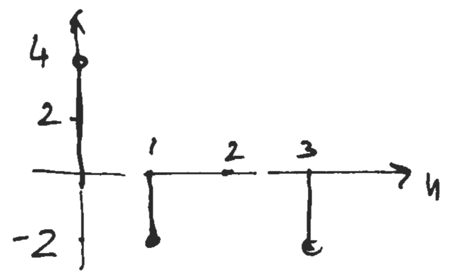
$$= W_4^{-n} + 2\,W_2^{-n} + W_4^{-3n}$$

$$x[0] = 1 + 2\cdot 1 + 1 = 4$$

$$x[1] = j + 2(-1) - j = -2$$

$$x[2] = -1 + 2\cdot 1 - 1 = 0$$

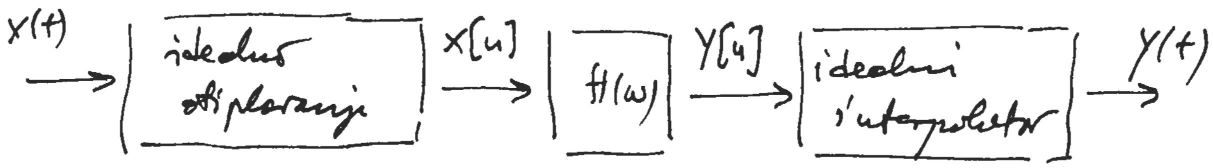
$$x[3] = -j + 2(-1) + j = -2$$



$x[n] = \{\underline{4}, -2, 0, -2\}$

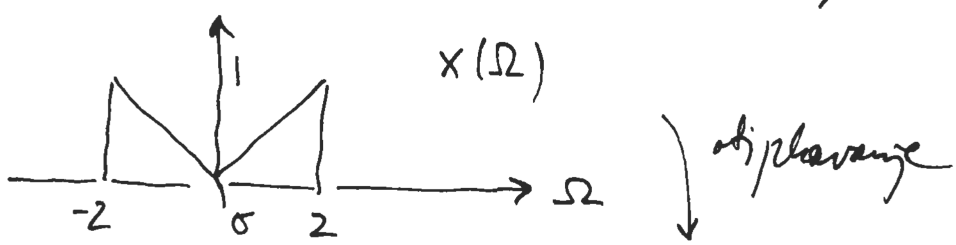
$\tilde{x}[n]$ je paran niz

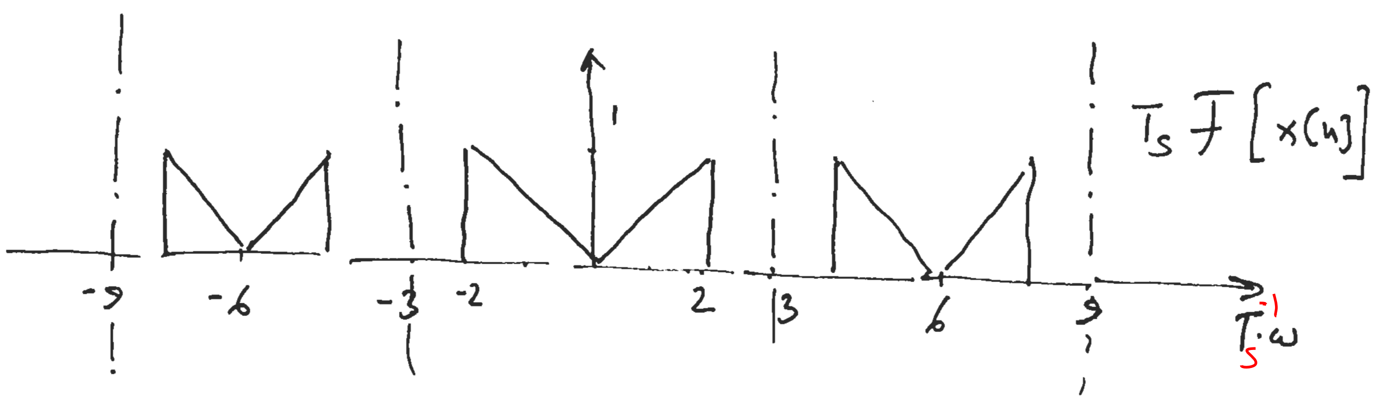
②

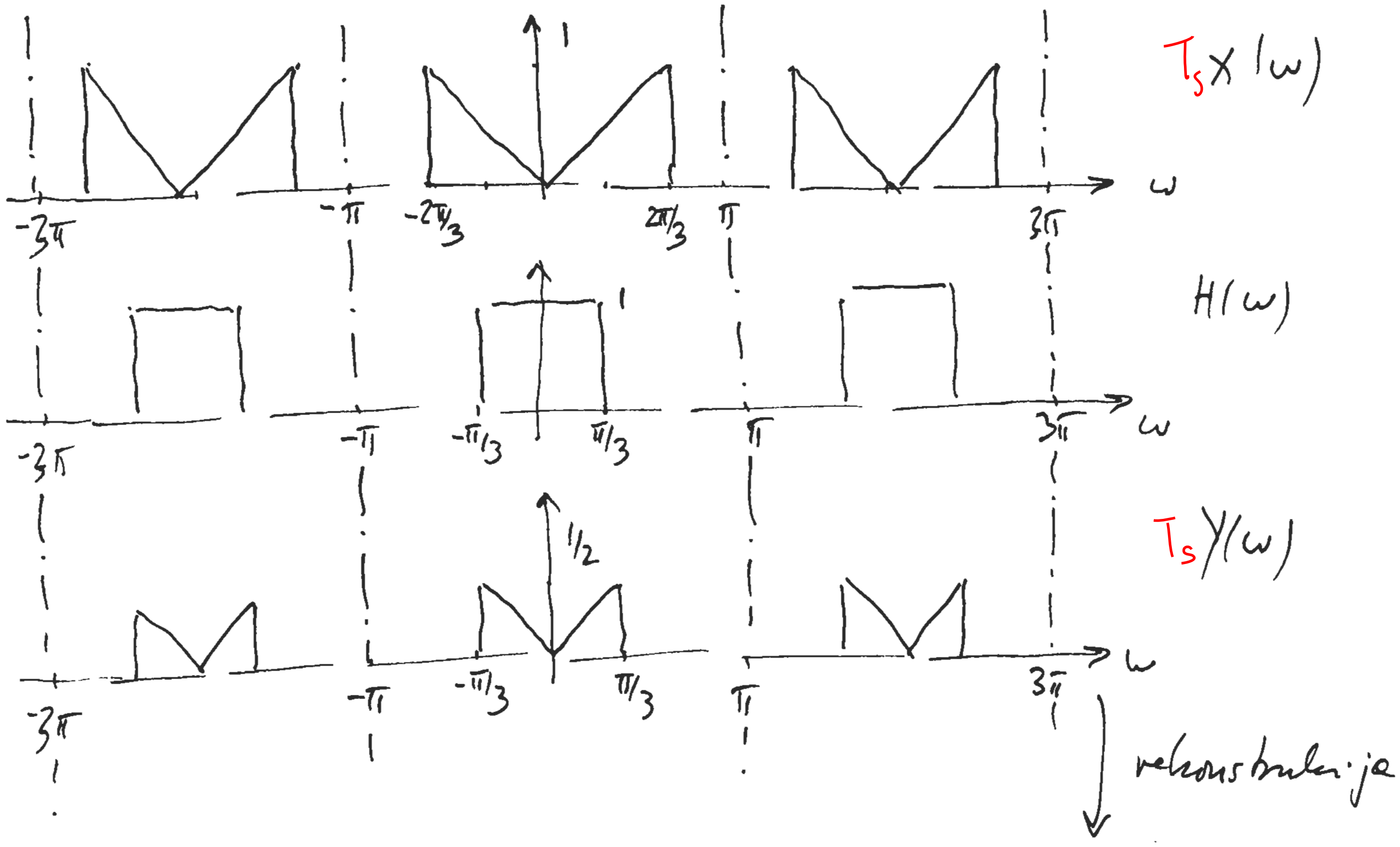


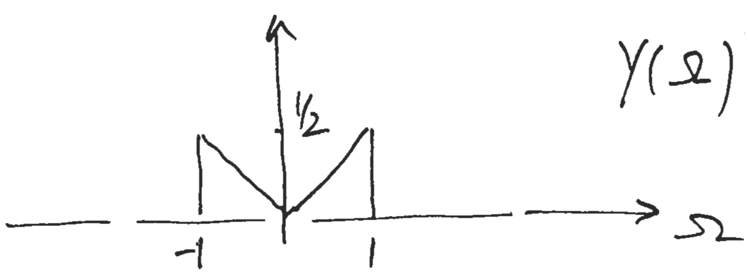
$$T_S = \pi/3 \Rightarrow \omega_S = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_S = 6 > 2\cdot\omega_{max} = 4$ nema preklapanja spektra









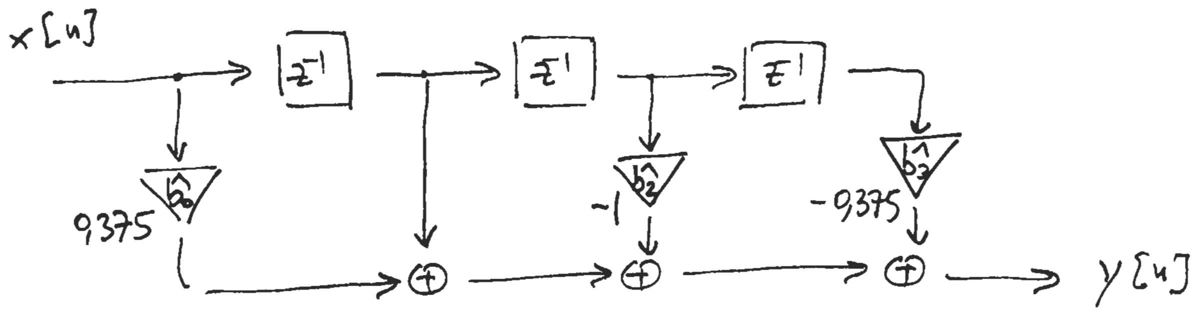
(3) $H(z) = 0{,}356 + 0{,}980\,z^{-1} - 0{,}980\,z^{-2} - 0{,}378\,z^{-3}$

$$\hat{b}_0 = 2^{-3}\ \mathrm{round}\,(0{,}356 \cdot 2^{3}) = 3/8 = 0{,}375$$

$$\hat{b}_1 = 2^{-3}\ \mathrm{round}\,(0{,}980 \cdot 2^{3}) = 8/8 = 1$$

$$\hat{b}_2 = 2^{-3}\ \mathrm{round}\,(-0{,}980 \cdot 2^{3}) = -8/8 = -1$$

$$\hat{b}_3 = 2^{-3}\ \mathrm{round}\,(-0{,}378 \cdot 2^{3}) = -3/8 = -0{,}375$$



	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$
a) zaokruživanje	3/8	8/8	-8/8	-3/8
b) prema dolje	2/8	7/8	-8/8	-4/8
c) simetrično	2/8	7/8	-7/8	-3/8

prije zaokruživanja filtar ne odgovara niti jednom od tipova I, II, III ili IV, dok nakon zaokruživanja (slučaj a) dobivamo antisimetrični filtar neparnog reda, tip IV

realizacije b) i c) također ne odgovaraju niti jednom od tipova I, II, III ili IV

samo a) realizacija ima linearnu fazu jer odgovara tipu IV FIR filtra

(4)

$$x_1[n] = \{ \underline{2}, 0, 2, 0, -2 \}$$
$$x_2[n] = \{ \underline{2}, 0, 2, 0, -2 \}$$

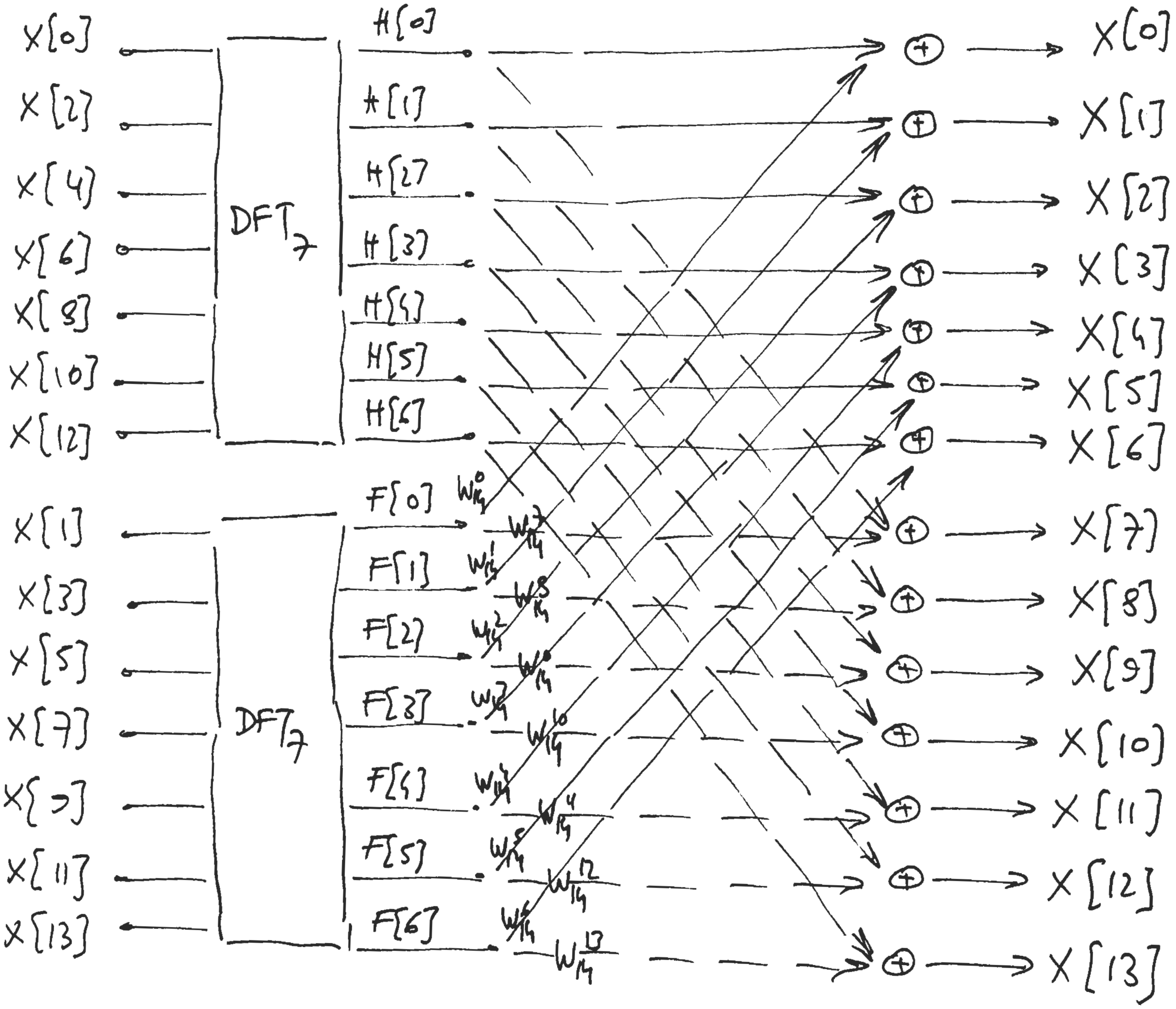
linearna konvolucija $y_l[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

$$y_l[n] = \{ \underline{4}, 0, 8, 0, -4, 0, -8, 0, 4 \}$$

linearnu konvoluciju pomoću cirkularne računamo tako da proširimo oba signala s nulama do duljine $L_1 + L_2 - 1 = 9$ te zatim računamo cirkularnu konvoluciju duljine 9 tako proširenih signala

(5) $$X[k] = \sum_{n=0}^{13} x[n] W_{14}^{nk} = \sum_{n=0}^{6} x[2n] W_{14}^{2nk} + \sum_{n=0}^{6} x[2n+1] W_{14}^{(2n+1)k}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{6} x[2n] W_7^{nk}}_{H} + W_{14}^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{6} x[2n+1] W_7^{nk}}_{F}$$

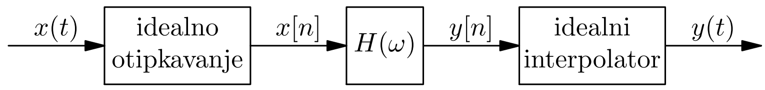


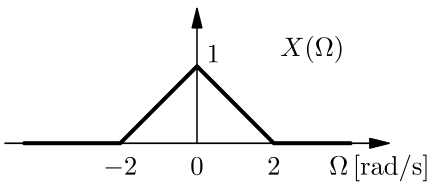
Digitalna obradba signala

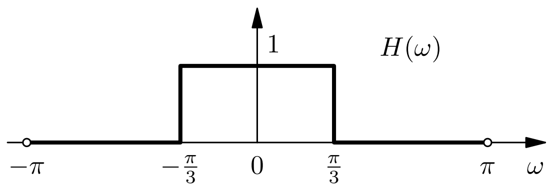
Pismeni ispit – 14. travnja 2005.

1. Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku impulsnog odziva $h[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1]$. Kojem tipu FIR filtra odgovara zadani impulsni odziv $h[n]$ (tip I, II, III ili IV)?

2. Zadan je digitalni sustav prikazan na slici koji se sastoji od jednog digitalnog filtra s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$ te od tipkala i interpolatora. Na ulaz sustava je doveden kontinuirani signal $x(t)$ sa spektrom $X(\Omega)$ prikazanim slikom. Skicirajte spektre diskretnih signala $x[n]$ i $y[n]$ te rekonstuiranog kontinuiranog signala $y(t)$ ako je period otipkavanja $T = \pi/3$. Da li je došlo do preklapanja spektra?







3. Odredite linearnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, 2, -1\}.$$

Kako možemo dobivenu linearnu konvolciju odrediti pomoću cirkularne konvolucije?

4. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u četiri točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u osam točaka?

5. Mali Ivica se sav sretan vratio iz dućana s najboljom 3D kraticom koju novac može kupiti, no kada ju je spojio bio je razočaran zbog loše slike i čudnih pojava na zaslonu. Ivica se zamislio nad problemom te je zaključio da se smetnje javljaju zbog nešto starijeg zaslona čija elektronika unosi smetnje. Štoviše, Ivica je odredio da se unešena smetnja može modelirati jednostavnim propuštanjem digitalnog video-signala kroz sustav s impulsnim odzivom $h[n]$ koji modelira jeku,

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}1\delta[n-m],$$

gdje je m konstanta. Ivica je odlučio otkloniti problem dodatnim programiranjem kartice tako da se signal prije slanja propušta kroz filtar s impulsnim odzivom $g[n]$ čime bi poništio utjecaj $h[n]$. Odziv $g[n]$ je odredio korištenjem DFT-a u $N = 4m$ točaka na slijedeći način:

1. odredio je spektar $H[k]$ kao $\mathrm{DFT}_{4m}\big[h[n]\big]$,
2. izračunao je spektar $G[k]$ kao $G[k] = 1/H[k]$ i
3. odredio je konačni impulsni odziv $g[n]$ uzimanjem jednog perioda signala $\tilde{g}[n] = \mathrm{IDFT}_{4m}\big[G[k]\big]$.

Korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije odredi impulsni odziv sustava koji u potpunosti poništava utjecaj $h[n]$ i usporedi ga s odzivom $g[n]$ kojeg je dobio mali Ivica. Koliko je Ivica pogriješio?

Uputa: DFT transformacija u N točaka niza a^n je $\dfrac{1-a^N}{1-aW_N^k}$ (suma konačnog geometrijskog reda).

DOS - 14. 4. 2005

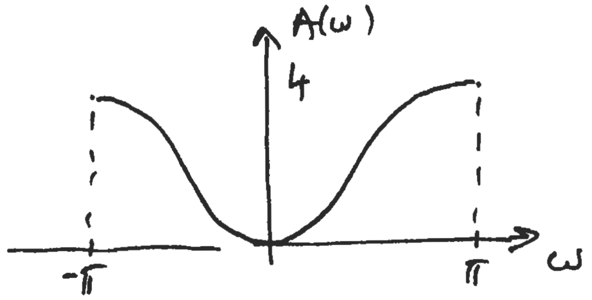
① $h[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1]$

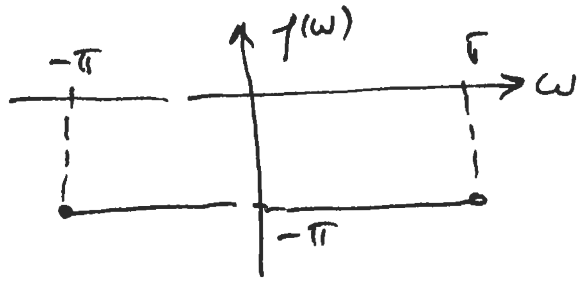
$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega} - 2 + e^{j\omega} = -2 + 2\cos(\omega) =$$

$$= -2\left(-\cos(\omega) + 1\right)$$

$$A(\omega) = |H(\omega)| = 2\left(1 - \cos(\omega)\right)$$

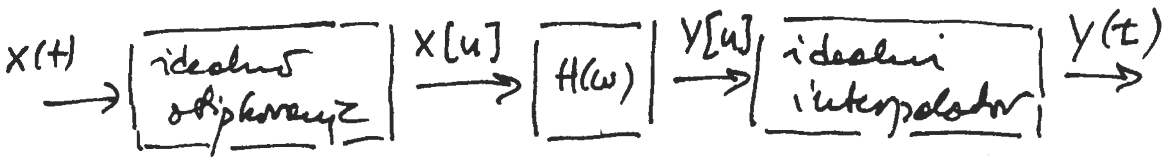
$$\varphi(\omega) = \arg H(\omega) = -\pi \quad (\text{ili } +\pi)$$





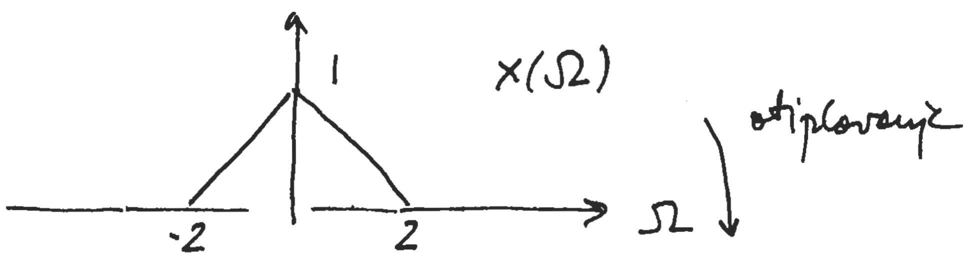
FIR filtar je simetrični parnog reda (tip I)

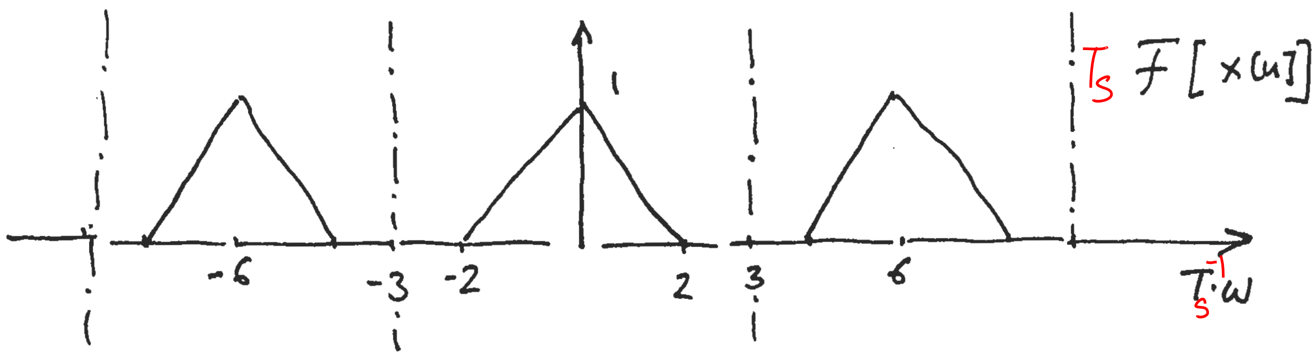
②

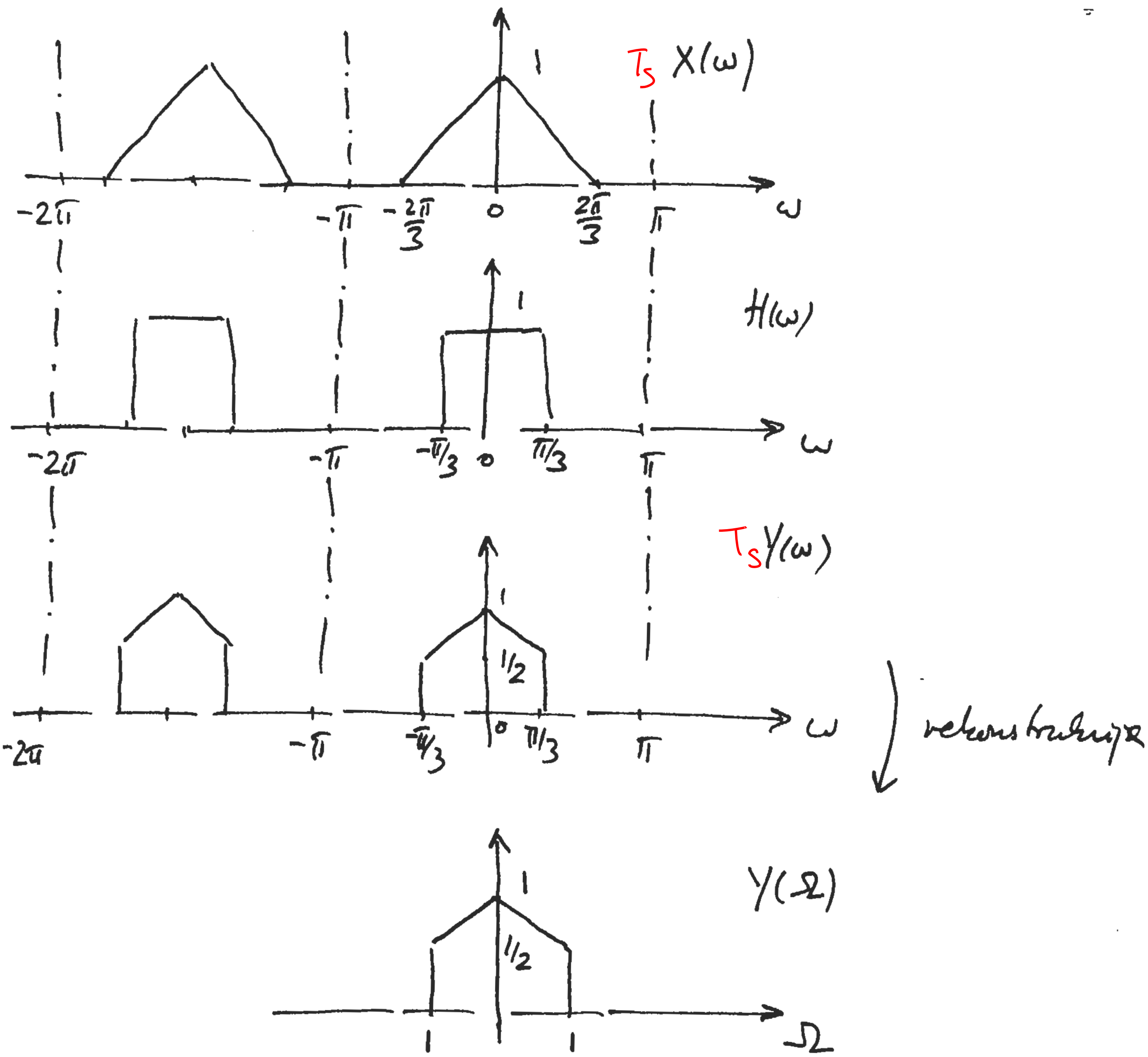


$$T_s = \pi/3 \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

kako je $\omega_s = 6 > 2 \cdot \omega_{max} = 4$ neće doći do preklapanja spektra







③

$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0, 1\}$

$x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, 2, -1\}$

linearna konvolucija $y_e[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

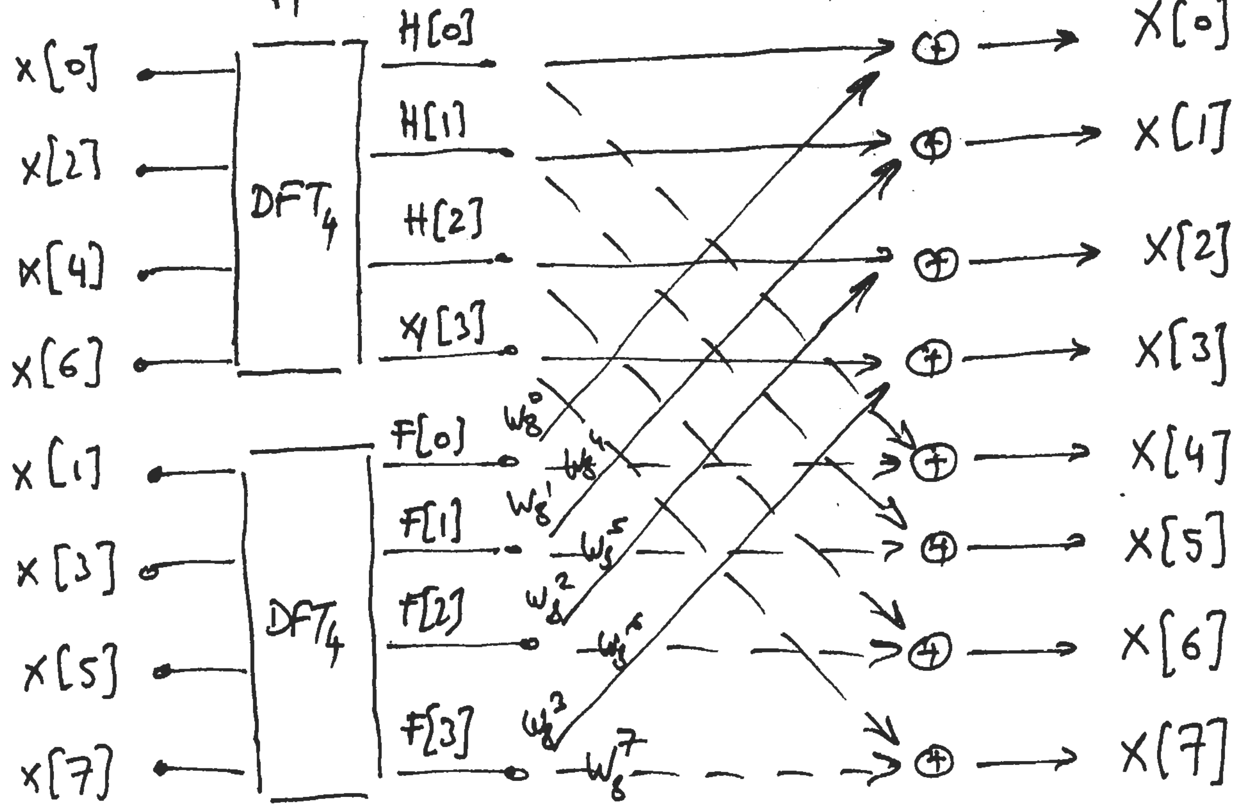
$$y_e[n] = \{\underline{1}, -1, 1, 1, 0, 1, -1, 2, -1\}$$

Linearnu konvoluciju pomoću cirkularne računamo tako da proširimo oba signala s nulama do duljine $L_1+L_2-1=9$ te zatim računamo cirkularnu konvoluciju tako proširenih signala

④

$$X[k]=\sum_{n=0}^{7} x[n]\,W_8^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x[2n]\,W_8^{2nk} + \sum_{n=0}^{3} x[2n+1]\,W_8^{(2n+1)k}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{3} x[2n]\,W_4^{nk}}_{H} + W_8^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{3} x[2n+1]\,W_4^{nk}}_{F}$$



⑤

$$h[n] = \delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-m]$$

$$H[k] = DFT_{4m}\left[h[n]\right] = \sum_{n=0}^{4m-1} \left(\delta[n] - 0{,}1\,\delta[n-m]\right) W_{4m}^{nk} =$$

$$= W_{4m}^{0k} - 0{,}1\,W_{4m}^{mk} = 1 - 0{,}1\,W_4^{k}$$

$$G[k] = \frac{1}{H[k]} = \frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}$$

$$DFT_N\left[a^n\right] = \frac{1-a^N}{1-a\,W_N^{k}} \Rightarrow IDFT_4\left[\frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}\right] = \frac{1}{1-0{,}1^4}(0{,}1)^n$$

$$g[n] = IDFT_{4m}\left[\frac{1}{1-0{,}1\,W_4^{k}}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(1/10)^4}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = r\cdot m,\ r\in N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pravi inverz određujemo koristeći Z transformaciju

$$H(z) = 1 - 0{,}1 z^{-m} \Rightarrow H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - 0{,}1 z^{-m}}$$

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{10} z^{-m}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n z^{-nm} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n (z^m)^{-n}$$

$$h^{-1}[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = rm,\ r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

usporedimo sada dobivene odzive

$$g[n] = \begin{cases} \frac{1}{1-(1/10)^4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = rm,\ r \in \mathbb{N},\ n \in [0, N-1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

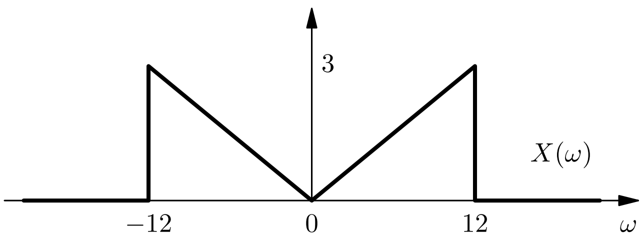
$$h^{-1}[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\right)^{n/m}, & n = rm,\ r \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

odziv $g[n]$ u odnosu na $h^{-1}[n]$ ima konačan broj članova te se osim toga razlikuje i za konstantu $\frac{1}{1-(1/10)^4}$ povećavanjem duljine DFT se sve više približavamo idealnom odzivu $h^{-1}[n]$ te je samo potrebno odabrati N tako da je pogreška unutar prihvatljivih granica

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 7. ožujka 2005.

1. Kontinuirani signal $x(t)$ ima ograničeni spektar $X(\omega)$ zadan slikom. Signal smo uzorkovali s periodima otipkavanja $T_1 = \pi/3$, $T_2 = \pi/12$ i $T_3 = \pi/24$. Za koji od zadanih perioda možemo rekonstruirati signal $x(t)$ iz njegovih uzoraka?



2. Odredite linearnu i cirkularnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}.$$

3. Odredite impulsni odziv kauzalnog nisko-propusnog FIR filtra granične frekvencije $\omega_0 = \pi/4$ reda $N = 5$ ako znate da je filtar projektiran korištenjem Blackmanovog vremenskog otvora. Skicirajte blok-shemu filtra te na nju upišite dobivene koeficijente impulsnog odziva.

Blackmanov vremenski otvor je određen izrazom

$$w[n] = 0{,}42 + 0{,}50\cos\Big(2\pi\frac{2n+1}{2N}\Big) + 0{,}08\cos\Big(4\pi\frac{2n+1}{2N}\Big), \quad n \in \Big[-\frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}\Big],$$

dok je impulsni odziv idealnog nisko-propusnog filtra

$$h_{LP}[n] = \frac{2}{\pi(2n+1)}\sin\big(\omega_0(n+1/2)\big).$$

4. Vremenski diskretni sustav opisan je prijenosnom funkcijom

$$H(z) = \frac{1{,}2 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 3z^{-1}}.$$

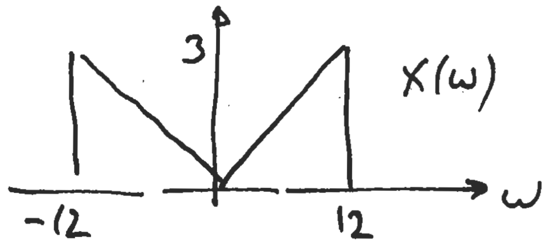
Nacrtajte direktne forme I i II. Za svaku od tih formi odredite skalirane koeficijente i upišite ih na blok-shemu (vrijednosti unutar intervala $[-1, 1]$).

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u četiri točke. Odredite izlaze iz blokova za računanje DFT-a u dvije točke te konačnu transformaciju za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0\}.$$

DOS, 7. 3. 2005.

①



$\omega_m = 12, \quad \omega_m = 2\pi f_m$

$f_m = \frac{6}{\pi}$

$f_{s1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{\pi/3} = 3/\pi < \frac{6}{\pi} \cdot 2 = \frac{12}{\pi}$

$f_{s2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{\pi/12} = \frac{12}{\pi} = \frac{6}{\pi} \cdot 2 = \frac{12}{\pi}$

$f_{s3} = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{\pi/24} = \frac{24}{\pi} > \frac{6}{\pi} \cdot 2 = \frac{12}{\pi}$

Signal možemo rekonstruisati za periode odabiranja $T_2 = \pi/12$ i $T_3 = \pi/24$. Za T_2 je signal odabran upravo Nyquistovom frekvencijom.

② $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$ $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}$

linearna konvolucija $y_l[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

cirkularna konvolucija $y_c[n] = x_1[n] ⑤ x_2[n] = \sum_{i=0}^{5-1} x_1[i]\, x_2[n-i \bmod 5]$

$y_l[n] = \{\underline{1}, -1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, -1\}$

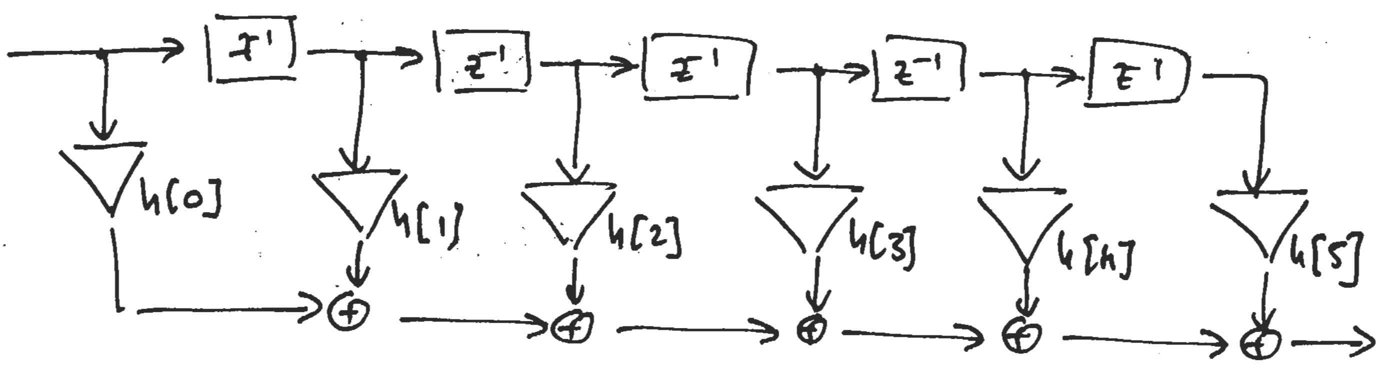
$y_c[n] = \{\underline{1}, 0, -2, -1, 0\}$

③

$$\begin{cases} w[n] = 0{,}42 + 0{,}50\cos\left(2\pi\,\dfrac{2n+1}{2N}\right) + 0{,}08\cos\left(4\pi\,\dfrac{2n+1}{2N}\right) \\ h_{LP}[n] = \dfrac{2}{\pi(2n+1)}\,\sin\left(\omega_0\left(n+1/2\right)\right) \\ n \in \left[-\dfrac{N+1}{2},\ \dfrac{N-1}{2}\right] \end{cases}$$

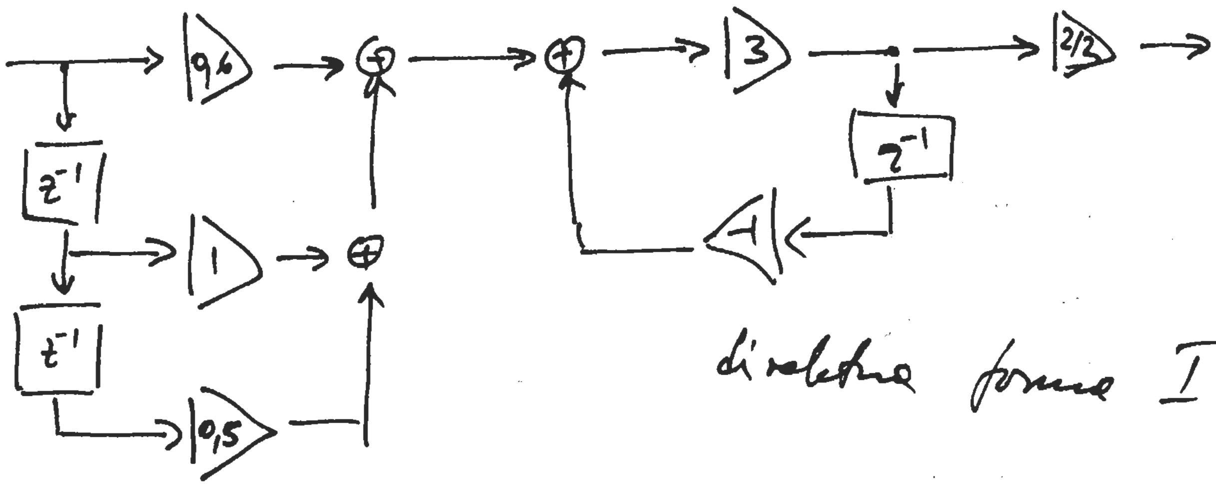
n	-3	-2	-1	0	1	2
h_{LP}	0,1176	0,1961	0,2436	0,2436	0,1961	0,1176
w	−0,0000	0,2008	0,8492	0,8492	0,2008	−0,000
h	−0,0000	0,0394	0,2069	0,2069	0,0394	−0,0000

$$h[n] = \{\underline{0},\ 0{,}0394,\ 0{,}2069,\ 0{,}2069,\ 0{,}0394,\ 0\}$$

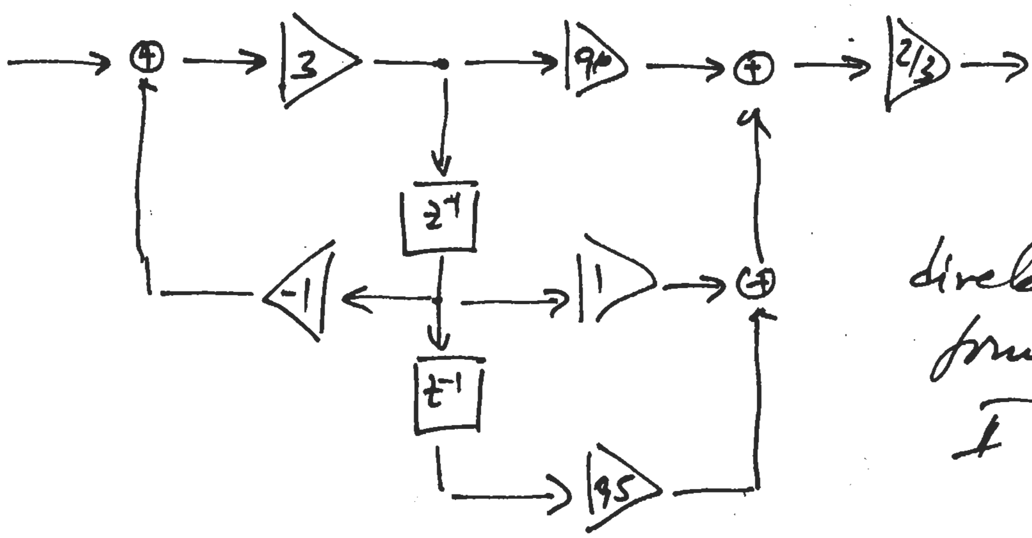


4

$$H(z) = \frac{1{,}2 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 3z^{-1}} = \frac{2}{3}\,\frac{0{,}6 + z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}{1/3 + z^{-1}}$$



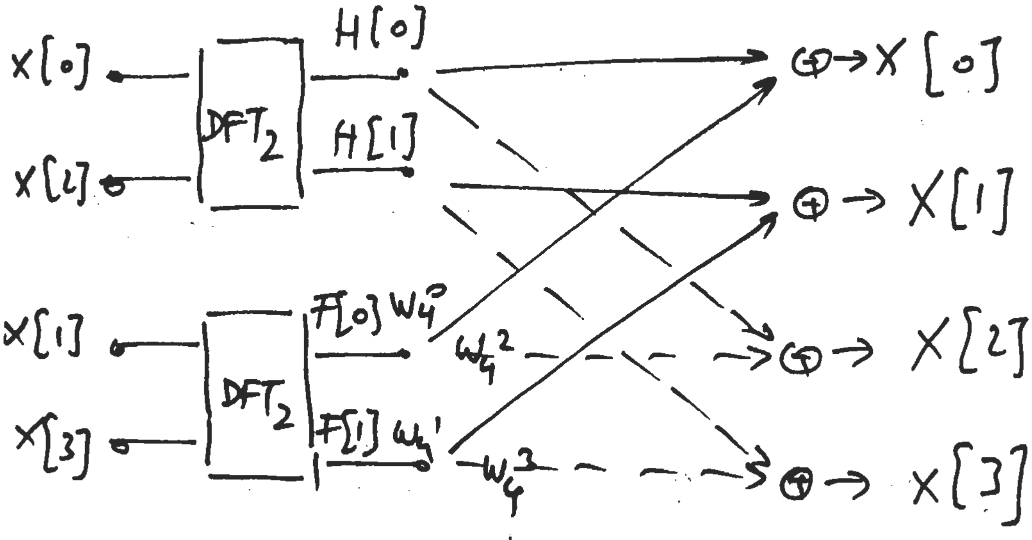
direkte forme I



direkte forme II

⑤ $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_4^{(2n+1)k}$

$= \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_2^{nk} + W_4^{k} \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_2^{nk}$



$X[k] = H[k \bmod 2] + W_4^{k} F[k \bmod 2]$

$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0\}$

$X[k] = 1 + W_4^{k} \cdot 1 = 1 + W_4^{k}$

$H[k] = 1 \cdot W_2^{0k} + 0 \cdot W_2^{1k} = 1$

$F[k] = 1 W_2^{0k} + 0 W_2^{1k} = 1$

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 21. veljače 2005.

1. Kontinuirani signal čiste frekvencije $f = 13\,\text{kHz}$ otipkavamo sa različitim frekvencijama otpikavanja $f_{s1} = 14\,\text{kHz}$, $f_{s2} = 27\,\text{kHz}$ i $f_{s3} = 20\,\text{kHz}$. Za koje od tih frekvencija otipkavanja ne možemo rekonstruirati izvorni kontinuirani signal?

2. FIR filtar drugog reda ima simetrični impulsni odziv, tj. vrijedi $h[0] = h[2]$. Ako na ulaz takvog filtra dovedemo dvije čiste kosinusoide kružnih frekvencija $\pi/4$ i $\pi/2$ filtar propušta samo komponentu niže frekvencije i to s jediničnim pojačanjem. Odredi impulsni odziv filtra.

3. Neka su a i b realni brojevi za koje vrijedi $|a| < 1$ i $|b| < 1$. Odredi i usporedi amplitudne i fazne karakteristike sustava

$$H_1(z) = \frac{z+b}{z+a} \quad i \quad H_2(z) = \frac{bz+1}{z+a}.$$

4. Odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom iz prototipa

$$H(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s + 1)}.$$

Neka je $T = 0{,}2$. Da li je dobiveni diskretni sustav stabilan?

5. Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 4, 0, 2\}$$

računanjem samo jedne kompleksne Diskretne Fourierove transformacije.

Uputa: Koristi RE2FFT postupak.

DOS, 21. 2. 2005.

① $f = 13\ kHz$

$f_m = 2 \cdot f = 2 \cdot 13\ kHz = 26\ kHz$

$f_{s1} = 14\ kHz < f_m$, $f_{s2} = 27\ kHz \geq f_m$, $f_{s3} = 20\ kHz < f_m$

kako je Nyquistov uvjet zadovoljen samo za f_{s2}, za frekvencije f_{s1} i f_{s3} ne možemo rekonstruirati izvorni signal

② $H(z) = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2}$

$$\begin{cases} h[0] = h[2] \\ H(e^{j\pi/2}) = h[0] - j h[1] - h[2] = 0 \\ |H(e^{j\pi/4})| = |h[0] + h[1] e^{-j\pi/4} - j h[2]| = 1 \end{cases}$$

$h[1] = 0$

$|h[0] - j h[0]| = 1 \Rightarrow 2(h[0])^2 = 1$

$h[0] = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

postoje dva FIR filtra koja zadovoljavaju postavljene uvjete:

$h_1[n] = \{ \underline{1/\sqrt{2}}, 0, 1/\sqrt{2} \}$

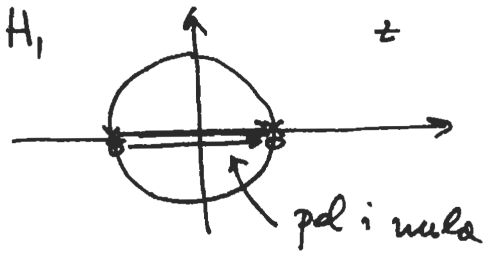
$h_2[n] = \{ \underline{-1/\sqrt{2}}, 0, -1/\sqrt{2} \}$

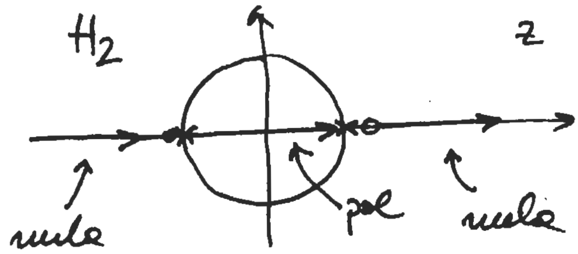
③ $|a| < 1$, $|b| < 1$

$H_1(z) = \frac{z+b}{z+a} \Rightarrow p_1 = -a$, $n_1 = -b$

$H_2(z) = \frac{bz+1}{z+a} \Rightarrow p_2 = -a$, $n_2 = -1/b$

oba sustava su stabilna





H_1 je sustav s minimalnom fazom

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}+b}{e^{j\omega}+a}, \quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{b e^{j\omega}+1}{e^{j\omega}+a}$$

$$A_1^2(\omega) = \left|\frac{b+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}\right|^2 = \frac{b^2+2b\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)}{a^2+2a\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)} =$$

$$= \frac{b^2+2b\cos(\omega)+1}{a^2+2a\cos(\omega)+1}$$

$$A_2^2(\omega) = \left|e^{+j\omega}\,\frac{b+\cos(\omega)-j\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}\right|^2 = A_1^2(\omega)$$

$$A_1(\omega) = A_2(\omega) = \sqrt{\frac{b^2+2b\cos(\omega)+1}{a^2+2a\cos(\omega)+1}}$$

amplitudne karakteristike su jednake

$$\varphi_1(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\sin(\omega)}{b+\cos(\omega)} - \operatorname{arctg}\frac{\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\omega - \operatorname{arctg}\frac{\sin(\omega)}{b+\cos(\omega)} - \operatorname{arctg}\frac{\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)}$$

fazne karakteristike se razlikuju, drugi sustav unosi veći fazni pomak

4

$$H(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2+2s+3)(s+1)}$$

POLOVI: $s+1 = 0 \Rightarrow s_1 = -1$

$$s^2+2s+3 = 0 \Rightarrow s_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

kontinuirani sustav je stabilan te kako bilinearna transformacija čuva stabilnost i diskretni sustav će ostati stabilan

$$T = 0{,}2 \quad , \quad s \mapsto \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1} = 10\,\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{400\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 100\,\frac{z-1}{z+1} + 8}{\left(100\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 20\,\frac{z-1}{z+1} + 3\right)\left(10\,\frac{z-1}{z+1} + 1\right)} =$$

$$= \frac{400(z-1)^2 + 100(z^2-1) + 8(z+1)^2}{100(z-1)^2 + 20(z^2-1) + 3(z+1)^2} \cdot \frac{z+1}{10z - 10 + z - 1} =$$

$$= \frac{z+1}{11z-9} \cdot \frac{508z^2 - 784z + 308}{123z^2 - 194z + 83}$$

POLOVI: $11z - 9 = 0 \Rightarrow z_1 = 9/11$

$$123z^2 - 194z + 83 = 0 \rightarrow z_{2,3} = \frac{194 \pm \sqrt{-3200}}{246} = \frac{97}{123} \pm j\,\frac{\sqrt{800}}{123}$$

$$|z_{2,3}|^2 = \frac{10209}{15129} < 1$$

diskretni sustav je stabilan kao što smo i očekivali

(5) $x_1[n] = \{\underline{5}, 2, 4, -1\}$ $\quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 4, 0, 2\}$

$$x[n] = \{\underline{5-3j}, 2+4j, 4, -1+2j\}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = 5-3j + (2+4j)\, W_4^{k} + 4W_4^{2k} + (-1+2j)\, W_4^{3k}$$

$$X[0] = 5-3j + 2+4j + 4 - 1 + 2j = 10+3j$$

$$X[1] = 5-3j - j(2+4j) - 4 + j(-1+2j) = 3-6j$$

$$X[2] = 5-3j - (2+4j) + 4 - (-1+2j) = 8-9j$$

$$X[3] = 5-3j + j(2+4j) - 4 - j(-1+2j) = -1$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}[X_1[k]] = \mathrm{Re}[X[k]] + \mathrm{Re}[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}[X_1[k]] = \mathrm{Im}[X[k]] - \mathrm{Im}[X[4-k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}[X_1[k]] = \{\underline{10+10}, 3-1, 8+8, -1+3\}$$

$$2\,\mathrm{Im}[X_1[k]] = \{\underline{3-3}, -6-0, -9+9, 0+6\}$$

$$X_1[k] = \{\underline{10}, 1-3j, 8, 1+3j\}$$

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{Re}[X_2[k]] = \mathrm{Im}[X[k]] + \mathrm{Im}[X[4-k]] \\ 2\,\mathrm{Im}[X_2[k]] = \mathrm{Re}[X[4-k]] - \mathrm{Re}[X[k]] \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{Re}[X_2[k]] = \{\underline{3+3}, -6+0, -9-9, 0-6\}$$

$$2\,\mathrm{Im}[X_2[k]] = \{\underline{10-10}, -1-3, 8-8, 3+1\}$$

$$X_2[k] = \{\underline{3}, -3-2j, -9, -3+2j\}$$

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 10. veljače 2005.

1. Odredite i skicirajte inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju spektra $X[k] = \{\underline{2}, 1, 0, 1\}$. Da li je dobiveni niz $x[n]$ parni ili neparni niz?

2. Zadana su dva konačna impulsa

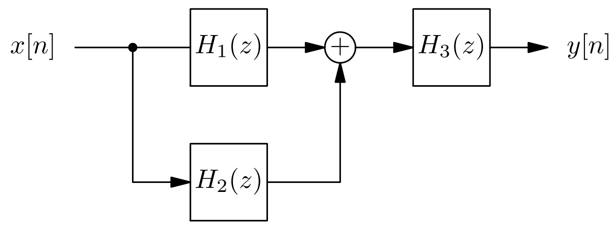
$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -1\}.$$

Odreditete konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. DFT računajte u četiri točke. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

3. Tri FIR filtra s prijenosnim funkcijama

$$H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}, \quad H_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}, \quad \text{i} \quad H_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

spojena su kako je prikazano na slici. Odredite prijenosnu funkciju cijelog sustava. Skicirajte aplitudnu i faznu karakteristiku tako dobivenog sustava.



4. Zadan je kontinuirani sustav s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Odredite prijenosnu funkciju diskretnog sustava koji ima jednaki impulsni odziv kao zadani kontinuirani sustav u točkama $t = nT$.

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u četiri točke uz korištenje decimacije u vremenu, a kako uz korištenje decimacije u frekvenciji? Skicirajte graf toka signala za oba slučaja.

DOS, 10. 1. 2005.

① $X[k] = \{\underline{2}, 1, 0, 1\}$

$$IDFT_N[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k] =$$

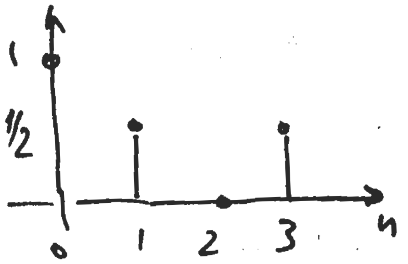
$$= \frac{1}{4}\left(2W_4^{-0\cdot n} + W_4^{-n} + W_4^{-3n}\right) = x[n]$$

$$x[0] = \frac{1}{4}(2+1+1) = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{4}(2+W_4^{-1}+W_4^{-3}) = \frac{1}{4}(2-j+j) = \frac{1}{2}$$

$$x[2] = \frac{1}{4}(2+W_4^{-2}+W_4^{-6}) = \frac{1}{4}(2-1-1) = 0$$

$$x[3] = \frac{1}{4}(2+W_4^{-3}+W_4^{-9}) = \frac{1}{4}(2+j-j) = \frac{1}{2}$$



$x[n] = \{\underline{1}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

$x[n]$ je paran niz

② $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 0\}$

$x_2[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -1\}$

$$DFT_4[x_1[n]] = X_1[k] = \sum_{n=0}^{3} x_1[n] W_4^{nk} = 1\cdot W_4^{0\cdot k} + 2W_4^{2k}$$

$$DFT_4[x_2[n]] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{3} x_2[n] W_4^{nk} = 2W_4^{1k} - 1\cdot W_4^{3k}$$

$$X_1[k]X_2[k] = (1+2W_4^{2k})(2W_4^{k} - W_4^{3k}) =$$

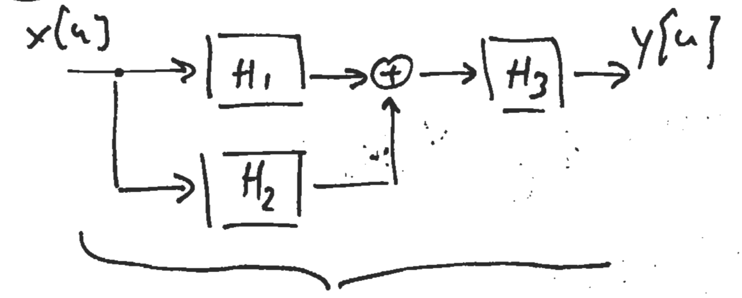
$$= 2W_4^{k} - W_4^{3k} + 4W_4^{3k} - 2W_4^{5k} =$$

$$= 2W_4^{k} + 3W_4^{3k} - 2W_4^{k} = 3W_4^{3k}$$

$$IDFT_4[X_1[k]X_2[k]] = IDFT_4[3W_4^{3k}] = 3\delta[n-3]$$

množenje u DFT domeni odgovara cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni

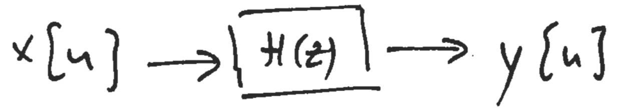
3



$$H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}$$

$$H_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$H_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$



$$H(z) = \left(H_1(z) + H_2(z)\right) H_3(z) =$$

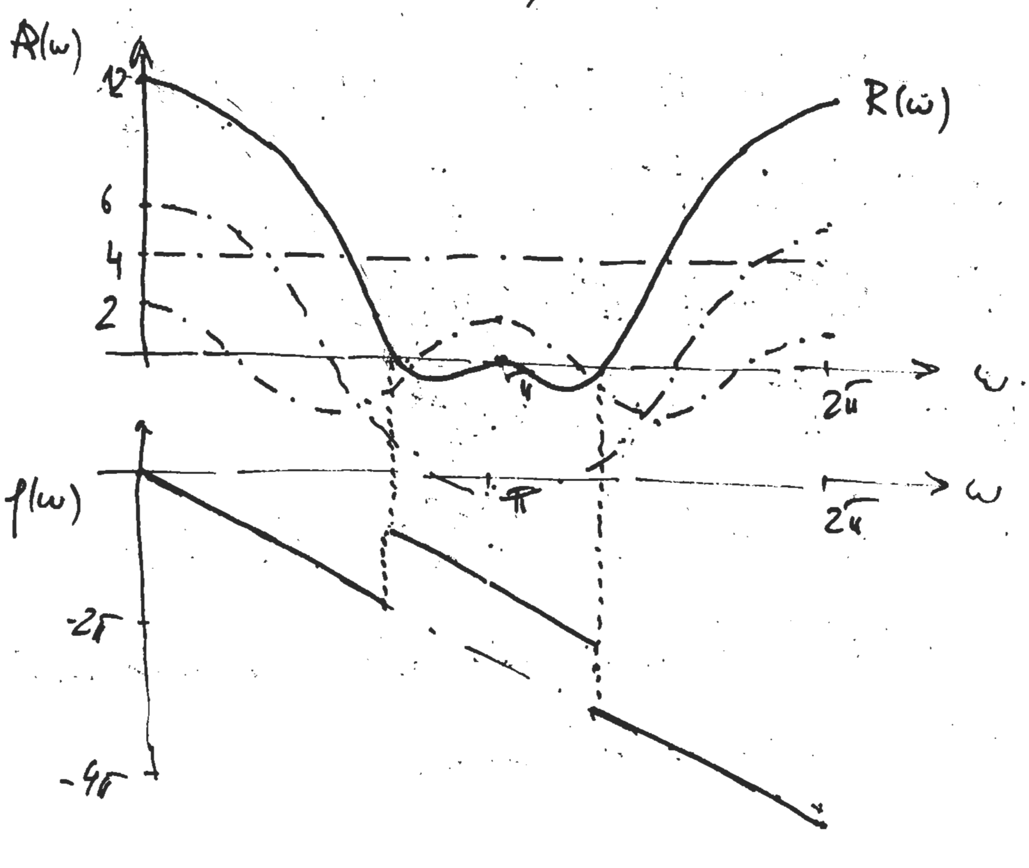
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} + \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right)\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) =$$

$$= \left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right) = 1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-2j\omega} + 3e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega} =$$

$$= e^{-2j\omega}\left(e^{+2j\omega} + 3e^{+j\omega} + 4 + 3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right) =$$

$$= e^{-2j\omega}\left(\underbrace{4 + 6\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)}_{R(\omega)}\right)$$



$$A(\omega) = |R(\omega)|$$

(3) $H(s) = \frac{2}{s+1} \circ\!-\!\bullet \; h(t) = 2e^{-t}$

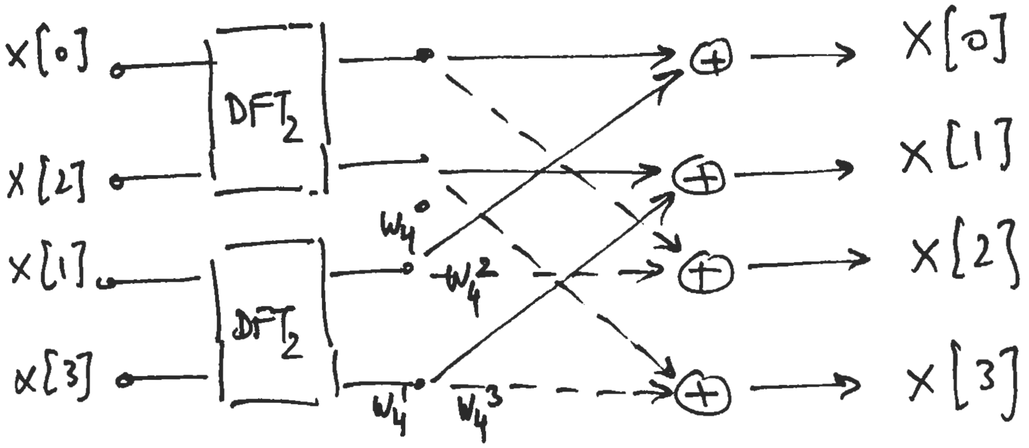
$t = nT$, $h(nT) = 2e^{-nT} = 2(e^{-T})^n$

$h[n] = 2(e^{-T})^n \circ\!-\!\bullet \; H(z) = \frac{2z}{z - e^{-T}}$

(5) decimacija u vremenu:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_4^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_2^{nk} + W_4^k \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_2^{nk}$$



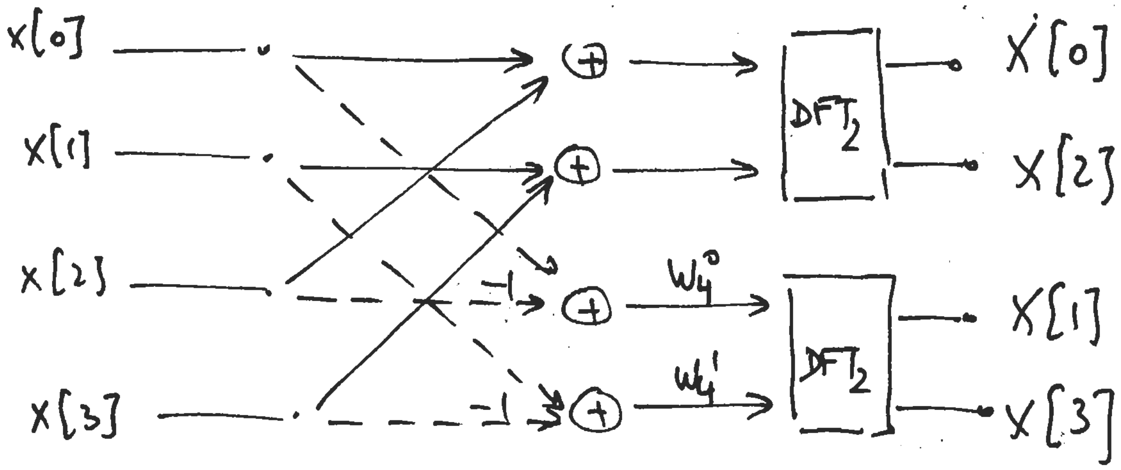
decimacija u frekvenciji

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[n] W_4^{nk} + \sum_{n=0}^{1} x[2+n] W_4^{(2+n)k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{1} \left(x[n] + W_4^{2k} x[2+n] \right) W_4^{nk}$$

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{1} \left(x[n] + x[2+n] \right) W_2^{nk}$$

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{1} \left(x[n] - x[2+n] \right) W_2^{nk} \cdot W_4^{n}$$



x[0]
x[1]
x[2]
x[3]
-1
-1
W_4^0
W_4^1
DFT2
DFT2
X[0]
X[2]
X[1]
X[3]

Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 18. listopada 2004.

1. Kontinuirani signal
$$x(t) = 2\cos(3\pi t) + 3\sin(6\pi t)$$
doveden je na ulaz A/D pretvornika. Da li je snimljeni signal pogodan za analizu i obradu, odnosno da li je došlo do preklapanja spektra ako smo snimili 8 uzoraka uz $f_s = 8\,\mathrm{Hz}$?

2. Zadana su dva konačna impulsa
$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -1\}.$$
Odredite konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

3. Nacrtajte raspored polova i nula prijenosne funkcije
$$H_{\mathrm{LP}}(z) = \frac{1-r}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-rz^{-1}}$$
ako je $0 < r < 1$. Da li je sustav određen takvom prijenosnom funkcijom stabilan? Skicirajte amplitudnu karakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ za $r = \frac{1}{2}$. Pokažite da amplitudna karakterisitka prolazi kroz jedinicu za $\omega = 0$ te kroz nulu za $\omega = \pi$ bez obzira na izbor parametra r.

4. Bilinearnom transformacijom uz period otipkavanja $T = 1$ projektirajte diskretni IIR filtar ako je prijenosna funkcija prototopnog analognog filtra
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}.$$
Nacrtajte direktnu I i II realizaciju dobivenog filtra.

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u četiri točke. Odredite izlaze iz blokova za računanje DFT-a u dvije točke te konačnu transformaciju za signal
$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0\}.$$

DOS, 18. 10. 2007.

① $x(t) = 2\cos(3\pi t) + 3\sin(6\pi t)$

$$2\pi f_1 = 3\pi \Rightarrow f_1 = 3/2\ Hz$$

$$2\pi f_2 = 6\pi \Rightarrow f_2 = 3\ Hz$$

$$f_s = 8\ Hz, \quad f_s/2 = 4\ Hz, \quad f_s/2 > f_1 \wedge f_s/2 > f_2$$

kako su obje prisutne frekvencije manje od $f_s/2$ nije došlo do preklapanja spektra

$$N = 8, \quad f_s/N = 1\ Hz < |f_1 - f_2| = 3/2\ Hz$$

s 8 uzoraka imamo frekvencijski pojas od 1 Hz te možemo razlikovati dvije zadane frekvencije, no uzmemo li u obzir i utjecaj otvora bilo bi bolje uzeti više uzoraka

② $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 0\}$

$x_2[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -1\}$

$$DFT[x_1[n]] = X_1[k] = \sum_{n=0}^{3} x_1[n] W_4^{nk} = 1 \cdot W_4^{0k} + 2W_4^{2k}$$

$$DFT[x_2[n]] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{3} x_2[n] W_4^{nk} = 2 \cdot W_4^{1k} - 1 \cdot W_4^{3k}$$

$$X_1[k] X_2[k] = (1 + 2W_4^{2k})(2W_4^{1k} - W_4^{3k}) =$$

$$= 2W_4^{1k} - W_4^{3k} + 4W_4^{3k} - 2W_4^{5k} =$$

$$= 2W_4^{1k} + 3W_4^{3k} - 2W_4^{1k} = 3W_4^{3k}$$

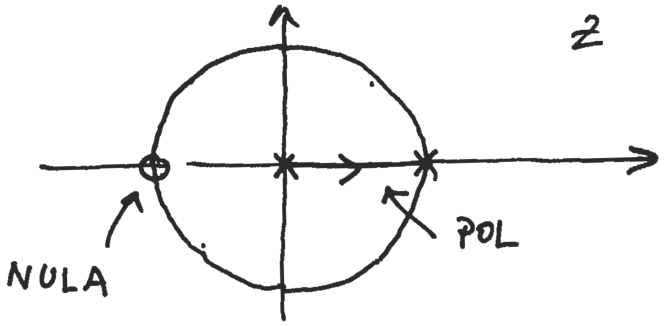
$$IDFT[X_1[k] X_2[k]] = IDFT[3W_4^{3k}] = 3\delta[n-3]$$

množenje u DFT domeni odgovara cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni

③ $H_{LP}(z) = \frac{1-r}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-rz^{-1}}, \quad 0 < r < 1$

$1+z^{-1} = 0 \Rightarrow z = -1, \quad 1-rz^{-1} = 0 \Rightarrow z = r$

zadani sustav je stabilan jer pol nikada ne izlazi izvan jedinične kružnice



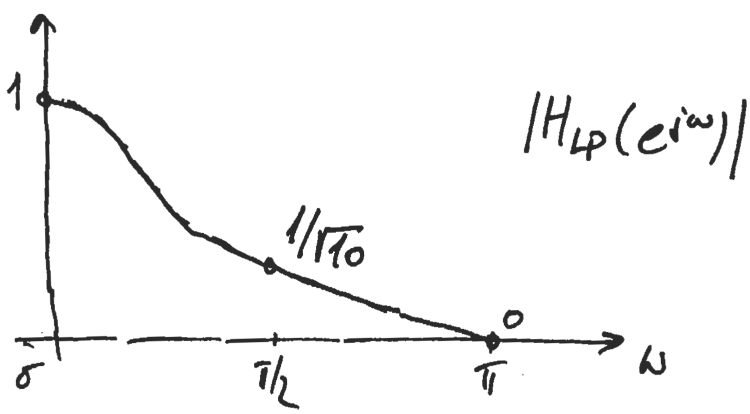
$$|H_{LP}(e^{j\omega})| = \frac{1-r}{2}\left|\frac{1+e^{-j\omega}}{1-re^{-j\omega}}\right| = \frac{1-r}{2}\left|\frac{1+\cos(\omega)-j\sin(\omega)}{1-r\cos(\omega)+jr\sin(\omega)}\right|$$

$$= \frac{1-r}{2}\sqrt{\frac{(1+\cos(\omega))^2+\sin^2(\omega)}{(1-r\cos(\omega))^2+r^2\sin^2(\omega)}} = \frac{1-r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\cos(\omega)}{1+r^2-2r\cos(\omega)}}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow |H_{LP}(e^{j\omega})| = \frac{1-r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{r^2-2r+1}} = 1$$

$$\omega = \pi \Rightarrow |H_{LP}(e^{j\omega})| = \frac{1-r}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-1}{r^2+2r+1}} = 0$$

$$r = 1/2 \Rightarrow |H_{LP}(e^{j\omega})| = \frac{1-1/2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\cos(\omega)}{5/4-\cos(\omega)}}$$

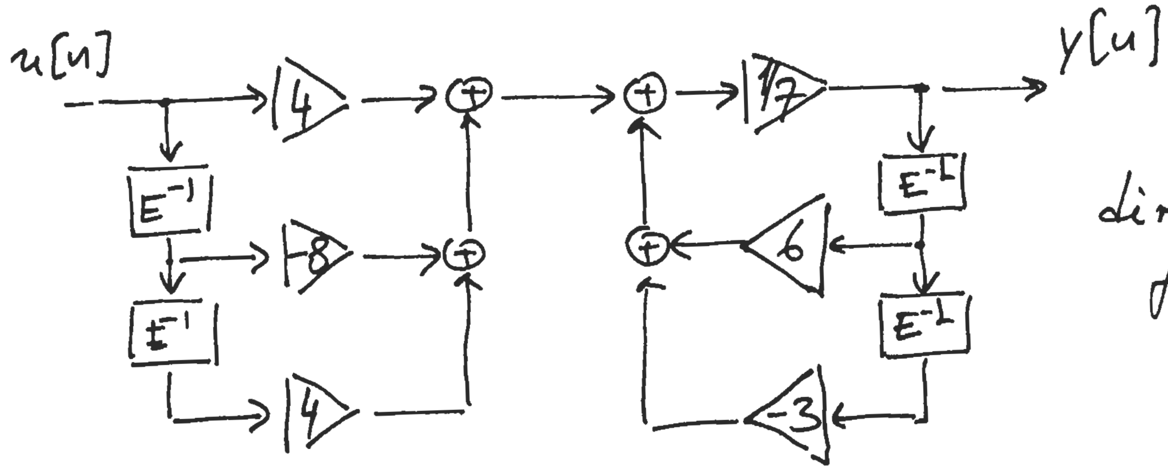


(4) $H(s) = \dfrac{s^2}{s^2+s+1}$, $\quad s = \dfrac{2}{T}\,\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, $\quad T=1$

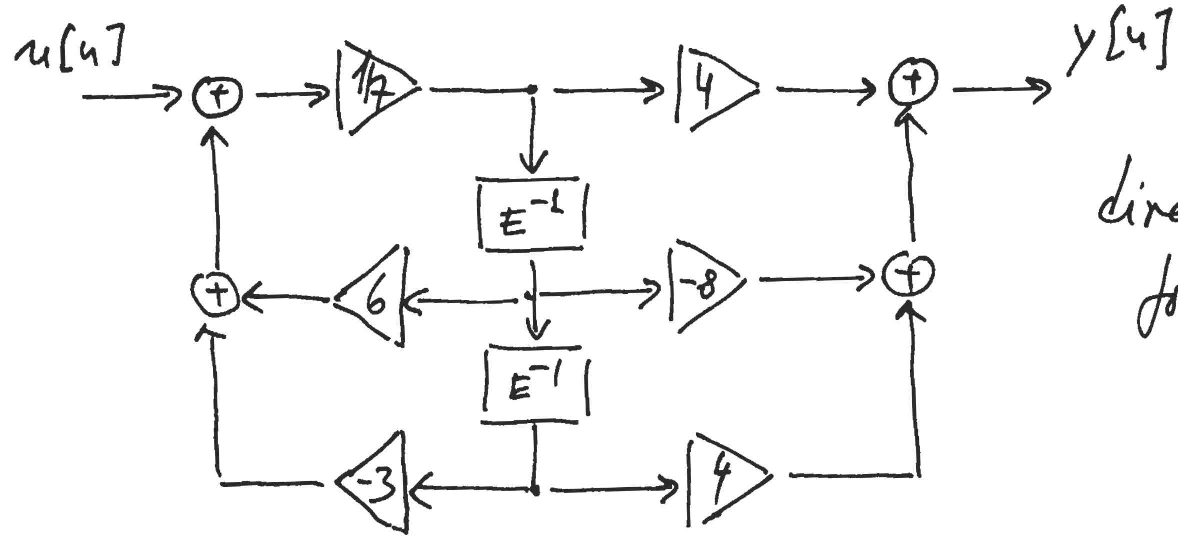
$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2}{4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 2\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} =$$

$$= \frac{4\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)}{4\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right) + 2\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right) + 1 + 2z^{-1} + z^{-2}} =$$

$$= \frac{4-8z^{-1}+4z^{-2}}{5-6z^{-1}+5z^{-2}+2-2z^{-1}} = \frac{4-8z^{-1}+4z^{-2}}{7-6z^{-1}+3z^{-2}}$$



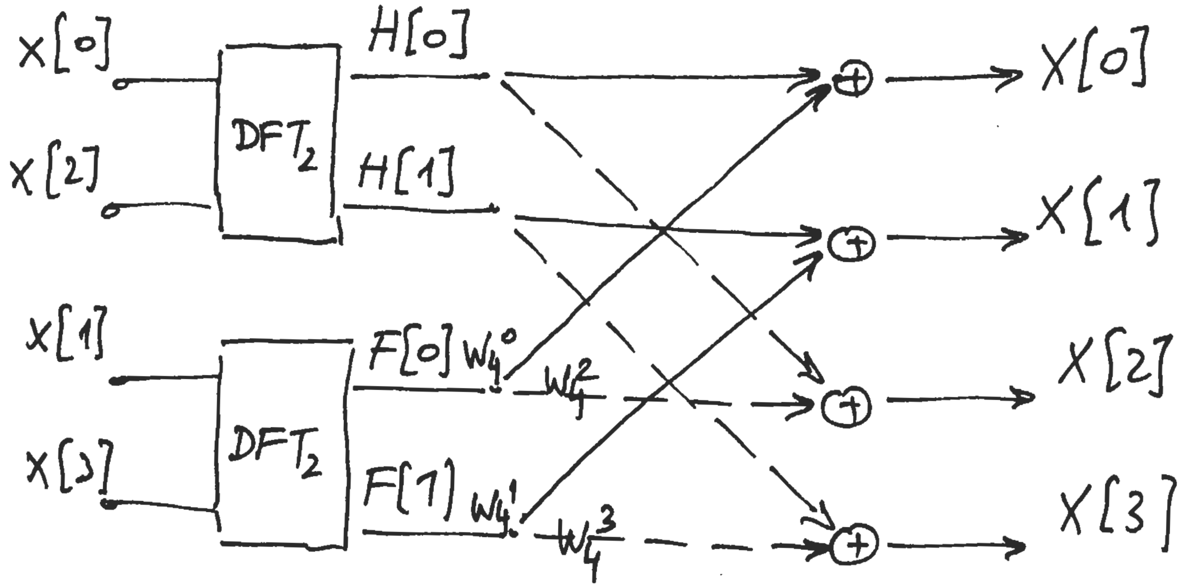
direktna forma I



direktna forma II

⑤ $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_4^{(2n+1)k}$

$= \sum_{n=0}^{1} x[2n] W_2^{nk} + W_4^k \sum_{n=0}^{1} x[2n+1] W_2^{nk}$



$X[k] = H[k \bmod 2] + W_4^k F[k \bmod 2]$

$x[n] = \{ \underline{1}, 1, 0, 0 \}$

$X[k] = 1 + W_4^k \cdot 1 = 1 + W_4^k$

$H[k] = 1 \cdot W_2^{0k} + 0 \cdot W_2^{1k} = 1$

$F[k] = 1 \cdot W_2^{0k} + 0 \cdot W_2^{1k} = 1$

Digitalna obradba signala

Dekanski rok – 30. rujna 2004.

1. Odredite vremenski diskretnu Fourirerovu transformaciju signala

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4].$$

Skicirajte amplitudnu i faznu frekvencijsku karakteristiku.

2. Odredite linearnu i cirkularnu konvoluciju konačnih impulsa

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0\}.$$

Kako pomoću cirkularne konvolucije možemo odrediti linearnu konvoluciju?

3. Diskretni sustav je opisan jednadžbom

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

Odredite impulsni odziv sustava i njegovu prijenosnu funkciju. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku, te grupno vrijeme kašnjenja. Nacrtajte realizaciju sustava.

4. Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})^3}.$$

Nacrtajte direktnu I i II, paralelnu te kaskadnu realizaciju sustava. Za koje vrijednosti parametra a je sustav stabilan?

5. Ako raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u 5 točaka kako ih je potrebno povezati da dobijemo strukturu za računanje DFT-a u 10 točaka. Za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

odredite izlaz iz svakog bloka za računanje DFT-a u 5 točaka i konačnu transformaciju.

DOS, 30. 9. 2004.

① $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$

$$\mathcal{F}_{VD}\left[x[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} + 2e^{-2j\omega} + e^{-4j\omega} =$$

$$= 1 + 2e^{-2j\omega} + e^{-4j\omega} = \left(1 + e^{-2j\omega}\right)^2 =$$

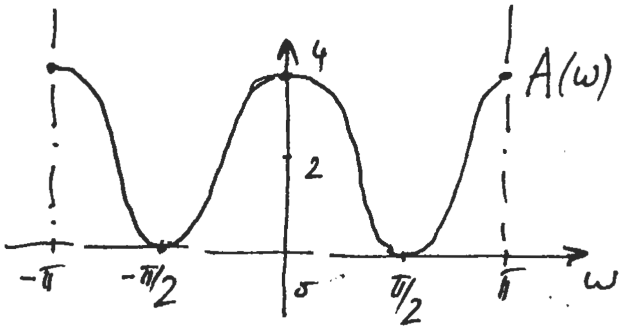
$$= 1 + 2\cos(2\omega) + \cos(4\omega) + j\left(-2\sin(2\omega) - \sin(4\omega)\right)$$

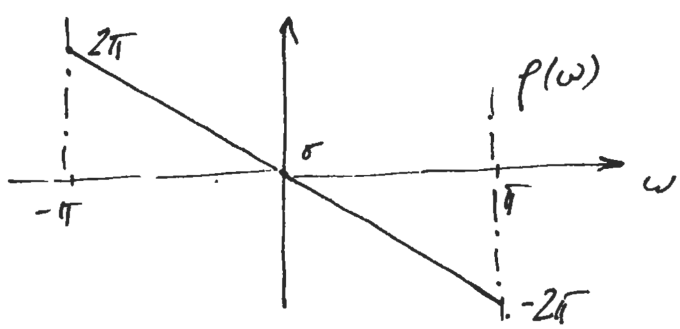
$$A(\omega) = \left|1 + e^{-2j\omega}\right|^2 = \left|1 + \cos(2\omega) - j\sin(2\omega)\right|^2 =$$

$$= 1 + 2\cos(2\omega) + \cos^2(2\omega) + \sin^2(2\omega) = 2 + 2\cos(2\omega)$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi(\omega)}{2} = \frac{-\sin(2\omega)}{1+\cos(2\omega)} = \frac{-2\sin(\omega)\cos(\omega)}{2\cos^2(\omega)} = -\mathrm{tg}(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -2\omega$$





② $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 1\}$

$x_2[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0\}$

linearna konvolucija $y_l[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

cirkularna konvolucija $y_c[n] = \sum_{i=0}^{4-1} x_1[i]\, x_2[n-i \bmod 4]$

$y_l[n] = \{\ldots, 0, \underline{1}, 0, -1, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots\}$

$y_c[n] = \{\underline{1}, -1, -1, 1\}$

linearnu konvoluciju pomoću cirkularne računamo tako da proširimo oba signala s nulama do duljine $l_1 + l_2 - 1 = 7$ te zatim računamo cirkularnu konvoluciju tako proširenih signala

③ $y[n] = x[n] - x[n-1] \quad /Z$

$$Y = X - z^{-1}X = (1 - z^{-1})X = H(z)\cdot X$$

$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

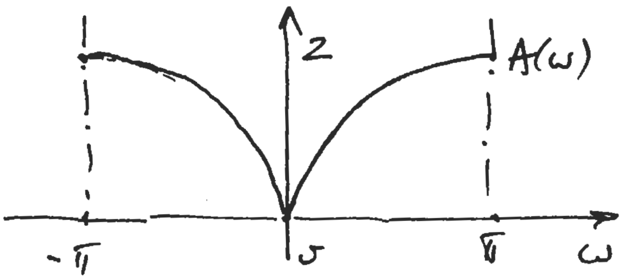
$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)$$

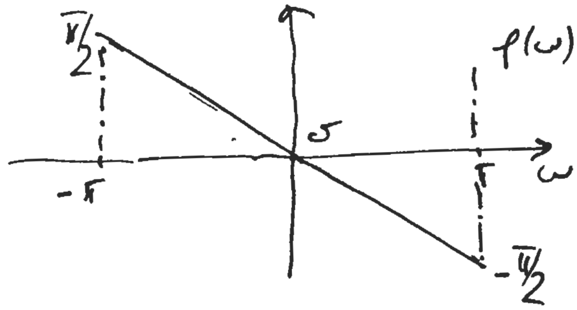
$$A(\omega) = \sqrt{1 - 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = \sqrt{2 - 2\cos(\omega)} =$$

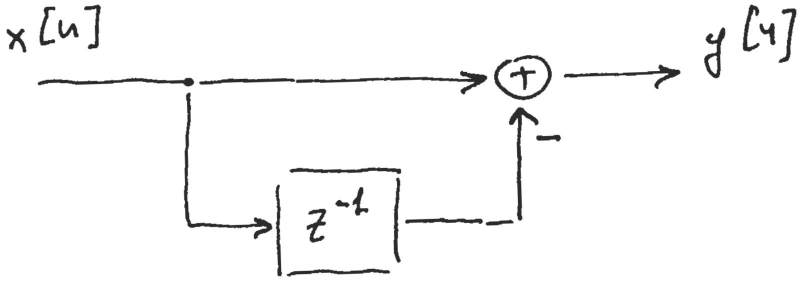
$$= \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos^2(\omega/2) + \sin^2(\omega/2)} = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} = \frac{2\sin(\omega/2)\cos(\omega/2)}{2\sin^2(\omega/2)} = \frac{\cos(\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \Rightarrow$$

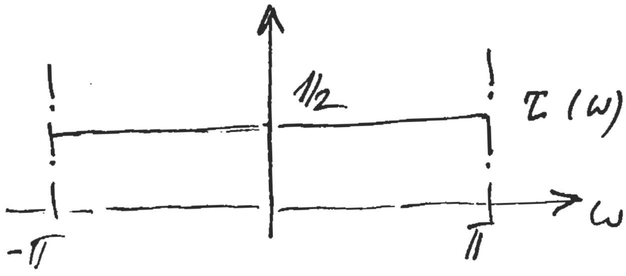
$$\Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$







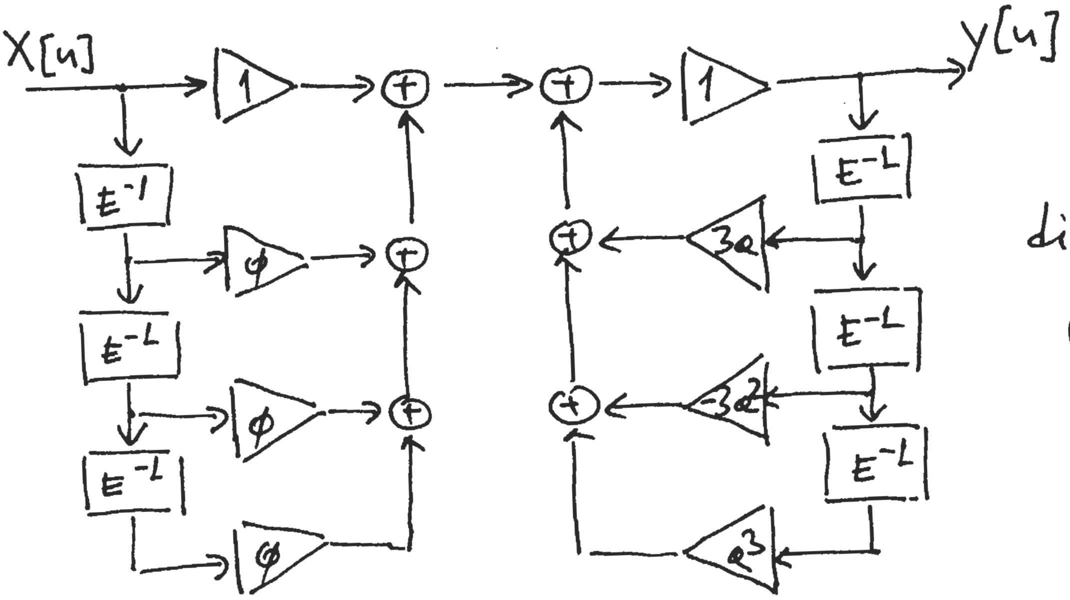
$$\tau = -\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



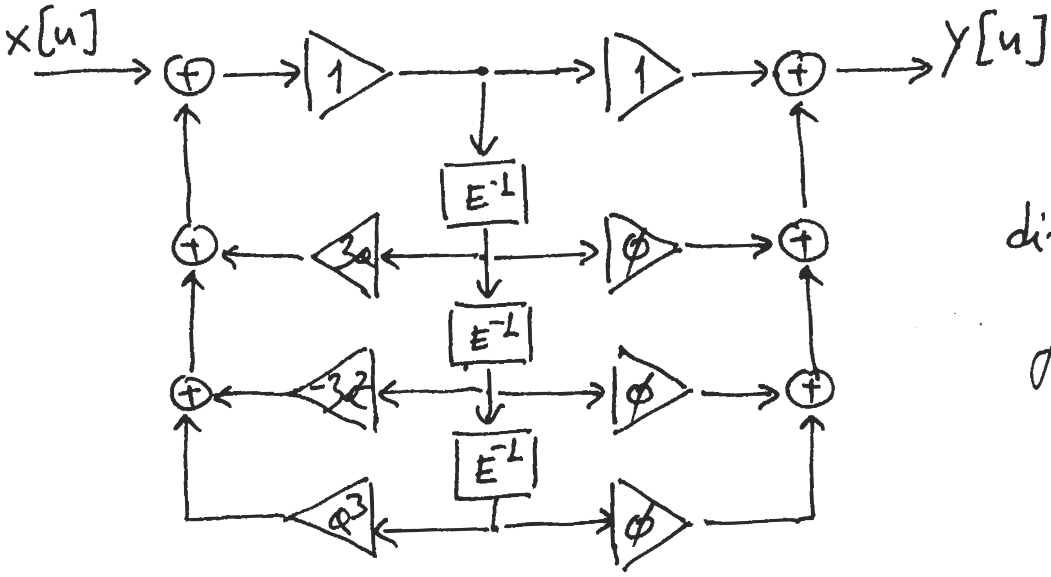
(4) $H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^3} = \frac{1}{1-3az^{-1}+3a^2z^{-2}-a^3z^{-3}}$

$1 - az^{-1} = 0 \Rightarrow z = a$

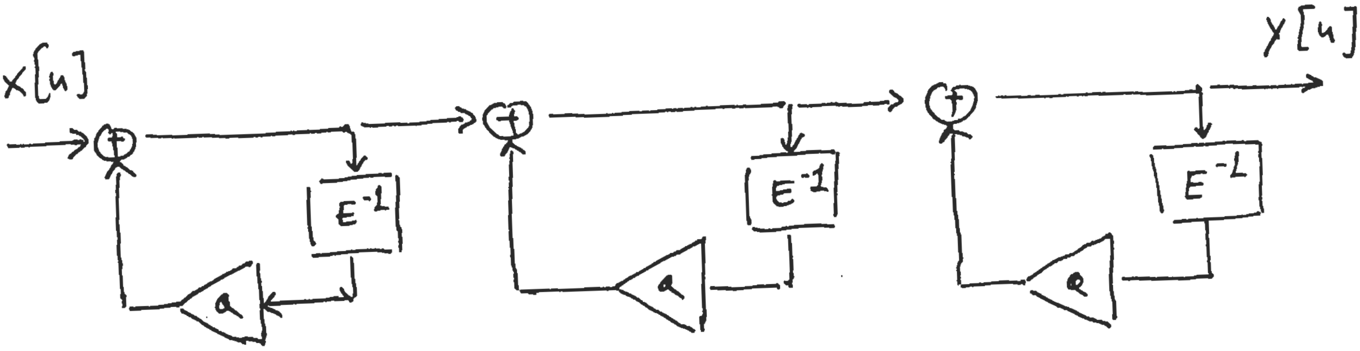
sustav je stabilan za svaki $-1 < a < 1$



direktna forma I



direktna forma II

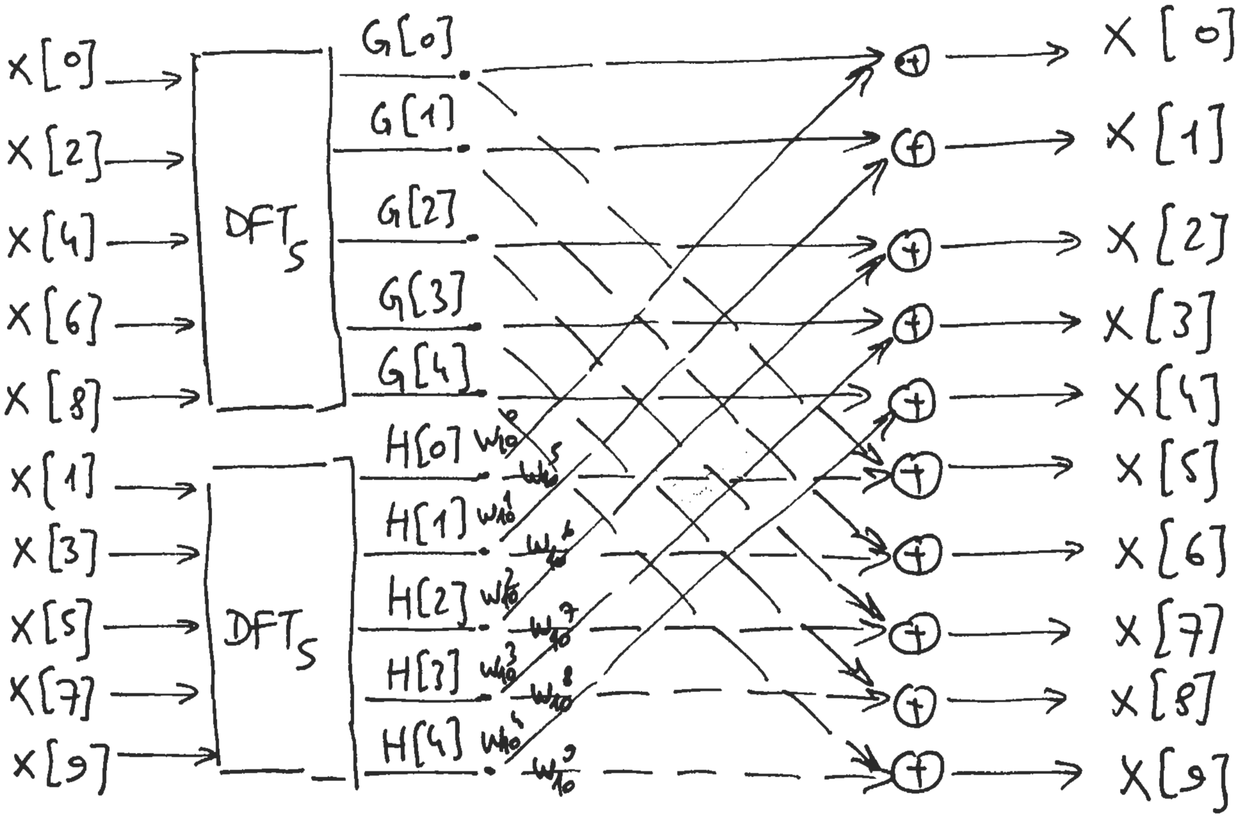


kaskadna realizacija

paralelna realizacija je jednaka kaskadnoj

(5) $$X[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^{4} x[2n] W_{10}^{2nk} + \sum_{n=0}^{4} x[2n+1] W_{10}^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{4} x[2n] W_5^{nk} + W_{10}^{k} \sum_{n=0}^{4} x[2n+1] W_5^{nk}$$



$$X[k] = G[k \bmod 5] + H[k \bmod 5] \cdot W_{10}^{k}$$

$$G[k] = W_5^{0k} = 1 \quad , \quad H[k] = W_5^{0k} = 1$$

$$X[k] = 1 + 1 \cdot W_{10}^{k} = 1 + W_{10}^{k}$$

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 20. rujna 2004.

1. Signal

$$x(t) = 1{,}2\cos(2\pi 0{,}8t)$$

otipkajte frekvencijom otipkavanja od 2 Hz u četiri točke s početkom u $t = 0$. Da li je došlo do preklapanja spektra? Za dobiveni signal odredite DFT te skicirajte amplitudni i fazni spektar.

2. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{0}, 1, 0, -1\}.$$

Odredite konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

3. Nacrtajte raspored polova i nula te amplitudnu karakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ za prijenosnu funkciju

$$H(z) = \frac{1 - r^{-1}z^{-1}}{1 - rz^{-1}}$$

ako je $0 < r < 1$. Da li je sustav određen takvom prijenosnom funkcijom stabilan?

4. Nacrtajte direktnu II i kaskadnu realizaciju filtra čija je prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{1 + 0{,}28z^{-1}}{1 - 0{,}4z^{-1} + 0{,}8z^{-2}} \frac{1 + 0{,}82z^{-1}}{1 + 0{,}22z^{-1} + 0{,}41z^{-2}}.$$

Po potrebi skalirajte koeficijente da bi njihova vrijednost bila unutar intervala $[-1, 1]$. Na slike realizacija upišite koeficijente filtra dobivene zaokruživanjem na najbliži cijeli broj ako raspolažete s četiri bita (3 bita i predznak).

5. Raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u tri točke. Kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u šest točaka. Odredite izlaze iz blokova za računanje DFT-a u tri točke te konačnu transformaciju za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0, 0, 0\}.$$

DOS, 20. 9. 2004.

(1) $x(t) = 1{,}2 \cos(2\pi\, 0{,}8 t)$

$f_s = 2\,\mathrm{Hz}, \quad f = 0{,}8\,\mathrm{Hz} < f_s/2 = 1\,\mathrm{Hz}$

nema preklapanja spektra

$x(0) = 1{,}2 \cos(2\pi\, 0{,}8 \cdot 0) = 1{,}2$

$x(1/2) = 1{,}2 \cos(0{,}8\pi) \approx -0{,}9708$

$x(2/2) = 1{,}2 \cos(1{,}6\pi) \approx 0{,}3708$

$x(3/2) = 1{,}2 \cos(2{,}4\pi) \approx 0{,}3708$

$$x[n] = \{ \underline{1{,}2},\ 1{,}2\cos(0{,}8\pi),\ 1{,}2\cos(1{,}6\pi),\ 1{,}2\cos(2{,}4\pi) \}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} =$$

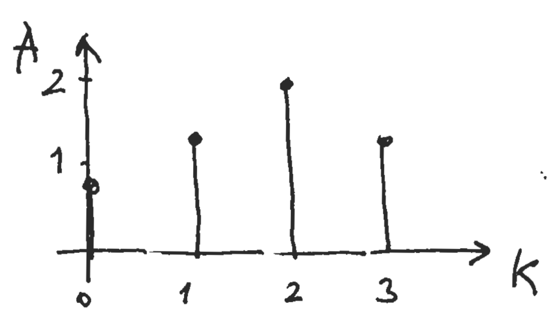
$$= 1{,}2 + 1{,}2\cos(0{,}8\pi) W_4^{k} + 1{,}2\cos(1{,}6\pi) W_4^{2k} + 1{,}2\cos(2{,}4\pi) W_4^{3k}$$

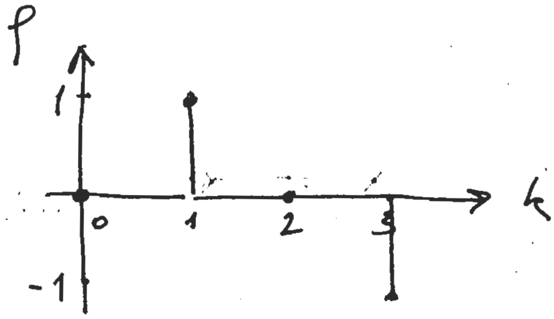
$X[0] \approx 0{,}9708$

$X[1] \approx 0{,}8292 + 1{,}3416j$

$X[2] \approx 2{,}1708$

$X[3] \approx 0{,}8292 - 1{,}3416i$





$A = \{ \underline{0{,}9708},\ 1{,}5772,\ 2{,}1708,\ 1{,}5772 \}$

$\varphi = \{ 0,\ 1{,}0172,\ 0,\ -1{,}0172 \}$

(2) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0\}$

$x_2[n] = \{\underline{1}, 1, 0, -1\}$

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{3} x_1[n] W_4^{nk} = 1 + W_4^{2k}$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{3} x_2[n] W_4^{nk} = W_4^{k} - W_4^{3k}$$

$$X_1[k] X_2[k] = (1 + W_4^{2k})(W_4^{k} - W_4^{3k}) =$$

$$= W_4^{k} + \underline{W_4^{3k}} - \underline{W_4^{3k}} - W_4^{5k} = W_4^{k} - W_4^{k} = 0$$

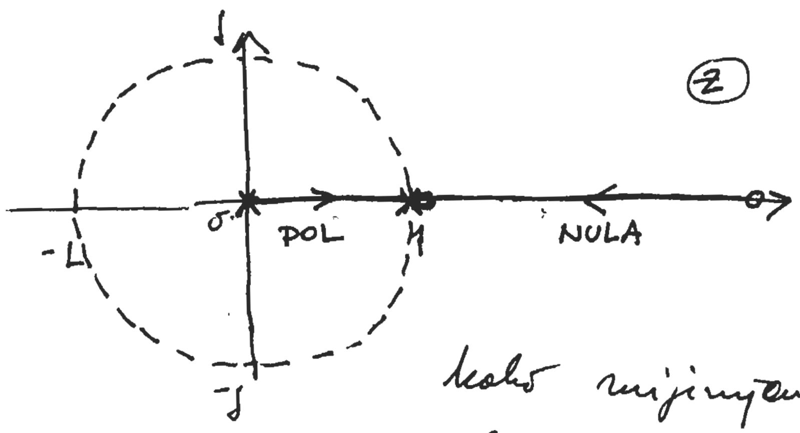
$$\mathrm{IDFT}\left[X_1[k] X_2[k]\right] = \mathrm{IDFT}[0] = 0$$

množenje u DFT domeni odgovara cirkularnoj konvoluciji

(3) $$H(z) = \frac{1 - r^{-1} z^{-1}}{1 - r z^{-1}}, \quad 0 < r < 1$$

$$H(z) = \frac{1 - r^{-1} z^{-1}}{1 - r z^{-1}} = \frac{z - r^{-1}}{z - r}$$

POL $z = r$ NULA $z = \frac{1}{r}$



kako mijenjamo r od 0 do 1 pol se uvijek nalazi unutar jedinične kružnica te je sustav stabilan

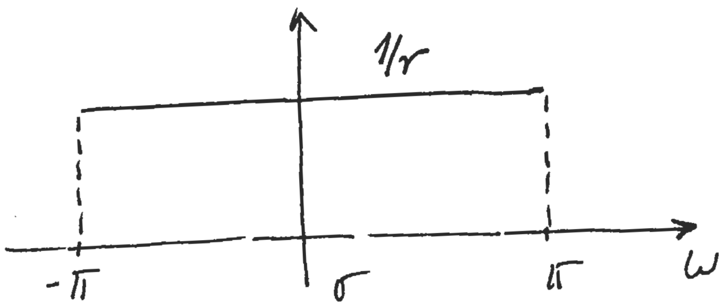
(3) $$|H(e^{j\omega})|^2 = \left|\frac{1-r^{-1}e^{-j\omega}}{1-re^{-j\omega}}\right|^2 = \left|\frac{1-r^{-1}\cos(\omega)+jr^{-1}\sin(\omega)}{1-r\cos(\omega)+jr\sin(\omega)}\right|^2$$

$$= \frac{(1-r^{-1}\cos(\omega))^2 + r^{-2}\sin^2(\omega)}{(1-r\cos(\omega))^2 + r^2\sin^2(\omega)}$$

$$= \frac{1-2r^{-1}\cos(\omega)+r^{-2}\cos^2(\omega)+r^{-2}\sin^2(\omega)}{1-2r\cos(\omega)+r^2\cos^2(\omega)+r^2\sin^2(\omega)}$$

$$= \frac{1-2r^{-1}\cos(\omega)+r^{-2}}{1-2r\cos(\omega)+r^2} = \frac{1}{r^2}\,\frac{1-2r^{-1}\cos(\omega)+r^{-2}}{r^{-2}-2r^{-1}\cos(\omega)+1} = \frac{1}{r^2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = r^{-1}$$



(4) $$H(z) = \underbrace{\frac{1+0{,}28z^{-1}}{1-0{,}4z^{-1}+0{,}8z^{-2}}}_{H_1}\;\underbrace{\frac{1+0{,}82z^{-1}}{1+0{,}22z^{-1}+0{,}41z^{-2}}}_{H_2}$$

$$H(z) = \frac{1+1{,}1z^{-1}+0{,}2296z^{-2}}{1-0{,}18z^{-1}+1{,}122z^{-2}+0{,}012z^{-3}+0{,}328z^{-4}}$$

$$= \frac{1{,}1}{1{,}122}\;\frac{0{,}9091+z^{-1}+0{,}2087z^{-2}}{0{,}8913-0{,}1604z^{-1}+z^{-2}+0{,}0107z^{-3}+0{,}2923z^{-4}}$$

$$H(z) = 0,9804 \, \frac{0,9091 + z^{-1} + 0,2087 z^{-2}}{0,8913 - 0,1604 z^{-1} + z^{-2} + 0,0107 z^{-3} + 0,2923 z^{-4}}$$

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{8} \mathrm{round}(0,9091 \cdot 8) = 0,875$$

$$\hat{b}_1 = 1$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{8} \mathrm{round}(0,2087 \cdot 8) = 0,25$$

$$\hat{a}_0^{-1} = \frac{1}{8} \mathrm{round}(8 / 0,8913) = 1,125$$

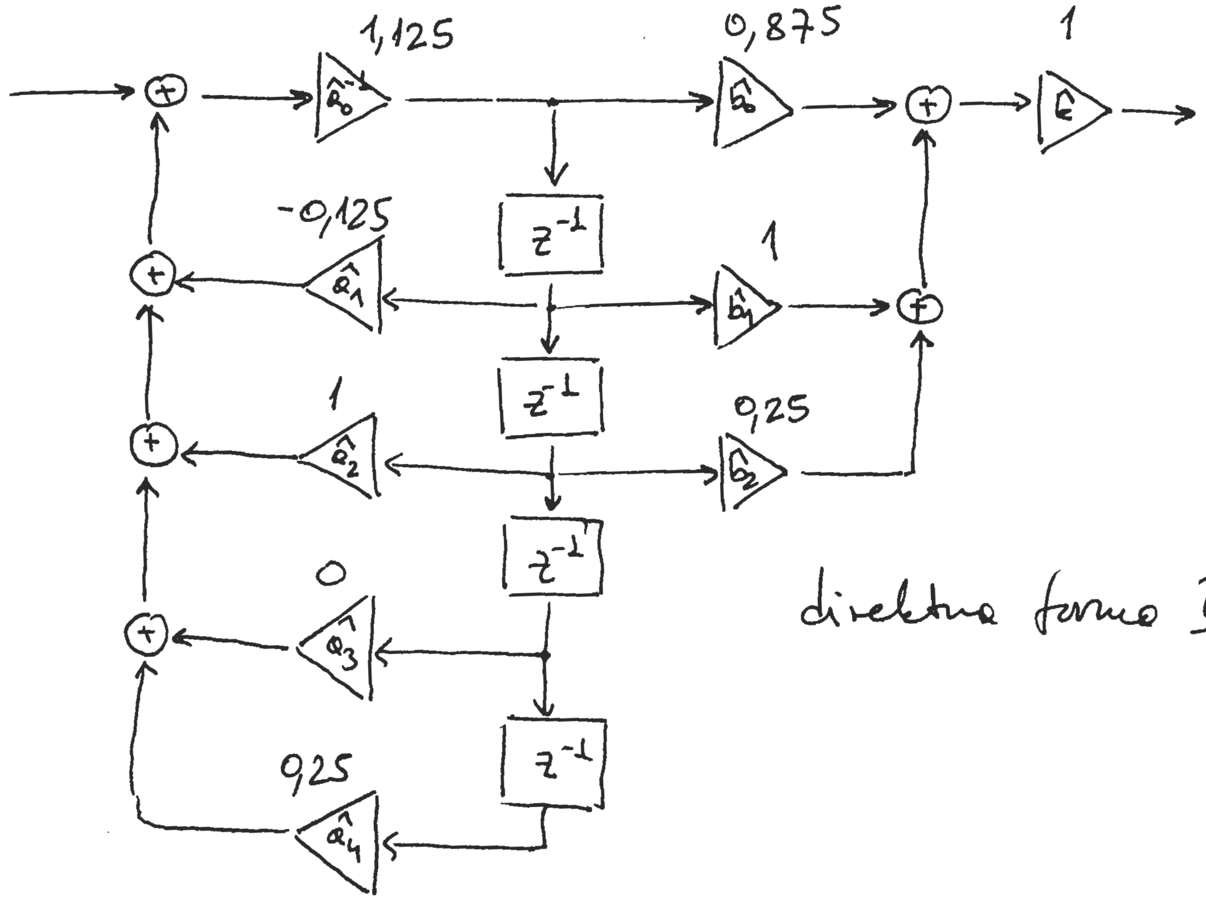
$$\hat{a}_1 = \frac{1}{8} \mathrm{round}(-0,1604 \cdot 8) = -0,125$$

$$\hat{a}_2 = 1$$

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{8} \mathrm{round}(0,0107 \cdot 8) = 0$$

$$\hat{a}_4 = \frac{1}{8} \mathrm{round}(0,2923 \cdot 8) = 0,25$$

$$\hat{k} = \frac{1}{8} \mathrm{round}(0,9804 \cdot 8) = 1$$



direktna forma II

$$H(z) = \frac{1+0{,}28\,z^{-1}}{1-0{,}4z^{-1}+0{,}8z^{-2}} \cdot \frac{1+0{,}82\,z^{-1}}{1+0{,}22\,z^{-1}+0{,}41z^{-2}}$$

$\swarrow H_1(z)$ $\qquad\qquad$ $\downarrow H_2(z)$

$\hat{b}_0 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(1\cdot 8) = 1$

$\hat{b}_1 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(0{,}28\cdot 8) = 0{,}25$

$\hat{a}_0^{-1} = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(8/1) = 1$

$\hat{a}_1 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(-0{,}4\cdot 8) = -0{,}375$

$\hat{a}_2 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(0{,}8\cdot 8) = 0{,}75$

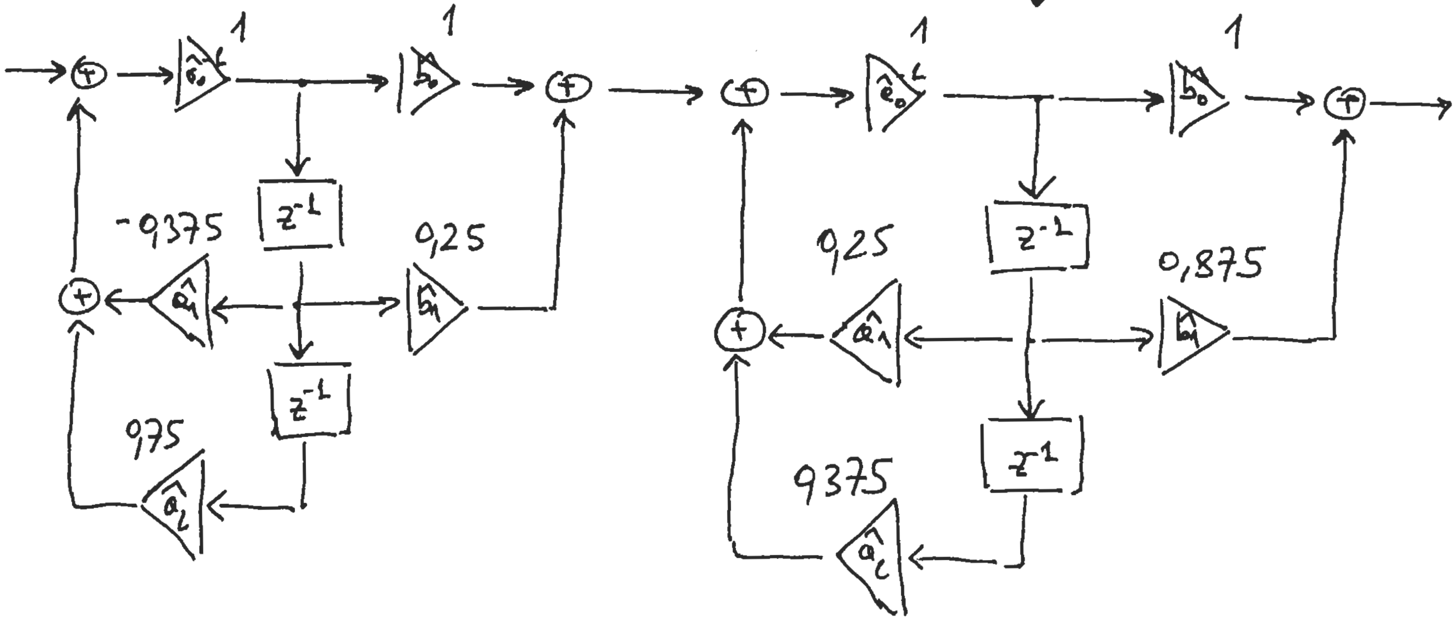
$\hat{b}_0 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(1\cdot 8) = 1$

$\hat{b}_1 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(0{,}82\cdot 8) = 0{,}875$

$\hat{a}_0^{-1} = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(8/1) = 1$

$\hat{a}_1 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(0{,}22\cdot 8) = 0{,}25$

$\hat{a}_2 = \frac{1}{8}\,\text{round}\,(0{,}41\cdot 8) = 0{,}375$



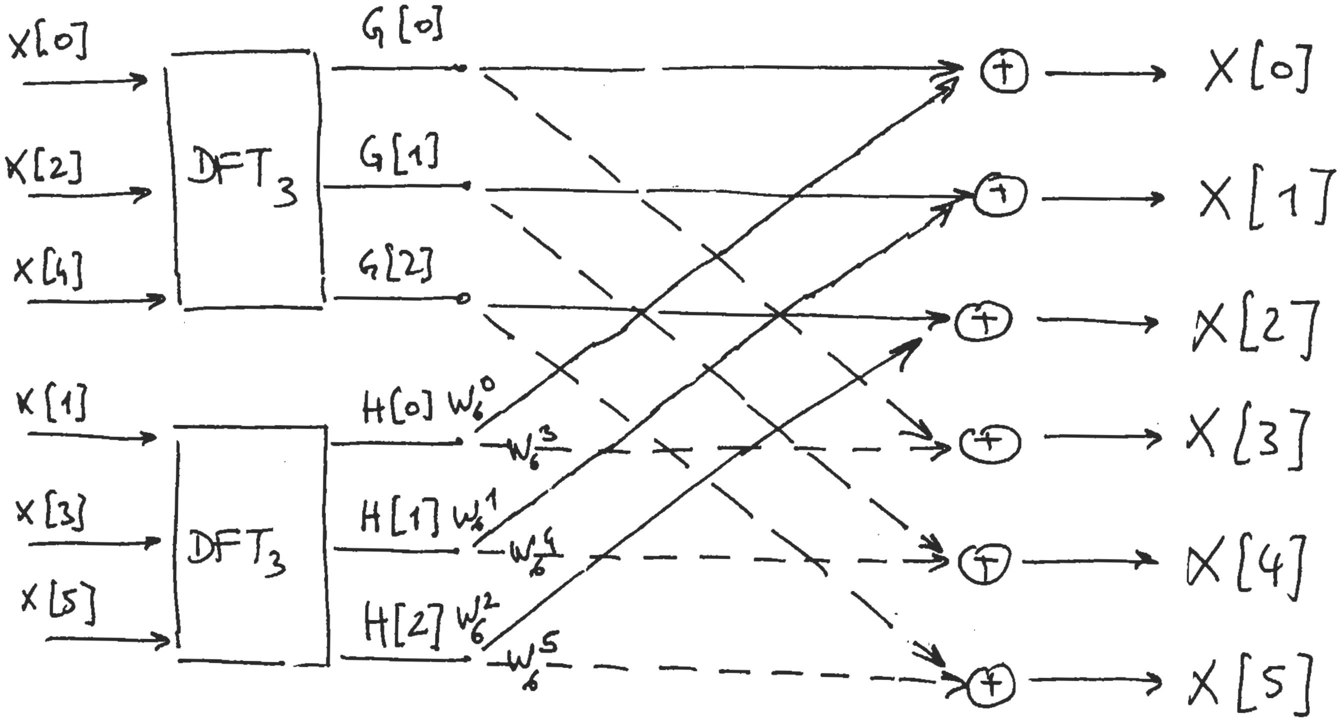
(5)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{5} x[n]\,W_6^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2} x[2n]\,W_6^{2nk} + \sum_{n=0}^{2} x[2n+1]\,W_6^{(2n+1)k} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{2} x[2n]\,W_3^{nk}}_{G[k]} + W_6^{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{2} x[2n+1]\,W_3^{nk}}_{H[k]}$$

$$X[k] = G[k \bmod 3] + W_6^{k}\, H[k \bmod 3]$$



$$x[n] = \{ \underline{1}, 1, 0, 0, 0, 0 \}$$

$$G[k] = W_3^{0k} \quad , \quad H[k] = W_3^{0k}$$

$$X[k] = 1 \cdot W_3^{0k \bmod 3} + W_6^k W_3^{0k \bmod 3}$$

$$= 1 + W_6^k$$

Digitalna obradba signala

Pismeni ispit – 8. rujna 2004.

1. Diskretni signal

$$x[n] = \{\dots, 0, 0, \underline{1}, 2, -1, 2, 0, 0, 0, \dots\}$$

je propušten kroz idealni interpolator koji koristi sinc interpolacijsku funkciju. Odredite vrijednost rekonstruiranog signala u trenutcima $t_1 = 1{,}5\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 2{,}5\,\mathrm{s}$ ako je period otipkavanja $T = 1\,\mathrm{s}$.

2. Odredite vremenski diskretnu Fourireovu transformaciju te DFT signala

$$x[n] = \{\underline{2}, 0, -1, 1\}.$$

Za obje transformacije skicirajte amplitudnu i frekvencijsku karakteristiku.

3. Impulsni odziv diskretnog sustava je

$$h_{\mathrm{HP}}[n] = \begin{cases} 1 - \omega_0/\pi, & n = 0 \\ -\dfrac{\sin(n\omega_0)}{n\pi}, & \text{inače} \end{cases}.$$

Odredite impulsni odziv $h[n]$ i prijenosnu funkciju $H(z)$ FIR filtra reda $N = 4$ projektiranog pomoću Hammingovog otvora ako je $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$. Nacrtajte realizaciju filtra te na sliku upišite vrijednosti koeficijenata kao 6-bitne frakcije (pet bitova i predznak) dobivene zaokruživanjem na najbliži cijeli broj.

Hammingov otvor je određen izrazom

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right].$$

4. Odredite linearnu i cirkularnu konvoluciju signala

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{1}, 0, -1\}.$$

Na koji način se pomoću cirkularne konvolucije može odrediti linearna konvolucija? Za zadane signale izračunajte linearnu konvoluciju pomoću cirkularne.

5. Raspolažete s tri bloka za računanje DFT-a u dvije točke. Kako ih je potrebno povezati da se dobije mreža za računanje DFT-a u šest točaka. Odredite izlaze iz sva tri bloka i konačnu transformaciju za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 1, 1\}.$$

DOS, 8. 9. 2004.

① $x[n] = \{\ldots, 0, 0, 1, 2, -1, 2, 0, 0, 0, \ldots\}$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}-n\right)$$

$$x_r(1{,}5) = \mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}-1\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}-2\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2}-3\right) =$$

$$= -\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi}\cdot 2 - \frac{2}{\pi} + 2\left(-\frac{2}{3\pi}\right) = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} = 0$$

$$x_r(2{,}5) = \mathrm{sinc}\left(\frac{5}{2}\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{5}{2}-1\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{5}{2}-2\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{5}{2}-3\right) =$$

$$= \frac{2}{5\pi} + 2\,\frac{-2}{3\pi} - \frac{2}{\pi} + 2\,\frac{2}{\pi} = \frac{16}{15\pi}$$

② $x[n] = \{2, 0, -1, 1\}$

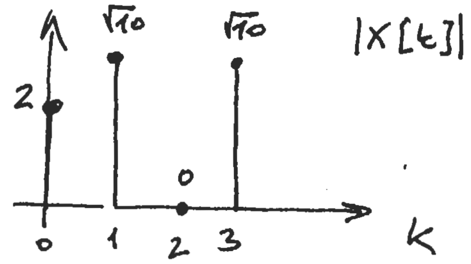
$$\mathcal{F}_{vd}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = 2e^{-j\omega 0} - 1e^{-j\omega 2} + 1e^{-j\omega 3} =$$

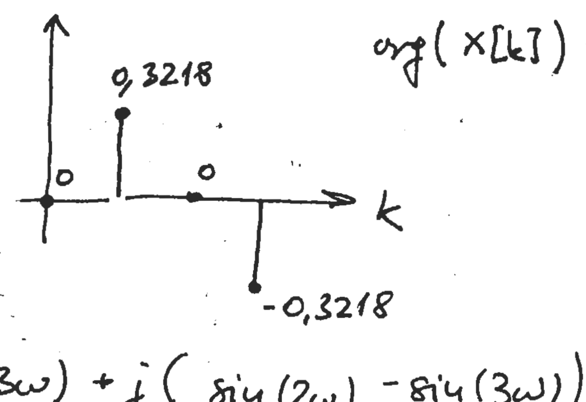
$$= 2 - e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 3}$$

$$DFT[x[n]] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = 2W_4^{0k} + 0\cdot W_4^{1k} - 1W_4^{2k} + 1W_4^{3k} =$$

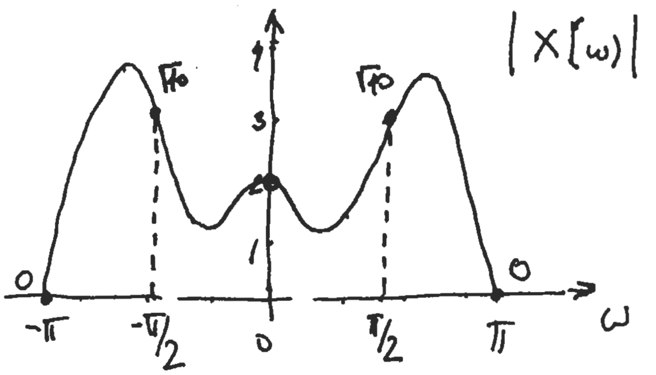
$$= 2 - W_4^{2k} + W_4^{3k}$$

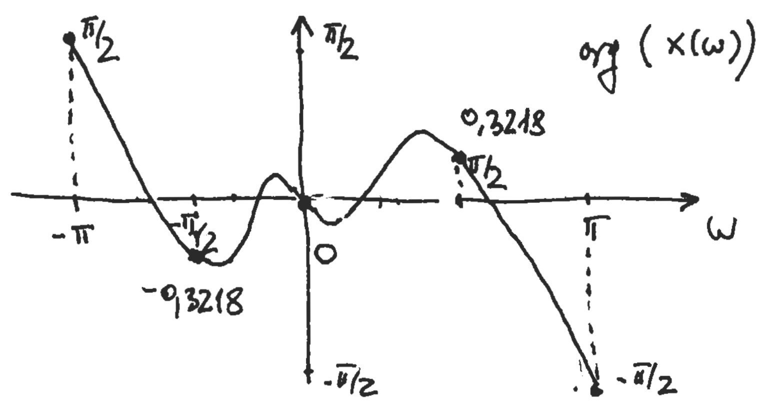
$$X[k] = \{\underline{2},\ 3+j,\ 0,\ 3-j\}$$





$$X[\omega] = 2 - \cos(2\omega) + \cos(3\omega) + j\left(\sin(2\omega) - \sin(3\omega)\right)$$





③

$$h_{LP}[n] = \begin{cases} 1 - \omega_0/\pi, & n = 0 \\ -\dfrac{\sin(n\omega_0)}{n\pi}, & \text{inače} \end{cases}$$

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$$

n	-2	-1	0	1	2
h_{LP}	$-0{,}1592$	$-0{,}2251$	$0{,}75$	$-0{,}2251$	$-0{,}1592$
w	$0{,}08$	$0{,}54$	1	$0{,}54$	$0{,}08$
h	$-0{,}0127$	$-0{,}1216$	$0{,}75$	$-0{,}1216$	$-0{,}0127$

$$h[n] = \{\underline{-0{,}0127}, -0{,}1216, 0{,}75, -0{,}1216, -0{,}0127\}$$

$$H(z) = -0{,}0127 - 0{,}1216z^{-1} + 0{,}75z^{-2} - 0{,}1216z^{-3} - 0{,}0127z^{-4}$$

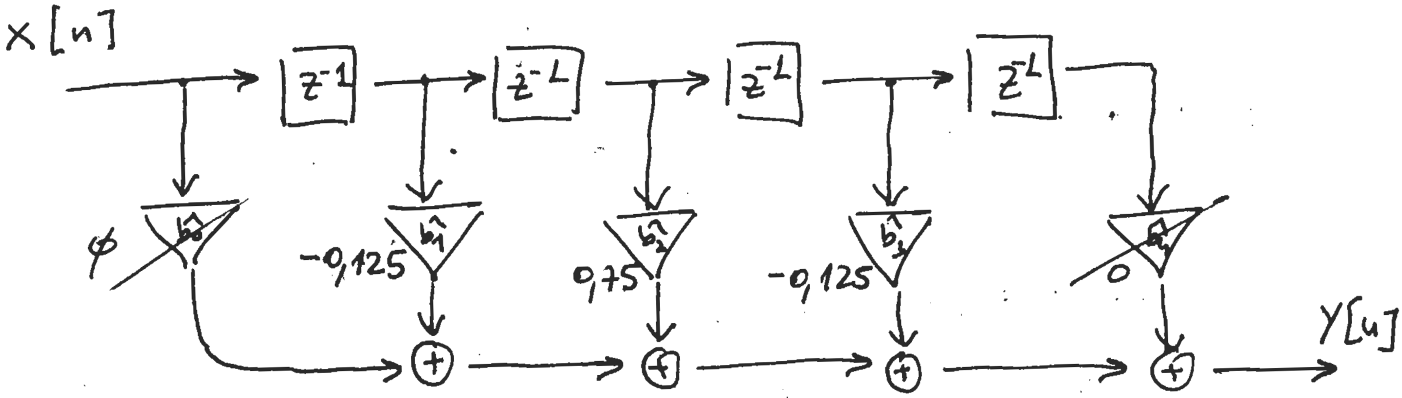
$$\hat{b}_0 = 2^{-5}\,\text{round}(-0{,}0127 \cdot 2^5) = 0$$

$$\hat{b}_1 = 2^{-5}\,\text{round}(-0{,}1216 \cdot 2^5) = -0{,}125$$

$$\hat{b}_2 = 2^{-5}\,\text{round}(0{,}75 \cdot 2^5) = 0{,}75$$

$$\hat{b}_3 = 2^{-5}\,\text{round}(-0{,}1216 \cdot 2^5) = -0{,}125$$

$$\hat{b}_4 = 2^{-5}\,\text{round}(-0{,}0127 \cdot 2^5) = 0$$



(4) $x_1[n] = \{ \underline{1}, 0, 0, -1 \}$

$x_2[n] = \{ \underline{1}, 0, -1 \}$

linearna konvolucija $y_e[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

cirkularna konvolucija $y_c[n] = \sum_{i=0}^{4-1} x_1[i]\, x_2[n-i \bmod 4]$

$$y_e[n] = \{ \ldots, 0, \underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1, 0, 0, \ldots \}$$

$$y_c[n] = \{ \underline{1}, 1, -1, -1 \}$$

linearna pomoću cirkularne

$$l_1 + l_2 - 1 = 6$$

$$x_1'[n] = \{ \underline{1}, 0, 0, -1, 0, 0 \}$$

$$x_2'[n] = \{ \underline{1}, 0, -1, 0, 0, 0 \}$$

dio linearne konvolucije različit od nule duljine 6 je određen izrazom $y_c'[n] = \sum_{i=0}^{6-1} x_1'[i]\, x_2'[n-i \bmod 6]$

$$y_c'[n] = \{ \underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1 \}$$

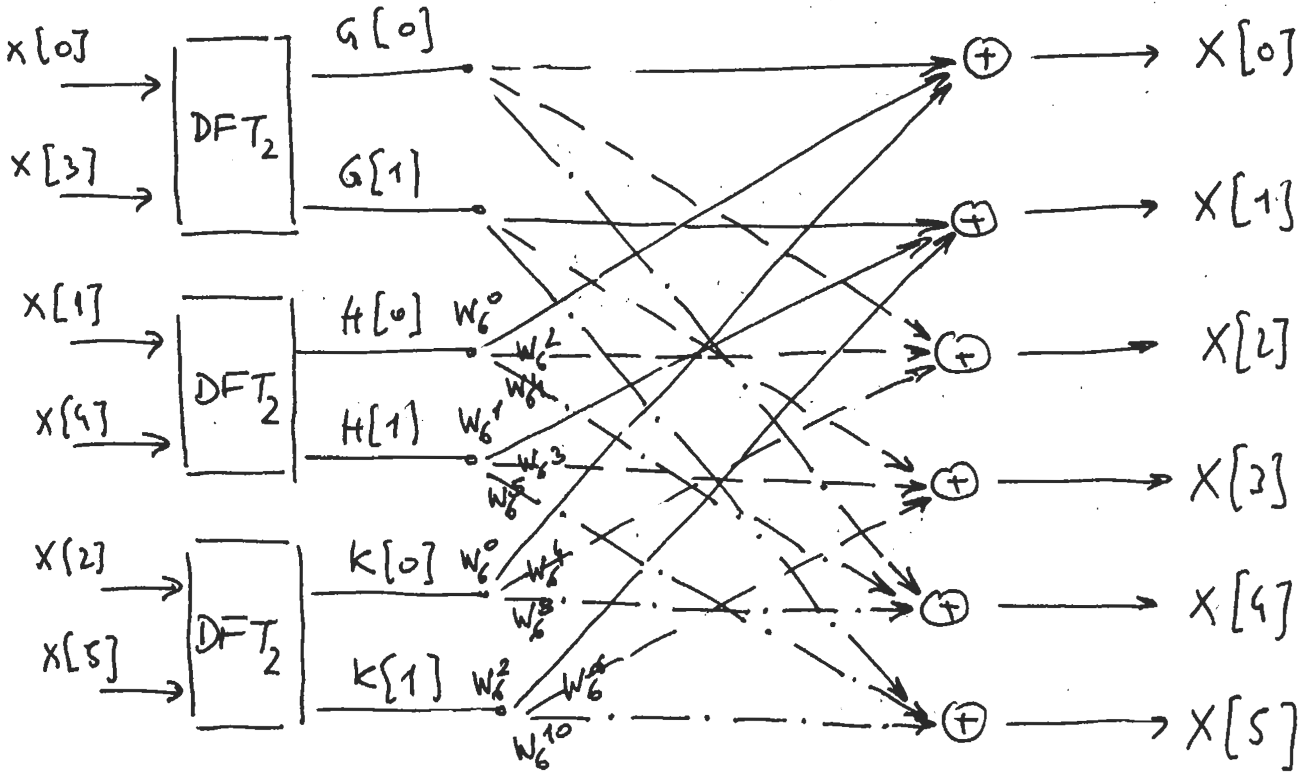
(5) $X[k] = \sum_{n=0}^{6-1} x[n]\, W_6^{nk} =$

$$= \sum_{n=0}^{1} x[3n] W_6^{3nk} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+1] W_6^{(3n+1)k} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{1} x[3n+2]\, W_6^{(3n+2)k} = \sum_{n=0}^{1} x[3n]\, W_2^{nk} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{1} x[3n+1]\, W_6^{k} W_3^{nk} + \sum_{n=0}^{1} x[3n+2]\, W_6^{2k} W_3^{nk}$$

$$X[k] = G[k \bmod 2] + W_6^{k} H[k \bmod 2] + W_6^{2k} K[k \bmod 2]$$



$$x[n] = \{ \underline{1}, 0, 0, 0, 1, 1 \}$$

$$G[k] = W_2^{0k}, \quad H[k] = W_2^{1k}, \quad K[k] = W_2^{1k}$$

$$X[k] = 1 \cdot W_2^{0k} + W_6^{k} W_2^{k \bmod 2} + W_6^{2k} W_2^{k \bmod 2} =$$

$$= 1 + W_6^{k} W_2^{k \bmod 2} + W_6^{2k} W_2^{k \bmod 2}$$

Digitalna obradba signala
Pismeni ispit – 3. rujna 2004.

1. Zadana su tri kontinuirana signala

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(2\cdot 10^3\pi t + \pi/3), \\ x_2(t) &= \cos(10^4\pi t + \pi/2), \\ x_3(t) &= \cos(32\cdot 10^3\pi t + \pi/4). \end{aligned}$$

Zadani kontinuirani signali su otipkani uz frekvenciju otipkavanja od 12 kHz. Odredite frekvencije i faze signala nakon rekonstrukcije idealnim interpolatorom.

2. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & 0 \le n < 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/2 + \pi), & 0 \le n < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračuna linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala. Odredi periodičku konvoluciju zadanih konačnih impulsa ako ih periodički proširimo s periodom $N = 5$.

3. Prijenosna funkcija diskretnog sustava je

$$H(z) = \frac{0{,}53 + 1{,}54z^{-1}}{1 - 0{,}23z^{-1}} \frac{1{,}89 + 2z^{-1} + z^{-2}}{0{,}35 + 0{,}045z^{-1} - 0{,}7z^{-2}}.$$

Nacrtajte direktnu realizaciju I i II zadanog sustava uz skaliranje koeficijenata tako da budu unutar intervala $[-1, 1]$. U slike realizacija upišite vrijednosti koeficijenata dobivene odsijecanjem prema dolje ako raspolažete s 4 bita (3 bita s jednim bitom za predznak). Da li su dobivene realizacije stabilne?

4. Ako je $x[n]$ realan niz pokažite da njegova transformacija

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

zadovoljava relaciju

$$X[k] = X^*[N-k].$$

5. Zadan je konačni diskretni signal koji ima devet uzoraka,

$$x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}.$$

Ako raspolažete s tri bloka za računanje DFT-a u tri točke, kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u devet točaka. Odredite transformacije na izlazima iz svakog bloka za računanje DFT-a u tri točke te konačnu transformaciju za zadani signal.

DOS, 3. 9. 2004.

(1) $x_1(t) = \cos(2\cdot 10^3 \pi t + \pi/3)$, $f_1 = 10^3 Hz = 1kHz$

$x_2(t) = \cos(10^4 \pi t + \pi/2)$, $f_2 = 5\cdot 10^3 Hz = 5kHz$

$x_3(t) = \cos(32\cdot 10^3 \pi t + \pi/4)$, $f_3 = 16\cdot 10^3 Hz = 16kHz$

$f_s = 12\ kHz$, $f_s/2 = 6kHz$

frekvencija i faza će se promijeniti samo za $x_3(t)$

$$x_3[n] = \cos\left(32\cdot 10^3 \pi \cdot \frac{n}{12\cdot 10^3} + \pi/4\right) = \cos\left(\frac{8}{3}\pi n + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi n + \frac{2}{3}\pi n + \pi/4\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_3'(t) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi t \cdot 12\cdot 10^3 + \pi/4\right) = \cos(8\cdot 10^3 \pi t + \pi/4)$$

(2)

$$x_1[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & 0 \le n < 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} \cos(n\pi/2 + \pi), & 0 \le n < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$x_1[n] = \{\underline{1}, -1, 1, -1, 1\}$$

$$x_2[n] = \{\underline{-1}, 0, 1\}$$

linearna konvolucija $y_e[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]\, x_2[n-i]$

cirkularna konvolucija $y_c[n] = \sum_{i=0}^{5-1} x_1[i]\, x_2[n-i \bmod 5]$

$$y_e[n] = \{\ldots, 0, \underline{-1}, 1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, \ldots\}$$

$$y_c[n] = \{-2, 2, 0, 0, 0\}$$

periodička konvolucija $y_p[n] = \sum_{i=0}^{5-1} \underbrace{x_1[i]\, x_2[n-i]}_{\text{signali su periodički s periodom } N=5}$

$$y_p[n] = \{\ldots, 0, 0, \underbrace{-2, 2, 0, 0, 0}_{\text{PERIOD}}, -2, 2, 0, 0, 0, -2, \ldots\}$$

(3) $H(z) = \dfrac{0,53+1,54z^{-1}}{1-0,23z^{-1}} \cdot \dfrac{1,89+2z^{-1}+z^{-2}}{0,35+0,045z^{-1}-0,7z^{-2}} =$

$$= \frac{1,0017+3,9706z^{-1}+3,61z^{-2}+1,54z^{-3}}{0,35-0,0355z^{-1}-0,71035z^{-2}+0,161z^{-3}} =$$

$$= 3,9706 \, \frac{0,2523+z^{-1}+0,9092z^{-2}+0,3879z^{-3}}{0,35-0,0355z^{-1}-0,71035z^{-2}+0,161z^{-3}}$$

polovi su: $z_1 = 0,23$, $z_{2,3} = -0,06429 \pm j\,1,41421$

k sustav nije stabilan

raspolažemo s 3 bita za zapis broja

$$\hat{b}_0 = \frac{1}{8}\lfloor 0,2523 \cdot 8 \rfloor = \frac{2}{8} = 0,25$$

$$\hat{b}_1 = 1$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{8}\lfloor 0,9092 \cdot 8 \rfloor = \frac{7}{8} = 0,875$$

$$\hat{b}_3 = \frac{1}{8}\lfloor 0,3879 \cdot 8 \rfloor = \frac{3}{8} = 0,375$$

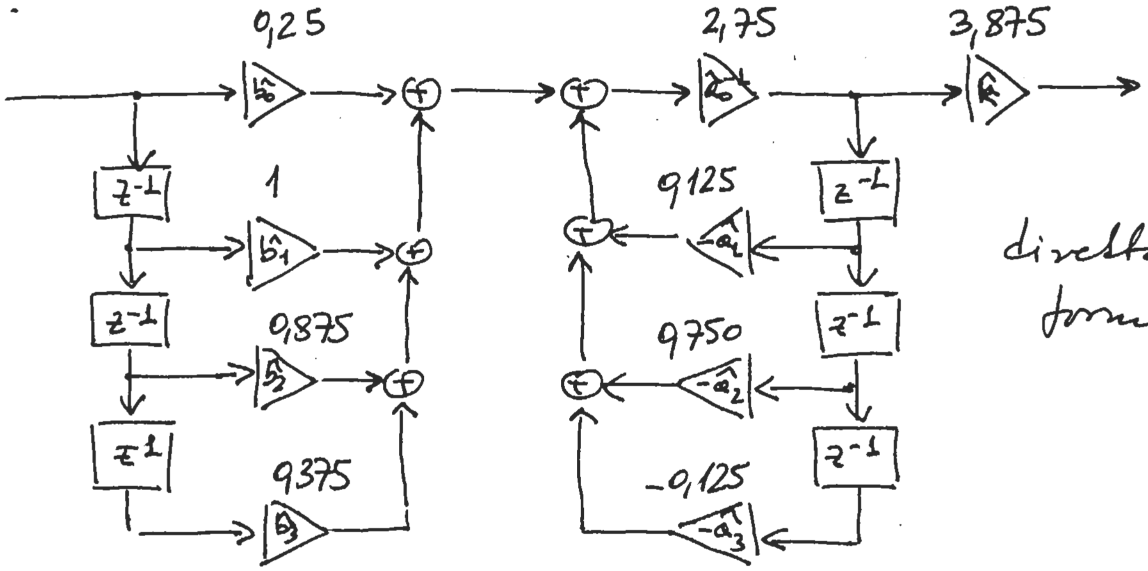
$$\hat{a}_0^{-1} = \frac{1}{8}\lfloor 8/0,35 \rfloor = \frac{22}{8} = 2,75$$

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{8}\lfloor -0,0355 \cdot 8 \rfloor = -\frac{1}{8} = -0,125$$

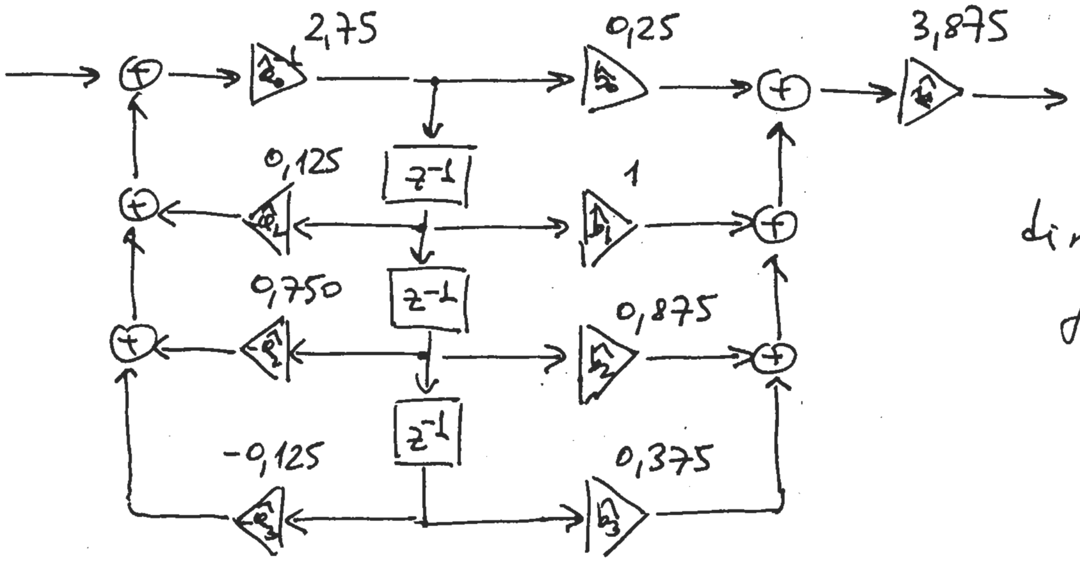
$$\hat{a}_2 = \frac{1}{8}\lfloor -0,71035 \cdot 8 \rfloor = -\frac{6}{8} = -0,750$$

$$\hat{a}_3 = \frac{1}{8}\lfloor 0,161 \cdot 8 \rfloor = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\hat{k} = \frac{1}{8}\lfloor 3,9706 \cdot 8 \rfloor = \frac{31}{8} = 3,875$$



direktna forma I



direktna forma II

④

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad , \quad x[n] \in \mathbb{R}$$

$$X[k] = X^*[N-k]$$

$$X^*[N-k] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(N-k)} \right)^* = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] \left(W_N^{nN} W_N^{-nk} \right)^* =$$

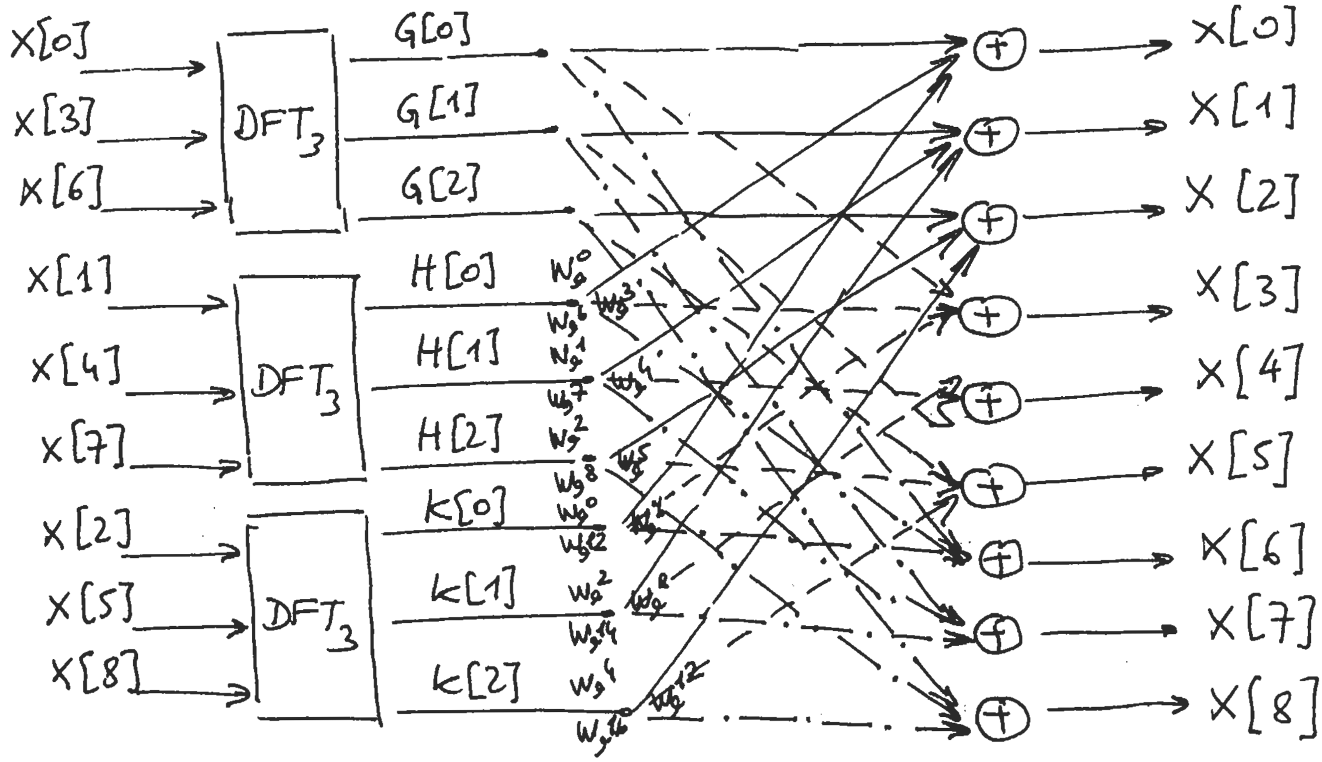
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \underbrace{\cancel{W_N^{-nN}}}_{1} W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = X[k]$$

⑤ $$X[k] = \sum_{n=0}^{9-1} x[n] W_9^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2} x[3n] W_9^{3nk} + \sum_{n=0}^{2} x[3n+1] W_9^{(3n+1)k} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{2} x[3n+2] W_9^{(3n+2)k} = \sum_{n=0}^{2} x[3n] W_3^{nk} +$$

$$+ W_9^{k} \sum_{n=0}^{2} x[3n+1] W_3^{nk} + W_9^{2k} \sum_{n=0}^{2} x[3n+2] W_3^{nk}$$



$$x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$$

$$X[k] = G[\underbrace{k}_{\text{mod } 3}] + W_9^{k} H[\underbrace{k}_{\text{mod } 3}] + W_9^{2k} k[\underbrace{k}_{\text{mod } 3}]$$

$$G[k] = W_3^{2k}, \quad H[k] = W_3^{0k}, \quad k[k] = W_3^{1k}$$

$$X[k] = W_3^{2k \text{ mod } 3} + W_9^{k} + W_9^{2k} W_3^{k \text{ mod } 3}$$