Rješenja zadataka za vježbu iz Digitalne obradbe signala

Akademska školska godina 2005./2006.

Umjesto uvoda

Ova rješenja zadataka za vježbu koji se mogu pronaći na WWW stranicama predmeta Digitalna obradba signala (`http://dos.zesoi.fer.hr/`) napisali su demonstratori:

- Vedran Bobanac
- Nina Brcko
- Tomislav Devčić
- Ivan Dokmanić
- Ivana Fazinić
- Lea Gagulić
- Tomislav Gracin
- Marin Kovačić
- Željka Lučev
- Petar Mostarac
- Tamara Petrović
- Fran Pregernik
- Vedrana Spudić
- Tomislav Vlah

Iako su rješenja pregledana gotovo sigurno u njima ima još dosta sitnijih pogrešaka ali, barem se tako nadamo, gotovo nijedna velika pogreška. Usprkos navedenim nedostatcima nadamo se da će vam ova rješenja dosta pomoći pri pripremi ispita ili kolokvija.

Tomislav Petković

1. Ako je niz $x[n]$ realan niz pokažite da njegova vremenski diskretna Fourierova transformacija definirana s

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

zadovoljava sljedeća svojstva:

a) $\mathrm{Re}[X(\omega)]$ je parna funkcija od ω,

b) $\mathrm{Im}[X(\omega)]$ je neparna funkcija od ω,

c) $|X(\omega)|$ je parna funkcija od ω i

d) $\arg[X(\omega)]$ je neparna funkcija od ω.

Rješenje:

a)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot (\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(\omega n) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(\omega n)$$

$$X(\omega) = \mathrm{Re}[X(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]$$

$$\mathrm{Re}[X(\omega)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(\omega n)$$

$$\mathrm{Re}[X(-\omega)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(-\omega n)$$

Budući da je kosinus parna funkcija vrijedi:

$$\cos(\omega n) = \cos(-\omega n)$$

Iz toga očito slijedi da je $\mathrm{Re}[X(\omega)]$ parna funkcija od ω, tj.

$$\mathrm{Re}[X(\omega)] = \mathrm{Re}[X(-\omega)]$$

b)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot (\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(\omega n) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(\omega n)$$

$$X(\omega) = \mathrm{Re}[X(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]$$

$$\mathrm{Im}[X(\omega)] = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(\omega n)$$

$$\mathrm{Im}[X(-\omega)] = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(-\omega n)$$

Budući da je sinus neparna funkcija vrijedi:
$\sin(\omega n) = -\sin(-\omega n)$

Iz toga očito slijedi da je $\mathrm{Im}[X(\omega)]$ neparna funkcija od ω, tj.
$\mathrm{Im}[X(\omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\omega)]$

c)
$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{\arg[X(\omega)]}$

$$|X(\omega)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(\omega n) - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(\omega n)\right| = \left|\mathrm{Re}[X(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]\right|$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[X(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[X(\omega)]^2}$$

$$|X(-\omega)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j\omega n}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \cos(\omega n) + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \sin(\omega n)\right| = \left|\mathrm{Re}[X(\omega)] - j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]\right|$$

$$|X(-\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[X(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[X(\omega)]^2}$$

Dakle očito je da je $|X(\omega)|$ parna funkcija od ω, tj. da vrijedi:
$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$

d)
$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{\arg[X(\omega)]}$

$$\arg[X(\omega)] = \arg[\mathrm{Re}[X(\omega)] + j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]] = \begin{cases} \arctan(\dfrac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}, \mathrm{Re}[X(\omega)] > 0 \\ \pi + \arctan(\dfrac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}, \mathrm{Re}[X(\omega)] < 0 \end{cases}$$

Budući da je arkustangens neparna funkcija od ω možemo pisati:

$$\arg[X(-\omega)] = \arg[\mathrm{Re}[X(\omega)] - j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]] = \begin{cases} -\arctan(\dfrac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}, \mathrm{Re}[X(\omega)] > 0 \\ -\pi - \arctan(\dfrac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}, \mathrm{Re}[X(\omega)] < 0 \end{cases}$$

Iz ovoga očito slijedi da je $\arg[X(\omega)]$ neparna funkcija od ω, tj. da vrijedi:
$\arg[X(\omega)] = -\arg[X(-\omega)]$

Riješio: Vedran Bobanac

2. Za dane nizove odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku:

a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,

b) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,

c) $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1]$ i

d) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$.

a) vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju računamo po definiciji:

$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

gdje umjesto niza x[n] uvrštavamo niz zadan u zadacima.

$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\omega n} = x[-1]e^{j\omega} + x[0]\, e^{-j\omega 0} + x[1]\, e^{-j\omega} = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} =$$

$$= \cos(\omega) + j\sin(\omega) + 1 + \cos(\omega) - j\sin(\omega) = 1 + 2\cos(\omega)$$

Amplitudnu karakteristiku računamo kao apsolutnu vrijednost dobivene vremenski diskretne Fourierove transformacije a po definiciji to je jednako:

$$|X(e^{j\omega n})| = \sqrt{\mathrm{Re}[\mathrm{X}(\varpi)]^2 + \mathrm{Im}[\mathrm{X}(\varpi)]^2}$$

Za naš signal dobivamo:

$$|X(e^{j\omega n})| = \sqrt{\mathrm{Re}[\mathrm{X}(\varpi)]^2 + \mathrm{Im}[\mathrm{X}(\varpi)]^2} = 1 + 2\cos(\omega)$$

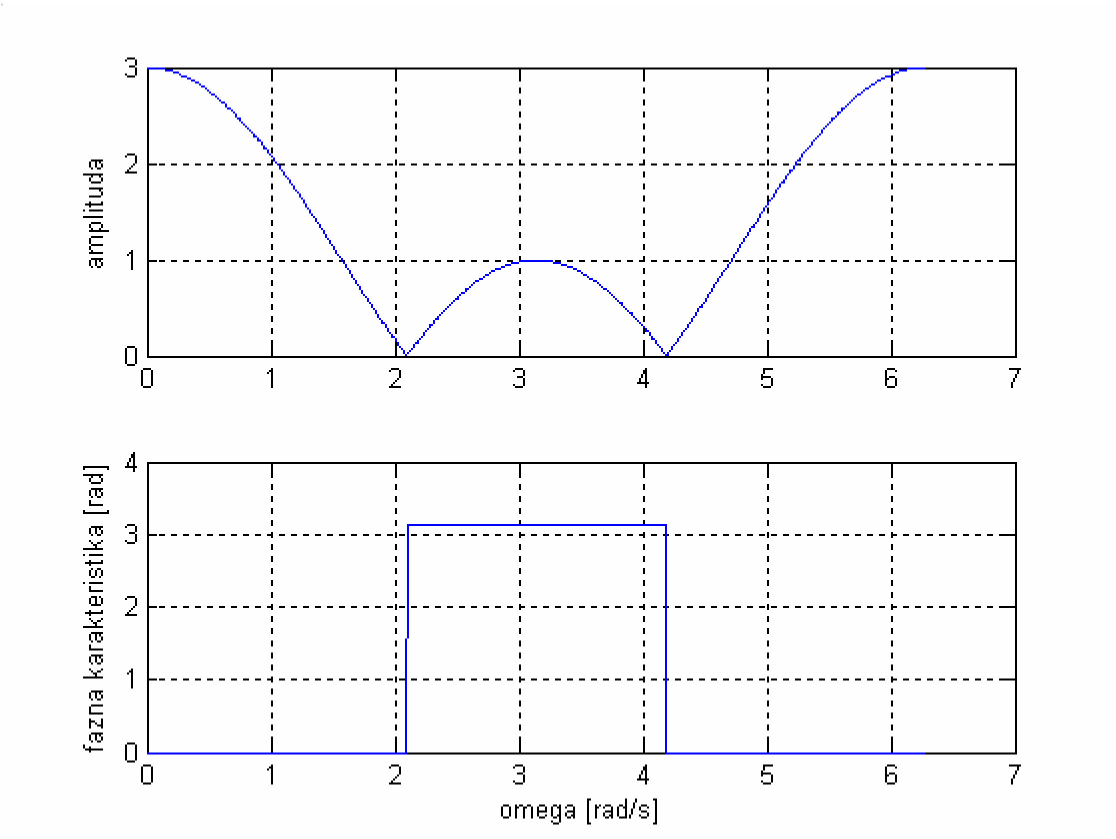
Faznu karakteristiku računamo kao argument kompleksnog broja. Argument kompleksnog broja možemo dobiti kao:

$$\arg[X(e^{j\omega n})] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) \text{ ili } \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) + \pi \,;$$

nakon uvrštavnja imaginearne i realne komponente kompleksnog broja dobivamo:

$$\arg[X(e^{j\omega n})] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) = 0 \text{ ili } \pi$$

amplitudna i fazna karakteristika prikazane su sljedećom slikom. Crtane su u intervalu frekvencija [0,2 π]. Fazna karakteristika dana je u radijanima.



amplitudna i fazna karakteristika

b)

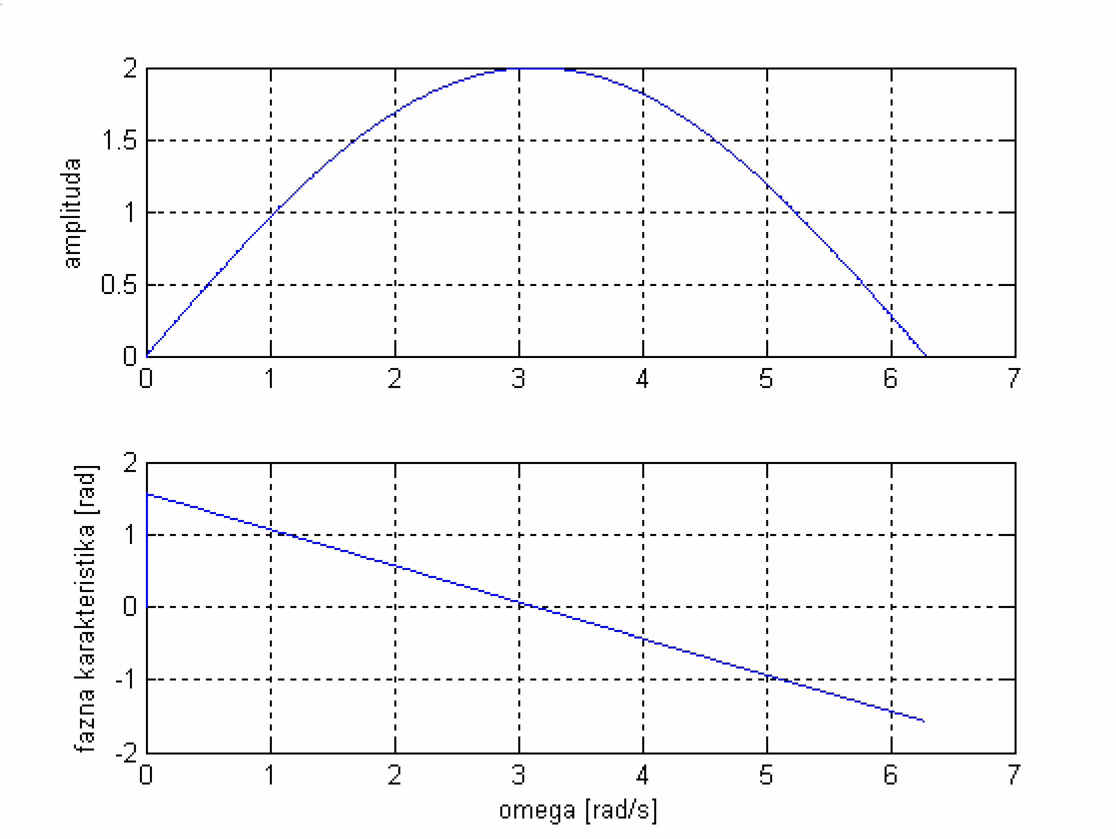
$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\omega n} = x[0]e^{j\omega 0} - x[1]\,e^{-j\omega} = 1 - e^{-j\omega} =$$

$$=1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)$$

$$|X(e^{j\omega n})| = \sqrt{\mathrm{Re}[\,X(\varpi)]^2 + \mathrm{Im}[X(\varpi)]^2} = \sqrt{(1-\cos(\varpi))^2 + \sin(\varpi)^2} = \sqrt{2-2\cos(\varpi)}$$

$$\arg[\,X(e^{j\omega n})] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\varpi)}{1-\cos(\varpi)}\right);$$

amplitudna i fazna karakteristika dane su slijedećom slikom:



amplitudna i fazna karakteristika

c)

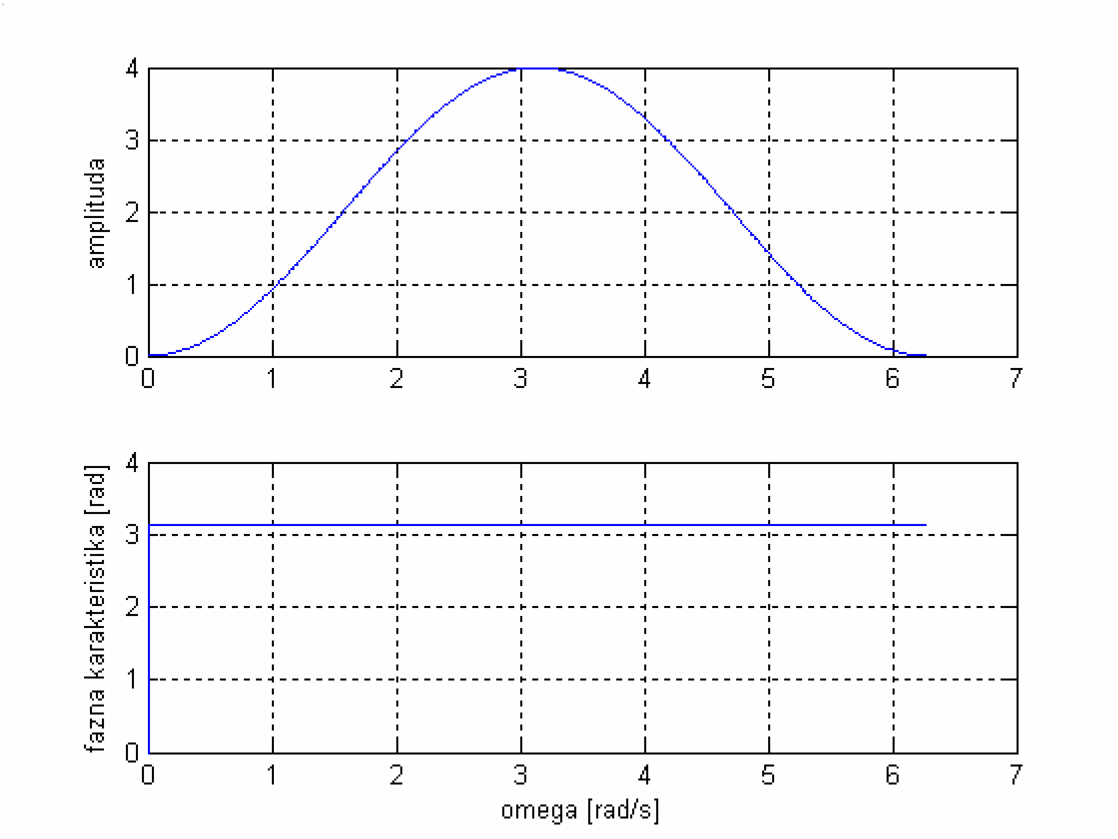
$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\omega n} = e^{j\omega} - 2e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega} = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} =$$

$$= \cos(\omega) + j\sin(\omega) - 2 + \cos(\omega) - j\sin(\omega) = 2\cos(\omega) - 2$$

$$|X(e^{j\omega n})| = \sqrt{\mathrm{Re}[\mathrm{X}(\varpi)]^2 + \mathrm{Im}[\mathrm{X}(\varpi)]^2} = 2\cos(\omega) - 2$$

$$\arg[X(e^{j\omega n})] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) = -\pi\ ;$$

amplitudna i fazna karakteristika dane su slijedećom slikom:



amplitudna i fazna karakteristika

d)

$$X(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 0} + 2e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 4} = 1 + 2e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 4} =$$

$$= 1 + 2\cos(2\omega) - 2j\sin(2\omega) + \cos(4\omega) - j\sin(4\omega) =$$

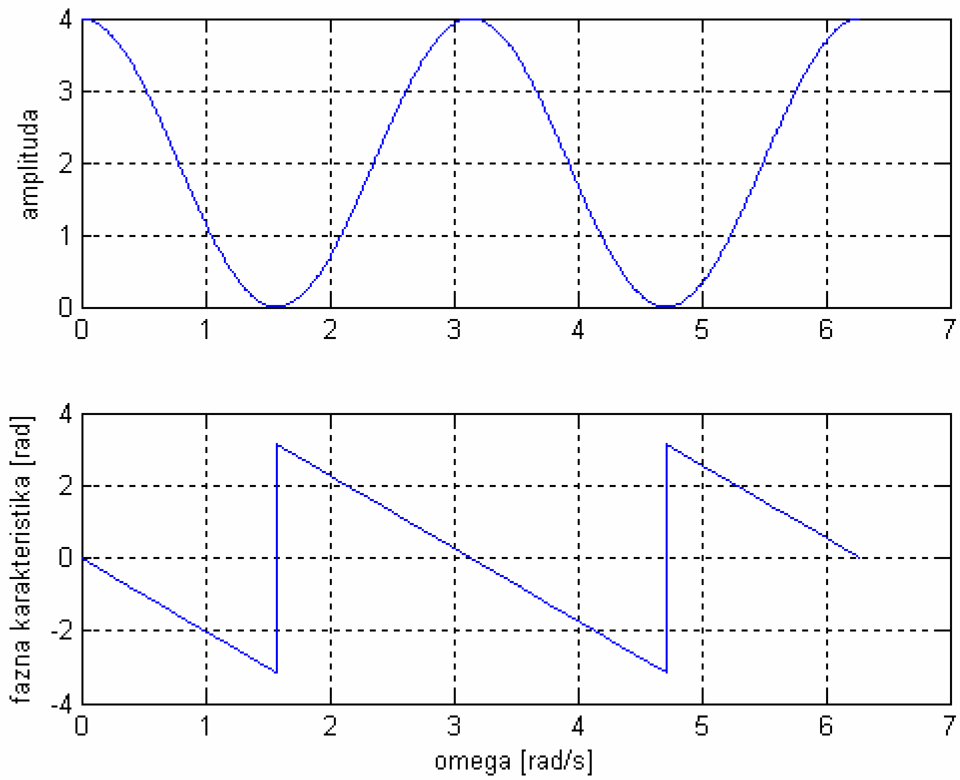
$$= 1 + 2\cos(2\omega) + \cos(4\omega) - j(2\sin(2\omega) + \sin(4\omega))$$

$$|X(e^{j\omega n})| = \sqrt{\mathrm{Re}[\,X(\varpi)]^2 + \mathrm{Im}[X(\varpi)]^2} =$$

$$= \sqrt{(1 + 2\cos(2\varpi) + \cos(4\varpi))^2 + (2\sin(2\varpi) + \sin(4\varpi))^2}$$

$$\arg[X(e^{j\omega n})] = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\varpi)]}{\mathrm{Re}[X(\varpi)]}\right) = -\arctan\left(\frac{2\sin(2\varpi) + \sin(4\varpi)}{1 + 2\cos(2\varpi) + \cos(4\varpi)}\right) \;;$$

amplitudna i fazna karakteristika dane su slijedećom slikom:



amplitudna i fazna karakteristika

Tomislav Vlah

3. Pokažite da diskretni kauzalni sustav s impulsnim odzivom u kojemu je barem jedan uzorak različit od nule ne može imati faznu karakteristiku jednaku nuli, odnosno pokažite da vremenski diskretna Fourierova transformacija takvog impulsnog odziva ne može imati fazu jednaku nuli.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija dana je izrazom :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](\cos\omega n - j\sin\omega n)$$

Fazna se karakteristika dobije kao :

$$\arg\left(X(e^{j\omega})\right) = arctg\frac{\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\}}{\mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\}}$$

Faza DTFT-a je različita od nule ukoliko je imaginarni dio ove sume različit od nule, tj.

$$\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = -\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\sin\omega n \neq 0$$

Ova tvrdnja je očito točna jer funkcije $\sin(n\omega)$; $n = 1, 2, \ldots$ čine ortogonalni skup. Linearna kombinacija ortogonalnih funkcija može biti jednaka nuli ako i samo ako su svi koeficijenti uz njih jednaki nuli. Budući da je barem jedan uzorak zadanog diskretnog niza različit od nule proizlazi i da je faza različita od nule.

Ivana Fazinić

4. Za signal x[n] = -δ[n+2] + 2δ[n+1] - 3δ[n] + 2δ[n-1] - δ[n-2] odredite vrijednosti sljedećih izraza bez računanja vremenski diskretne Fourierove transformacije X(ω):

a) X(0)

b) arg [X(ω)]

c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$

d) X(π)

e) $\int_{-\pi}^{\pi} | X(\omega) |^2 \, d\omega$

RJEŠENJE:

a) Traženi izraz X(0) zapravo je DC komponenta zadanog signala i kao takva odgovara srednjoj vrijednosti signala. Dovoljno je zbrojiti uzorke signala.

X(0) = -1 + 2 – 3 + 2 – 1 = -1

b) Zadani signal je simetričan oko ishodišta. Zato je arg [X(ω)] = 0.

c) Traženi izraz lagano se može izračunati pomoću definicije za inverznu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega n}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega 0} d\omega$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega = 2 \cdot \pi \cdot x(0) = 2 \cdot \pi \cdot (-3) = -6\pi$$

d) $X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-jn\pi} = \sum_{n} (\cos(\pi \cdot n) - j \cdot \sin(\pi \cdot n)) \cdot x(n)$

Poznato nam je da je n prirodan broj. Zato će sinus bit jednak nuli, dok će kosinus alternirati.

$$X(\pi) = \sum_{n} (-1)^n \cdot x(n) = -1 - 2 - 3 - 2 - 1 = -9$$

e) Traženi izraz jest energija zadanog signala. Lagano se može izračunati pomoću Parsevalove jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega = 2 \cdot \pi \cdot \sum_{n} |x(n)|^2 = 2 \cdot \pi \cdot (1 + 4 + 9 + 4 + 1) = 38\pi$$

Riješila: Nina Brcko

5*. Autokorelacijski niz diskretnog kompleksnog signala x [n] je

$$Rxx[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]x[n+m].$$

Pokažite da je vremenski diskretna Fourierova transformacija autokorelacijskog niza R_{xx} [m] upravo $|X(\omega)|^2$.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija $R_{xx}(\omega)$ autokorelacijskog niza R_{xx} [m] je:

$$R_{XX}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{XX}[m]\cdot e^{-j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]x[n+m]\right)\cdot e^{-j\omega m}$$

Nakon zamjene redoslijeda sumacije dobivamo:

$$R_{XX}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]\, e^{-j\omega m} =$$

$$= \begin{vmatrix} l = n+m \\ m = l-n \\ m \mapsto \infty \Rightarrow l \mapsto \infty \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, e^{-j\omega(l-n)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, e^{j\omega n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, e^{-j\omega l} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]e^{-j\omega n})^* \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]\, e^{-j\omega l} =$$

$$= X^*(\omega)\cdot X(\omega) =$$

$$= |X(\omega)|^2$$

Tamara Petrović

ZADATAK 6.

Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudne i fazne spektre sljedećih signala:

a) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1\}$,
b) $x[n] = \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 1\}$,
c) $x[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -2\}$,
d) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, -1\}$,
e) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0, 0, -1\}$

RJEŠENJE:

Svi signali za koje treba proračunati amplitudni i fazni spektar su diskretni periodični signali pa znamo da će njihovi spektri biti također diskretni i periodični. Za proračunavanje njihova spektra koristimo diskretnu Fourierovu transformaciju koja je dana izrazom:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2k\pi\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk}$$

a) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1\}$

$$\begin{aligned}X[0] &= x[0]e^{-j2\cdot 0\pi 0/8} + x[1]\, e^{-j2\cdot 0\pi 1/8} + x[2]\, e^{-j2\cdot 0\pi 2/8} + x[3]\, e^{-j2\cdot 0\pi 3/8} \\ &\quad + x[4]\, e^{-j2\cdot 0\pi 4/8} + x[5]\, e^{-j2\cdot 0\pi 5/8} + x[6]\, e^{-j2\cdot 0\pi 6/8} + x[7]\, e^{-j2\cdot 0\pi 7/8} = \\ &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] + x[4] + x[5] + x[6] + x[7] + x[8] = \\ &= 1 + 0 + 2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X[1] &= x[0]e^{-j2\cdot 1\pi 0/8} + x[1]\, e^{-j2\cdot 1\pi 1/8} + x[2]\, e^{-j2\cdot 1\pi 2/8} + x[3]\, e^{-j2\cdot 1\pi 3/8} + x[4]\, e^{-j2\cdot 1\pi 4/8} + \\ &\quad + x[5]\, e^{-j2\cdot 1\pi 5/8} + x[6]\, e^{-j2\cdot 1\pi 6/8} + x[7]\, e^{-j2\cdot 1\pi 7/8} + x[8]\, e^{-j2\cdot 10\pi 8/8} = \\ &= 1\cos(0) + 0\cos(2\pi 1/8) + 2\cos(2\pi 2/8) + 1\cos(2\pi 3/8) + 1\cos(2\pi 4/8) + 0\cos(2\pi 5/8) + \\ &\quad + 1\cos(2\pi 6/8) + 1\cos(2\pi 7/8) - i[1\sin(0) + 0\sin(2\pi 1/8) + 2\sin(2\pi 2/8) + 1\sin(2\pi 3/8) + \\ &\quad + 1\sin(2\pi 4/8) + 0\sin(2\pi 5/8) + 1\sin(2\pi 6/8) + 1\sin(2\pi 7/8)] = \\ &= (1 + 0 + 0 - 0.707 - 1 + 0 + 0 + 0.707) - i(0 + 0 + 2 + 0.707 + 0 + 0 - 1 - 0.707) = 0 - 1i\end{aligned}$$

Na identičan način se sada proračunaju svi ostali $X[k]$ i dobijemo sljedeće rezultate:

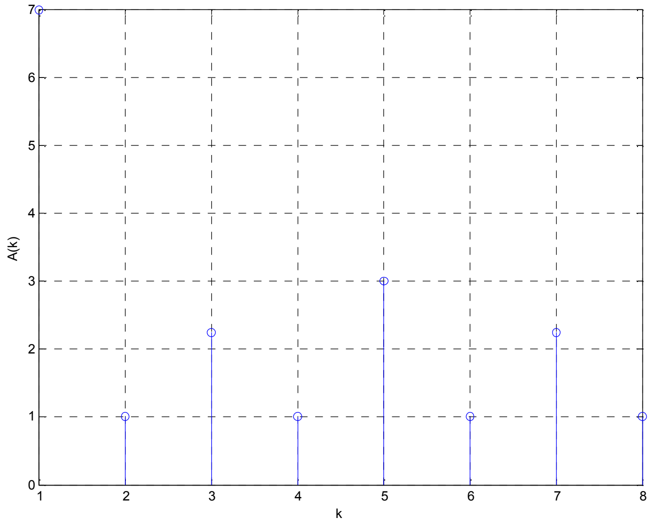
$X[2] = -1 + 2i$
$X[3] = 0 + 1i$
$X[4] = 3$
$X[5] = 0 - 1i$
$X[6] = -1 - 2i$
$X[7] = 0 + 1i$

Amplitudni dio spektra proračunavamo za svaku komponentu posebno kao
$$A(k) = \sqrt{\mathrm{Re}[X(k)]^2 + \mathrm{Im}[X(k)]^2}\ .$$
Fazni dio spektra računamo kao $\varphi(k) = \left(arctg \dfrac{\mathrm{Im}[X(k)]}{\mathrm{Re}[X(k)]} \right) \cdot \dfrac{\pi}{180}$.

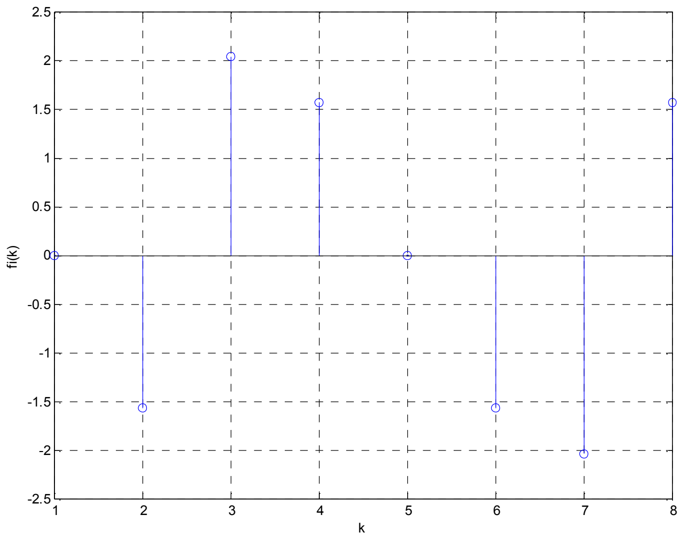
Uvažavajući gore navedene formule dobijemo:

A= {7, 1, 2.2361, 1, 3, 1, 2.2361, 1}

φ = { 0, –1.5708, 2.0344, 1.5708, 0, –1.5708, –2.0344, 1.5708}
Grafički prikaz dobivenih rezultata prikazan je na slikama 1.1. i 1.2.



Slika 1.1. Amplitudni spektar signala pod a)

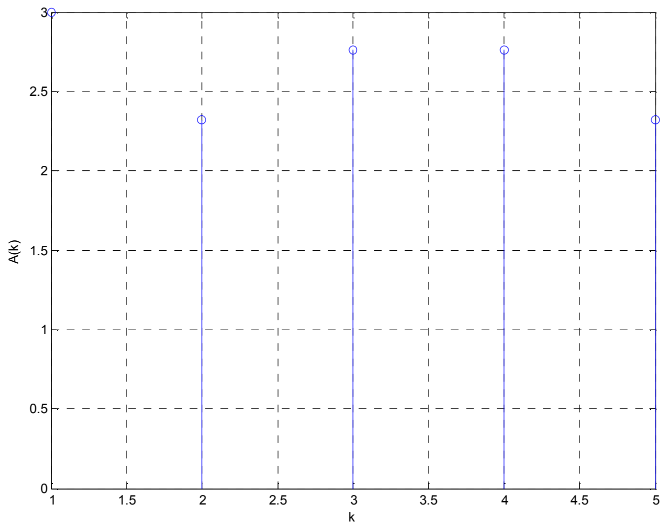


Slika 1.2. Fazni spektar signala pod a)

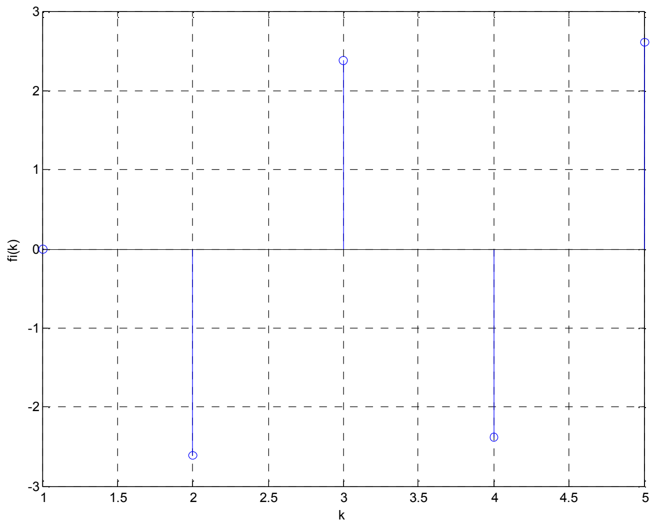
b) $x[n] = \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 1\}$

$X[0] = 3$
$X[1] = -2 - 1.1756i$
$X[2] = -2 + 1.9021i$
$X[3] = -2 - 1.9021i$
$X[4] = -2 + 1.1756i$

A = {3.0000, 2.3199, 2.7601, 2.7601, 2.3199}
φ = {0, –2.6102, 2.3813, –2.3813, 2.6102}



Slika 1.3. Amplitudni spektar signala pod b)

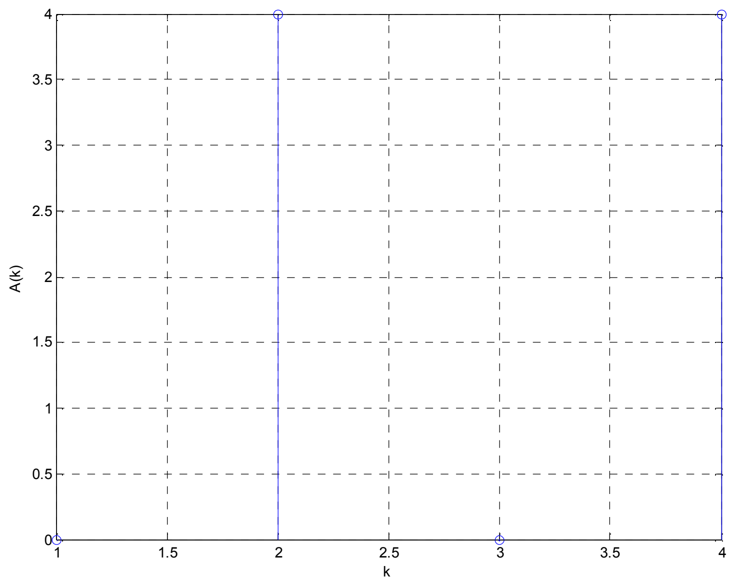


Slika 1.4. Fazni spektar signala pod b)

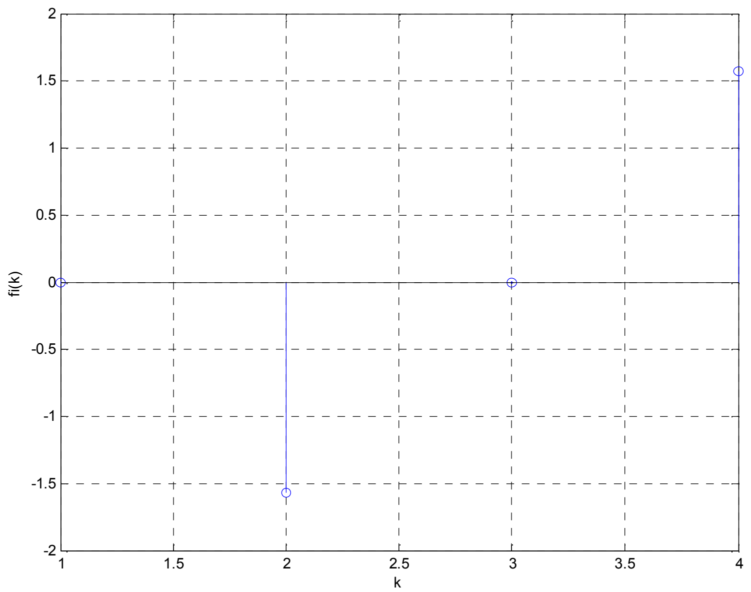
c) $x[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -2\}$

$X[0] = 0$
$X[1] = 0 - 4i$
$X[2] = 0$
$X[3] = 0 + 4i$

$A = \{0, 4, 0, 4\}$
$\varphi = \{0, -1.5708, 0, 1.5708\}$



Slika 1.5. Amplitudni spektar signala pod c)

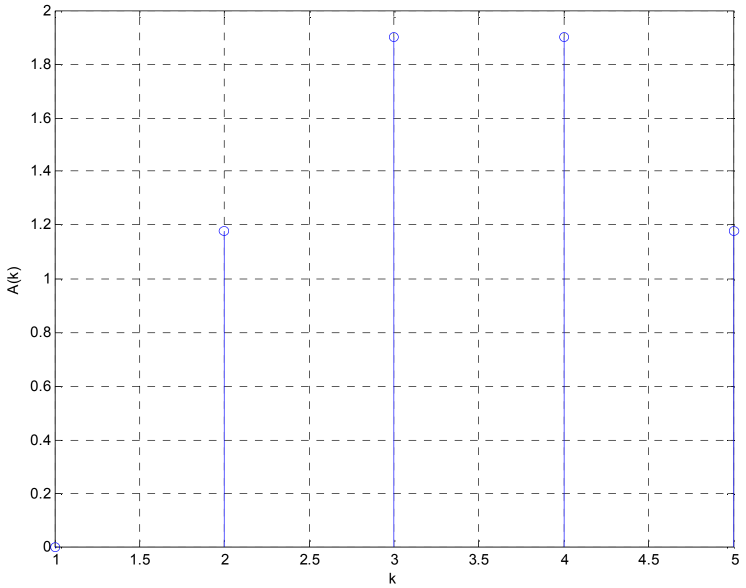


Slika 1.6. Fazni spektar signala pod c)

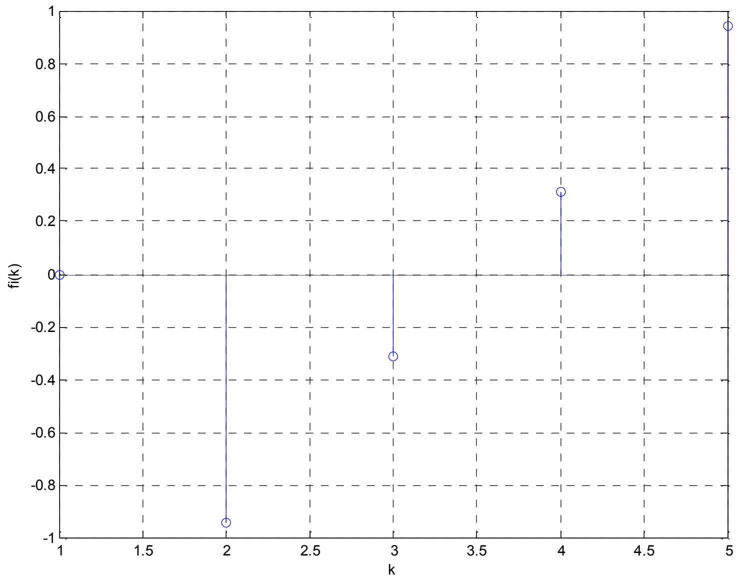
d) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, -1\}$

$X[0] = 0$
$X[1] = 0.6910 - 0.9511i$
$X[2] = 1.8090 - 0.5878i$
$X[3] = 1.8090 + 0.5878i$
$X[4] = 0.6910 + 0.9511i$

A = {0, 1.1756, 1.9021, 1.9021, 1.1756}
φ = {0, –0.9425, –0.3142, 0.3142, 0.9425}



Slika 1.7. Amplitudni spektar signala pod d)

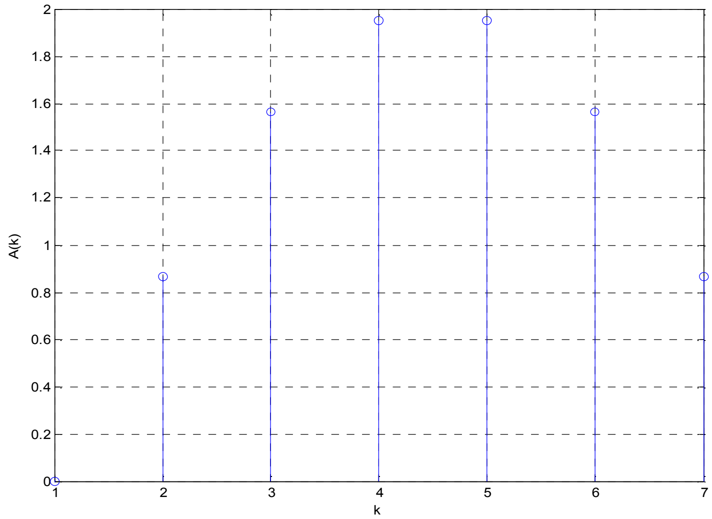


Slika 1.8. Fazni spektar signala pod d)

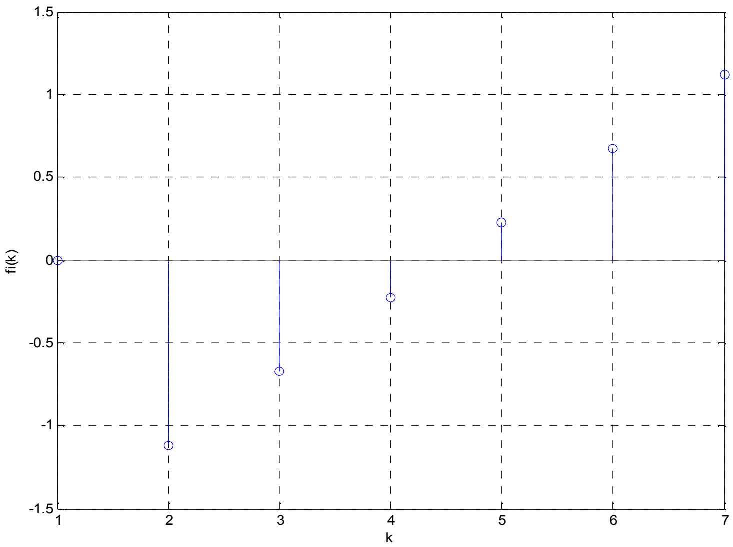
e) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, -1\}$

$X[0] = 0$
$X[1] = 0.3765 - 0.7818i$
$X[2] = 1.2225 - 0.9749i$
$X[3] = 1.9010 - 0.4339i$
$X[4] = 1.9010 + 0.4339i$
$X[5] = 1.2225 + 0.9749i$
$X[6] = 0.3765 + 0.7818i$

A = {0, 0.8678, 1.5637, 1.9499, 1.9499, 1.5637, 0.8678}
φ = {0, –1.1220, –0.6732, –0.2244, 0.2244, 0.6732, 1.1220}



Slika 1.9. Amplitudni spektar signala pod e)



Slika 1.10. Fazni spektar signala pod e)

Marin Kovačić
0036396561
Automatika

7. Odredite i skicirajte inverznu Fourierovu transformaciju spektara:

a) $X[k]=\{\underline{2},1,0,1\}$ i

b) $X[k]=\{\underline{2},0,2,0,2,0\}$.

Rješenje:

Inverzna diskretna Fourierova transformacija:

$$x[n]=\frac{1}{N}\int_{k=0}^{N-1} X[k]e^{2\pi jk\frac{n}{N}} \quad , \quad 0\le n\le N-1$$

a) $X[k]=\{\underline{2},1,0,1\}$

$x[n]=?$

Po definicijskoj formuli računamo opći izraz za uzorke signala:

$$x[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]e^{2\pi jk\frac{n}{4}}=\frac{1}{4}\left(2e^{0}+e^{j\pi\frac{n}{2}}+e^{j\pi\frac{3n}{2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j\pi\frac{n}{2}}+\frac{1}{4}e^{j\pi\frac{3n}{2}}$$

$0\le n\le 3$

Zatim računamo vrijednosti za svaki uzorak signala zasebno:

$$x[0]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

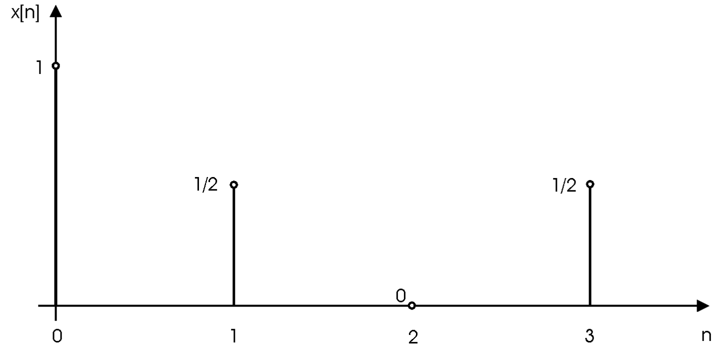
$$x[1]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}j-\frac{1}{4}j=\frac{1}{2}$$

$$x[2]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$x[3]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}j-\frac{1}{4}j=\frac{1}{2}$$

Traženi signal je:

$$x[n]=\left\{\underline{1},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$$



b) $X[k] = \{\underline{2},0,2,0,2,0\}$

$x[n] = ?$

Opći izraz za uzorke signala dobijemo iz definicijske formule:

$$x[n] = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X[k] e^{2\pi jk\frac{n}{6}} = \frac{1}{6}\left(2e^{0} + 2e^{j\pi\frac{4n}{6}} + 2e^{j\pi\frac{8n}{6}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{j\pi\frac{2n}{3}} + \frac{1}{3}e^{j\pi\frac{4n}{3}}$$

$0 \le n \le 5$

Za svaki uzorak signala zasebno računamo vrijednost:

$$x[0] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$x[2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

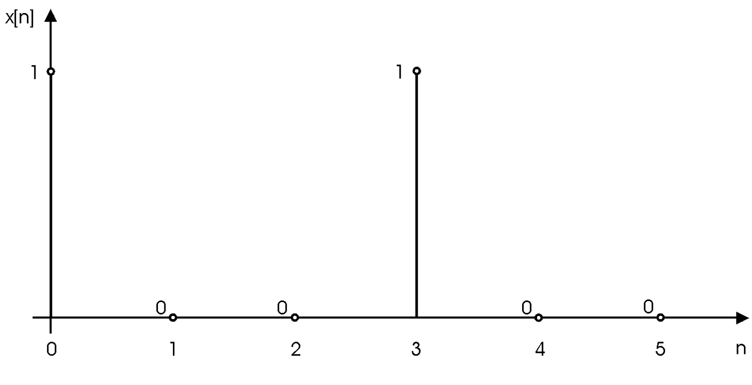
$$x[3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$x[4] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$x[5] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Rezultirajući signal je:

$x[n] = \{\underline{1},0,0,1,0,0\}$



8. Ako je X[n] realan niz duljine N pokažite da njegova diskretna Fourierova transformacija

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}$$

zadovoljava relaciju

$$X[k]=X^*[N-k].$$

Rješenje:

Diskretna Foureierova transformacija: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$

$$X^*[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X^*[N-k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi(N-k)n/N}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{j2\pi n}e^{-j2\pi kn/N}$$

$e^{j2\pi n}=1$ za $n=0,\pm1,\pm2,...$

$$X^*[N-k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}=X[k]$$ …dakle točno je.

Rješenje 2 (pogled iz drugog kuta):

Inverzna diskretna Fourierova transformacija: $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{j2\pi kn/N}$

Ako vrijedi $X[k]=X^*[N-k]$, te ako vrijedi $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{j2\pi kn/N}$

Tada slijedi:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x*[N-k]e^{j2\pi kn/N}=\left\langle x*[N-K]=\sum_{k=0}^{N-1}x[n]e^{j2\pi(N-k)n/N}\right\rangle$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\underbrace{e^{j2\pi n}}_{1}e^{-j2\pi kn/N}}_{x[k]}e^{j2\pi kn/N}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{j2\pi kn/N}=x[n]$$

I naravno, tvrdnja je ponovo dokazana…

Tomislav Devčić

9.

Neka je $x[n]$ paran niz duljine N, $N=2\ell+1$, $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Njegova Fourierova transformacija je dana sa

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\ell}^{\ell} x[n] e^{-2\pi j k n/N}$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=-\ell}^{-1} x[n] e^{-2\pi j k n/N} + x[0] + \sum_{n=1}^{\ell} x[n] e^{-2\pi j k n/N} \right\}$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=-\ell}^{-1} x[n]\left[\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right)\right] + x[0] + \sum_{n=1}^{\ell} x[n]\left[\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=1}^{\ell} x[n]\left[\cos\frac{2\pi k n}{N} + j\sin\frac{2\pi k n}{N}\right] + x[0] + \sum_{n=1}^{\ell} x[n]\left[\cos\frac{2\pi k n}{N} - j\sin\frac{2\pi k n}{N}\right] \right\}$$

(izvršena zamjena $n \to -n$ u prvoj sumi, te iskorištena parnost niza, parnost kosinusa i neparnost sinusa)

$$= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=1}^{\ell} x[n]\left[\cos\frac{2\pi k n}{N} + \cancel{j\sin\frac{2\pi k n}{N}} + \cos\frac{2\pi k n}{N} - \cancel{j\sin\frac{2\pi k n}{N}}\right] + x[0] \right\}$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ x[0] + 2\sum_{n=1}^{\ell} x[n] \cos\frac{2\pi k n}{N} \right\} \in \mathbb{R} \; !$$

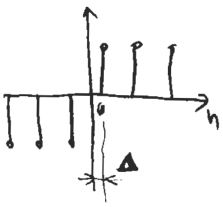
Ivan Dokmanić

U izvodu je uzet izraz $\sum_{n=-\ell}^{\ell} x[n] W_{2\ell+1}^{nk}$. Proširenjem po periodičnosti možemo dobiti isti rezultat i za izraz $\sum_{m=0}^{2\ell} x[m] W_{2\ell+1}^{mk}$ (uvodite supstituciju $m = n-\ell$ te iskoristite periodičnost eksponencijale $W_{2\ell+1}$). TP.

(10) R

$$X[k] = \sum_{n=-\underbrace{\frac{N+1}{2}}_{\check{s}}}^{\frac{N+1}{2}} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=-\check{s}}^{-1} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} + \sum_{n=1}^{\check{s}} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} +$$

x[∅] je ∅ ili ga uopće nema, a tada nismo počeli otipkovati a ∅ tj.



$$+ \underbrace{\cancel{x[0]}}_{0} = \left| \begin{array}{c} \text{neparan} \\ x[-\check{s}] = -x[\check{s}] \\ \vdots \\ x[-1] = -x[1] \\ \varphi(-n) = \text{PRILOG C} \end{array} \right| = -\sum_{n=\check{s}}^{1} x[n]\, e^{-j2\pi(-n)k/N} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\check{s}} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} = \left| \begin{array}{c} \text{Al' Jabra} \\ a+b+c = \\ = c+b+a \end{array} \right| = -\sum_{n=1}^{\check{s}} x[n]\, e^{+j2\pi nk/N} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\check{s}} x[n]\, e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=1}^{\check{s}} x[n] \left[\cancel{-\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)} - j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\check{s}} x[n] \left[\cancel{\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)} - j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right] =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\check{s}} x[n]\, j\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = X[k]$$

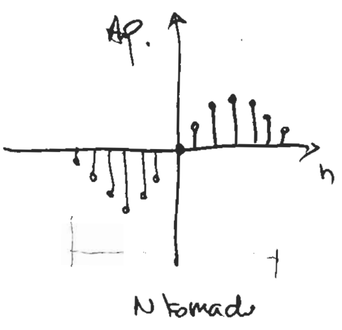
$$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \emptyset$$

$$\mathrm{Im}\{X[k]\} \neq \emptyset$$

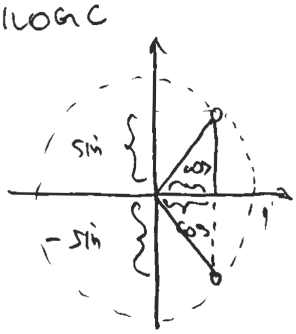
Q.E.D.

→ Pretpostavljam da je N neparan broj

vizualiziram



PRILOG C



↑ $n > 0$

↓ $n < 0$

kosinus - paran

sinus - neparan

Zadatak je bla-bla više nego što je tj. on je pedagoške naravi... bla-bla!

11. Kontinuirani signal čiste frekvencije $f = 13\ kHz$ otipkavamo sa različitim frekvencijama otpikavanja

$$f_{s1} = 14\ kHz,\ f_{s2} = 27\ kHz,\ f_{s3} = 20\ kHz$$

Za koje od tih frekvencija otipkavanja ne možemo rekonstruirati izvorni kontinuirani signal?

RJEŠENJE

Ulazni signal glasi:

$$x(t) = \cos(2\pi ft)$$

a) $f_{s1} = 14\ kHz$

Sa ovom frekvencijom možemo otipkavati sve frekvencije bez aliasinga do $\frac{f_{s1}}{2} = 7\ kHz$.
Signal iz zadatka ima frekvenciju koja je veća od maksimalne, te bi došlo do pojave aliasinga.

Otipkani signal bi glasio:

$$x[n] = x(nT_{s1}) = \cos(2\pi fT_{s1}n) = \cos(1.875\pi n) \qquad T_{s1} = \frac{1}{f_{s1}}$$

b) $f_{s2} = 27\ kHz$

Sa ovom frekvencijom možemo otipkavati sve frekvencije bez aliasinga do $\frac{f_{s2}}{2} = 13.5\ kHz$.
Frakvencija signala je manja od maksimalne frekvencije otipkavanja pa ne dolazi do aliasinga.

$$x[n] = x(nT_{s2}) = \cos(2\pi fT_{s2}n) = \cos(0.96296\pi n) \qquad T_{s2} = \frac{1}{f_{s2}}$$

c) $f_{s3} = 20\ kHz$

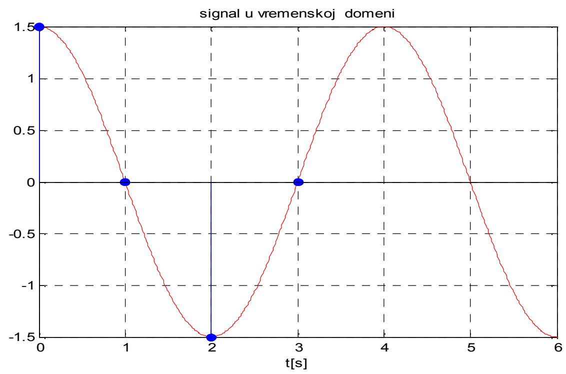
Sa ovom frekvencijom možemo otipkavati sve frekvencije bez aliasinga do $\frac{f_{s3}}{2} = 10\ kHz$.
Ovdje je također frekvencija signala veća od maksimalne frekvencije pa dolazi do aliasinga.

$$x[n] = x(nT_{s3}) = \cos(2\pi fT_{s3}n) = \cos(1.3\pi n) \qquad T_{s3} = \frac{1}{f_{s3}}$$

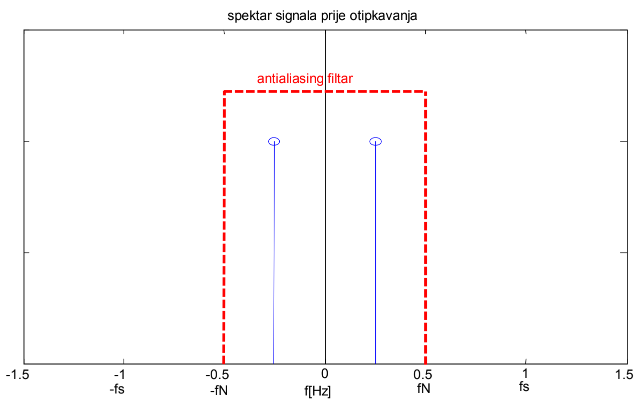
Fran Pregernik

Zadatak 12

Signal x(t)=1.5 cos(0.5π t) otipkali smo u četiri točke uz frekvenciju otipkavanja f_s=1Hz s početkom u t=0s. Da li je prilikom otipkavanja došlo do preklapanja spektra?



Spektar signala x(t) = 1.5cos(0.5πt) ima komponente na frekvencijama –0.25 Hz i 0.25 Hz. Prilikom otipkavanja Nyquistov kriterij mora biti zadovoljen, odnosno najveća frekvencija signala mora biti manja od polovine frekvencije otipkavanja. Dobivamo sljedeći prikaz u frekvencijskom području:



Kao što se vidi iz slike na izlazu anti-aliasing filtra dobivamo spektar originalnog signala jer je Nyquistov kriterij zadovoljen, dakle ne dolazi do preklapanja spektra.

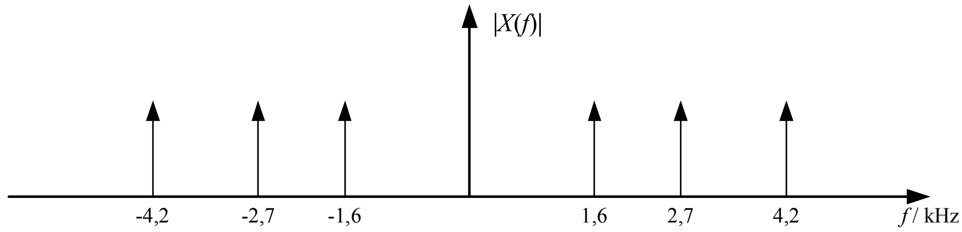
Vedrana Spudić

13. Kojom je frekvencijom otipkavanja potrebno otipkati zadane signale a da pri tome ne dode do preklapanja spektra?

a) $x(t) = \sin(5400\pi t) + \sin(3200\pi t) + \sin(8400\pi t)$
b) $x(t) = \cos(244\pi t) + \cos(200\pi t)$
c) $x(t) = \cos(242\pi t) + 2\sin(586\pi t)$

RJEŠENJE (Riješio Tomislav Gracin):

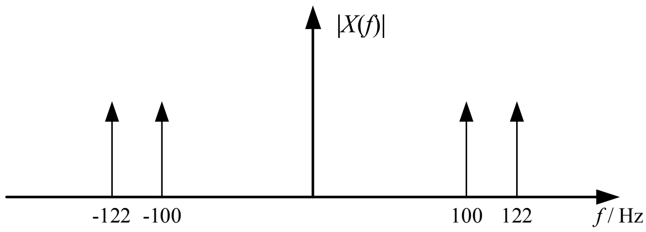
a) $\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t) \qquad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi}$



$$\left(\frac{f_s}{2}\right)_{\min} = \max\left[1{,}6\text{kHz} \quad 2{,}7\text{kHz} \quad 4{,}2\text{kHz}\right]$$

$$f_{s\min} = 8{,}4\text{kHz}$$

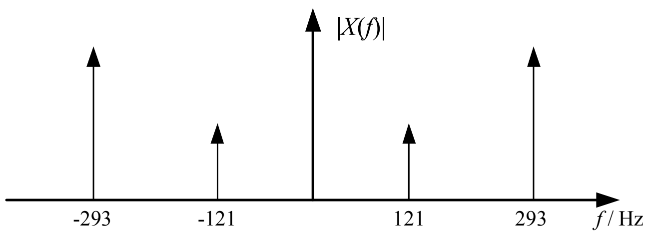
b)



$$\left(\frac{f_s}{2}\right)_{\min} = \max\left[122\text{Hz} \quad 100\text{Hz}\right]$$

$$f_{s\min} = 244\text{Hz}$$

c)



$$\left(\frac{f_s}{2}\right)_{\min} = \max\left[121\text{Hz} \quad 293\text{Hz}\right]$$

$$f_{s\min} = 586\text{Hz}$$

14.* Kontinuirani signal

$$x(t) = \cos(4000\pi t) + \sin(6000\pi t)$$

otipkavamo s periodom otipkavanja T_s. Nakon otipkavanja signal rekonstruiramo korištenjem idealnog interpolatora.

a) Koja je donja granica frekvencije otipkavanja tako da ne dođe do preklapanja spektra?

b) Kako izgleda vremenski diskretna Fourierova transformacija otipkanog signala ako zadani kontinuirani signal uzorkujemo upravo s graničnom frekvencijom? Da li nam to predstavlja problem za zadani signal?

c) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0001$ s. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

d) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0002$ s. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

e) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0005$ s. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

RJEŠENJE:

a) Zadani kontinuirani signal $x(t)$ možemo promatrati kao linearnu kombinaciju dva međusobno neovisna signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$, gdje su:

$$x_1(t) = \cos(4000\pi t),\ f_1 = \frac{4000\pi}{2\pi} = 2000\,\text{Hz};$$

$$x_2(t) = \sin(6000\pi t),\ f_2 = \frac{6000\pi}{2\pi} = 3000\,\text{Hz}.$$

Njegov spektar je oblika:

$$X(\omega) = \pi(\delta(\omega - 4000\pi) + \delta(\omega + 4000\pi)) - j\pi(\delta(\omega - 6000\pi) - \delta(\omega + 6000\pi))$$

Prema teoremu otipkavanja minimalna frekvencija otipkavanja mora biti dvostruko veća od najveće frekvencije u spektru signala. Zato je:

$$f_{s,min} = 2f_2 = 6000\,\text{Hz}.$$

b) Ako zadani kontinuirani signal uzorkujemo upravo s graničnom frekvencijom kod komponente $x_1(t) = \cos(4000\pi t)$ neće doći do aliasinga. Međutim, budući da je frekvencija sinusne komponente točno dvostruko manja od frekvencije otipkavanja, kod otipkanog signala ta se komponenta gubi i na izlazu idealnog interpolatora dobivamo signal čiji je spektar

$$Y(\omega) = \pi(\delta(\omega - 4000\pi) + \delta(\omega + 4000\pi)).$$

c) Otipkavanjem kontinuiranog signala $x(t)$ čiji je spektar $X(\omega)$ dobije se diskretni signal $x_d[n]$ čiji je spektar $X_d(\omega)$ diskretan i periodičan. Pri tome vrijedi:

$$X_d(\lambda) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega + n\omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\lambda + 2\pi n}{T}\right).$$

Uz $T = 0{,}0001\,\text{s}$ ne dolazi do aliasinga i na periodu [-π, π] spektar glasi:

$$X_d(\lambda) = \pi(\delta(\lambda - 0{,}4\pi) + \delta(\lambda + 0{,}4\pi)) - j\pi(\delta(\lambda - 0{,}6\pi) - \delta(\lambda + 0{,}6\pi)).$$

Za signal na izlazu nakon propuštanja kroz idealni interpolator vrijedi:

$$Y(\omega) = \pi(\delta(\omega - 4000\pi) + \delta(\omega + 4000\pi)) - j\pi(\delta(\omega - 6000\pi) - \delta(\omega + 6000\pi)),$$

$$y(t) = \cos(4000\pi t) + \sin(6000\pi t).$$

d) Period $T = 0{,}0002\,\text{s}$ je veći od maksimalnog perioda uzorkovanja sinusne komponente signala ($6000\pi T = 1{,}2\pi > \pi$), te kod sinusne komponente signala dolazi do aliasinga:

$$\begin{aligned} X_d(\lambda) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\lambda + 2\pi n}{T}\right) \\ &= \pi(\delta(\lambda - 0{,}8\pi) + \delta(\lambda + 0{,}8\pi)) - j\pi(\delta(\lambda + 0{,}8\pi) - \delta(\lambda - 0{,}8\pi)) \quad \text{na } [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Izlazni signal je:

$$Y(\omega) = \pi(\delta(\omega - 4000\pi) + \delta(\omega + 4000\pi)) - j\pi(\delta(\omega + 4000\pi) - \delta(\omega - 4000\pi))$$
$$y(t) = \cos(4000\pi t) - \sin(4000\pi t)$$

e) Uz period otipkavanja $T = 0{,}0005$ s dolazi kod aliasinga kod obje komponente signala ($4000\pi T = 2\pi > \pi$, $6000\pi T = 3\pi > \pi$). Kao i pod b), delta funkcija sinusne komponente se gubi, a delta funkcija kosinusne komponente se ponavlja svakih $\omega = 2\pi k$, gdje je k cijeli broj:

$$X\ (\lambda) = 2\pi\delta(\lambda) \quad \text{na } [-\pi, \pi]$$
$$Y(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$
$$y(t) = 1$$

Riješila Željka Lučev

15. Kontinuirani signal $x(t)$ ima spektar $X(\omega)$ zadan slikom. Uzorkujemo signal s periodom otipkavanja T_s te dobivamo niz $x_n = x(nT_s)$. Skicirajte izgled spektra otipkanog signala ako je period otipkavanja:

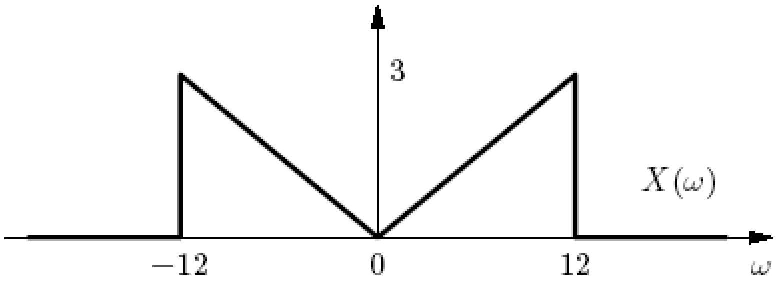
a) $T_s = \pi/3$

b) $T_s = \pi/6$

c) $T_s = \pi/9$

d) $T_s = \pi/12$

e) $T_s = \pi/16$



Rješenje:

najveća frekvencija u spektru danog signala: $\omega = 12$

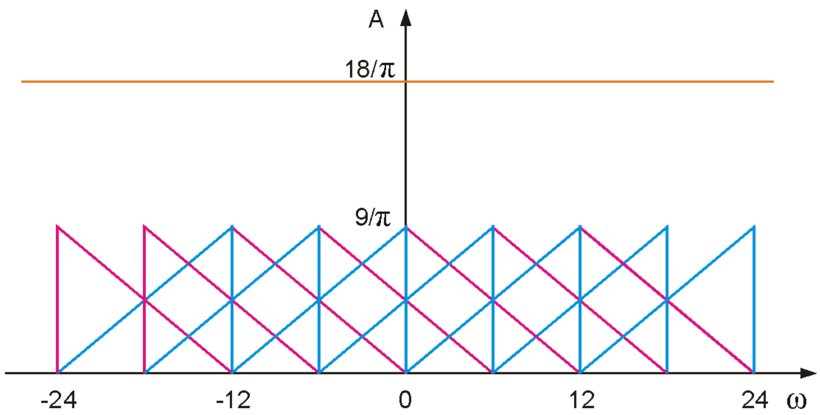
a) $T_s = \pi/3$

prvo računamo frekvenciju otipkavanja ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

a zatim je uspoređujemo s najvećom frekvencijom u spektru danog signala

$\omega_s = 6, < 2 \cdot \omega = 24 \Rightarrow$ za $T_s = \pi/3$ dolazi do preklapanja spektra i pojave aliasinga jer je frekvencija otpikavanja manja od Nyquistove frekvencije $(2 \cdot \omega)$



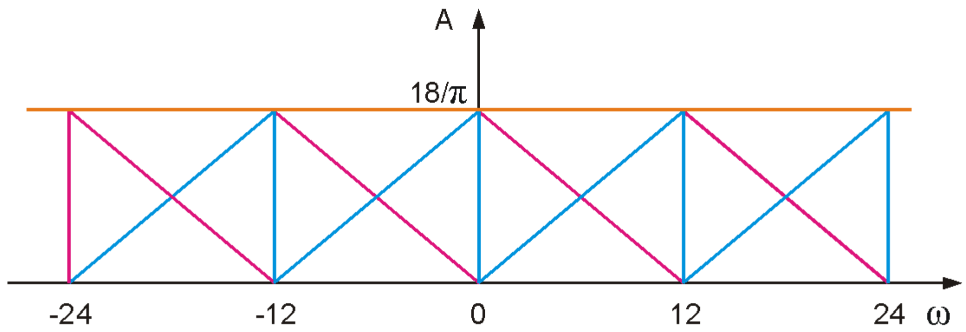
b) $T_s = \pi / 6$

računamo frekvenciju otipkavanja ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

zatim je uspoređujemo s najvećom frekvencijom u spektru danog signala

$\omega_s = 12 < 2 \cdot \omega = 24 \Rightarrow$ za $T_s = \pi / 6$ dolazi do preklapanja spektra i pojave aliasinga jer je frekvencija otpikavanja manja od Nyquistove frekvencije $(2 \cdot \omega)$



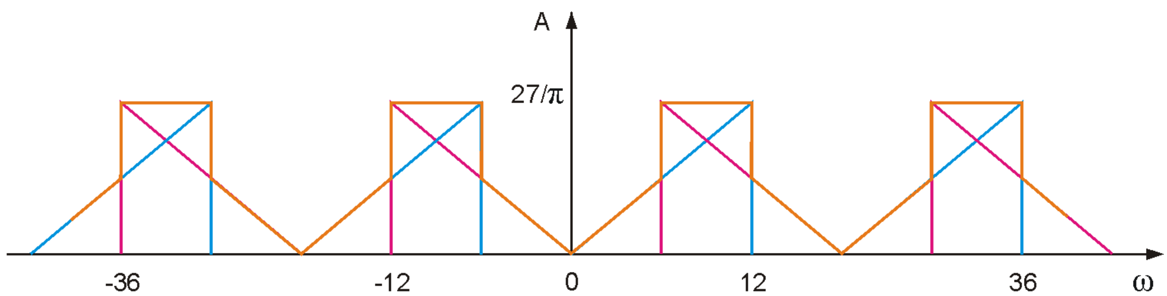
c) $T_s = \pi / 9$

računamo frekvenciju otipkavanja ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/9} = 18$$

zatim je uspoređujemo s najvećom frekvencijom u spektru danog signala

$\omega_s = 18 < 2 \cdot \omega = 24 \Rightarrow$ za $T_s = \pi / 9$ dolazi do preklapanja spektra i pojave aliasinga jer je frekvencija otpikavanja manja od Nyquistove frekvencije $(2 \cdot \omega)$



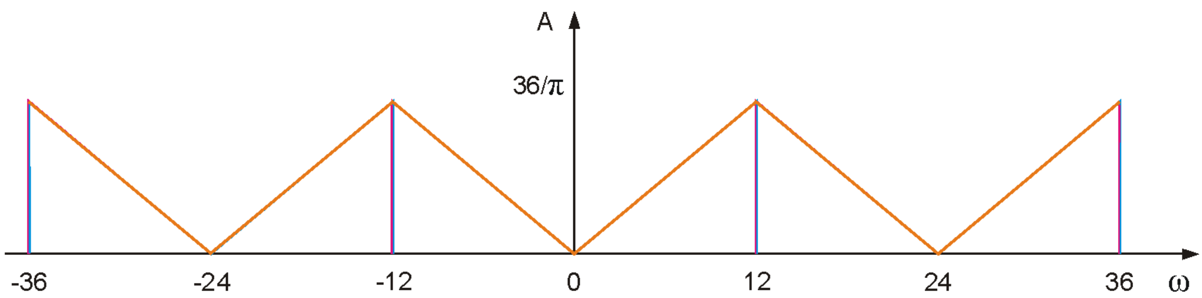
d) $T_s = \pi / 12$

računamo frekvenciju otipkavanja ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24$$

zatim je uspoređujemo s najvećom frekvencijom u spektru danog signala

$\omega_s = 24 \geq 2 \cdot \omega = 24 \Rightarrow$ za $T_s = \pi / 24$ dolazi do graničnog slučaja ispravnog otipkavanja jer je frekvencija otpikavanja jednaka Nyquistovoj frekvenciji $(2 \cdot \omega)$



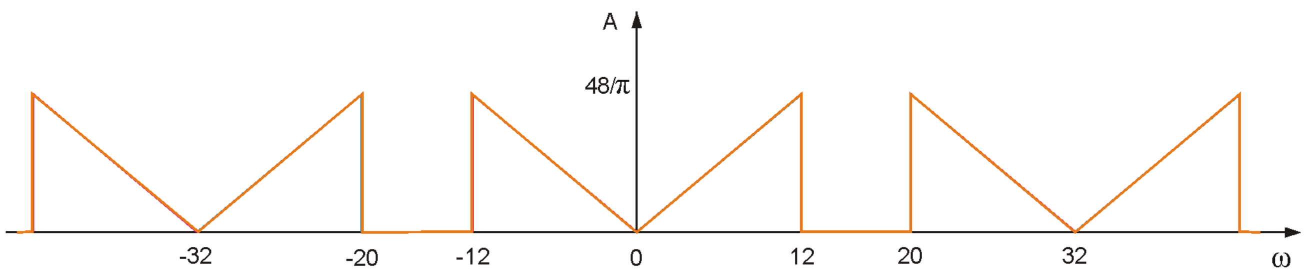
e) $T_s = \pi / 16$

računamo frekvenciju otipkavanja ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{\pi/16} = 32$$

zatim je uspoređujemo s najvećom frekvencijom u spektru danog signala

$\omega_s = 32 > 2 \cdot \omega = 24 \Rightarrow$ za $T_s = \pi / 16$ ne dolazi do preklapanja spektra i pojave aliasinga jer je frekvencija otpikavanja veća od Nyquistove frekvencije $(2 \cdot \omega)$



(16) zadatak

$T = 1\,s$

$$x_r(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-\ell T)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-\ell T)}{T}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-\ell T}{T}\right)$$

a) $x_1(t) = \left| \left\{ x_1[\ell] = \{\ldots 0, 0, \underline{1}, 2, 0, -2, -1, 0, \ldots 0, \ldots\} \right\} \right| =$

$$= 1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-0}{1}\right) + 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-1}{1}\right) + (-2)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-3}{1}\right) +$$

$$+ (-1)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-4}{1}\right)$$

$$x_1(t=0.5) = 0.6366197 + 2\cdot(0.6366197) - 2[0.1273] + 0.0909 =$$
$$= 1{,}7462$$
$$x_1(t=2.5) = -1{,}3581$$

b) $x_2(t) = \left| x_2[\ell] = \{0, \underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots\} \right| =$

$$= 1\,\mathrm{sinc}(t-0) + 2\,\mathrm{sinc}(t-2) + \mathrm{sinc}(t-3) + \mathrm{sinc}(t-4) +$$

$$+ \mathrm{sinc}(t-6) + \mathrm{sinc}(t-7) \Rightarrow$$

$$x_2(t=0.5) = 0.2397$$
$$x_2(t=2.5) = 1{,}8048$$

c) $x_3(t) = \left| x[\ell] = \{\ldots 0, \underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 0, \ldots\} \right| =$

$$= \mathrm{sinc}(t) + \mathrm{sinc}(t-1) + \mathrm{sinc}(t-3) + \mathrm{sinc}(t-4)(-1) + \underset{-1}{\mathrm{sinc}}(t-7)(-1) =$$

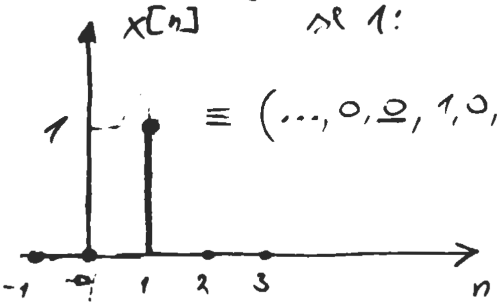
$$\Rightarrow x_3(t=0.5) = 1{,}4425$$
$$x_3(t=2.5) = 0{,}6932$$

17.

a) $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_{FOH}(t-nT)$, T period otipkavanja

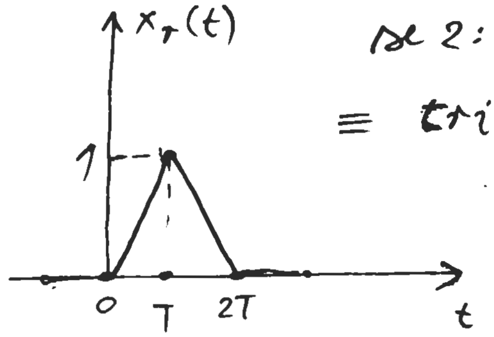
- pretpostavimo da radimo sa „idealnim" FOH interpolatorom koji nema kašnjenja (očigledno nekauzalnim) → analizo za kauzalni je identična – biti će još komentara u tom smislu
- nekim klasičnih sustava možemo identificirati ako promatramo odziv na poznatu pobudu → to ćemo ovdje učiniti
- odaberimo najjednostavniji, a opet dovoljno suvisao signal, tj. takav koji će pokazati što FOH interpolator radi, a sumu u gornjem izrazu će učiniti jednostavnom za evaluaciju: signal je dan slikom 1, a izlaz iz interp. bez kašnjenja slikom 2.

sl 1:



$\equiv (\ldots, 0, \underline{0}, 1, 0, 0, \ldots)$

sl 2:



$\equiv tri\left(\frac{t-T}{T}\right)$

možemo pisati: $x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_{FOH}(t-nT)$

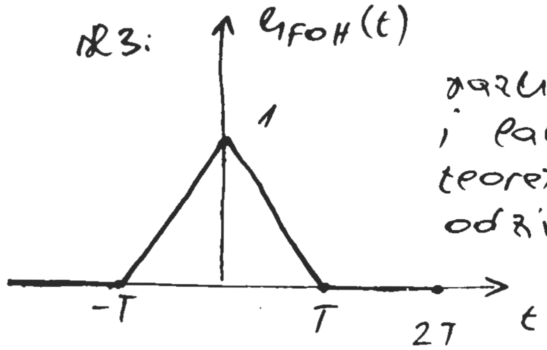
$$tri\left(\frac{t-T}{T}\right) = \underbrace{x[1]}_{1} \cdot h_{FOH}(t-T)$$

$$h_{FOH}(t-T) = tri\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

$$\Rightarrow h_{FOH}(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

→ dobijemo (očekivani) impulsni odziv prema slici 3.

sl 3:



On očigledno nije kauzalan, no za razliku od sinca je vremenski ograničen, i lako ga možemo pomaknuti udesno. Minimalno teoretsko kašnjenje je upravo T, i impulsni odziv kauzalnog FOH interpolatora je tada $h'_{FOH} = tri\left(\frac{t}{T} - 1\right)$.

b) Idealnim interpolatorom smatramo „sinc interpolator". Idealni je ovdje uvjetan atribut, jer sinc neće dobro interpolirati pravac (budući da je frekvencijski neograničen) dok FOH hoće. No, o tom' po tom!

- da bi ponašli frekvencijsku karakteristiku traženog filtra, potrebno je naći karakteristike FOH interpolatora i idealnog interpolatora i podijeliti ih

jelabašter

FOH: $h_{FOH}(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H_{FOH}(\omega) = T\,sinc^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

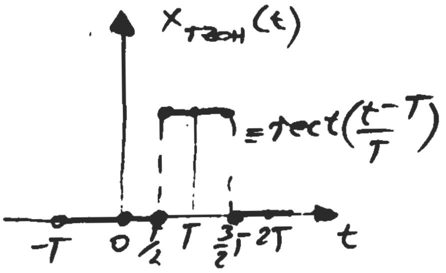
sinc: $h_{ID}(t) = sinc\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H_{ID}(\omega) = T\,rect\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$$H_{ID}(\omega) = H_x(\omega)\cdot H_{FOH}(\omega) \Rightarrow H_x(\omega) = \frac{H_{ID}(\omega)}{H_{FOH}(\omega)}$$

$$H_x(\omega) = \frac{rect\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}{sinc^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}$$ (to bi bilo instruktivno nacrtati u MATLAB-u)

c) $h_{ZOH} = ?$

→ uzmimo signal sa slike 1, ZOH interpolator daje odziv kao na slici 4 (opet radi konzistencije biram nekauzalnu varijantu – kauzalnost samo unosi kašnjenje u vremenu, tj. eksponencijalni član u frekvencijskoj karakteristici).



$$x_{TZOH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_{ZOH}(t-nT)$$

$$rect\left(\frac{t-T}{T}\right) = h_{ZOH}(t-T)$$

$$h_{ZOH}(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$h_{ZOH}(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T\,sinc\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = H_{ZOH}(\omega)$$

$$\Rightarrow H_x'(\omega) = \frac{H_{ID}(\omega)}{H_{ZOH}(\omega)} = \frac{rect\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}{sinc\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}$$

<u>Komentar</u>: očigledno se radi o filtrima koji su „niskopropusni" utoliko što odrežu sve „smeće" koje ZOH, FOH interpolatori puštaju sa viših frekvencija. Imaju polove na mjestima nula odgovarajućeg filtra kako bi istaknuli komponente unutar središnjeg frekvencijskog prozora koje odgovarajući filtar (interpolator) guši. Nerealizibilni su, prvenstveno stoga što su nekauzalni!

Ivan Dokmanić

18) zadatak

$x_1(t)$ ima ograničen spektar s $f_{max} = 1Hz$ (najveća komponenta)

ima spektar

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x_2[n] = x_1(1 \cdot n + 0.25)$$

$1 \cdot n = T_s n \Rightarrow T_s = 1$
otprilike
$f_s = 1$ Hz

a) $X_2(\omega) = ?$

npr

$$x_1'(t) = x_1(t + 0.25) \quad \text{tada} \quad X_1'(\omega) = X_1(\omega)\, e^{j\omega 0.25}$$

$x_2[n] = x_1'[n] \quad |T = 1[s]|$ (pomak ide u pri[illegible])

PSALAN:

$$X_2(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1'(\omega + k\omega_s) \longrightarrow$$ Kada se signal diskretizira spektar mu se periodizira!

$$X_2(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(\omega + k\omega_s)\, e^{-j(\omega + k\omega_s)0.25}$$

b) Zbog Shannonovog teorema koji kaže da

$\underline{\omega_s > 2\omega_m}$, a $\omega_m = 2\pi \cdot f_{max} = 2\pi$, a

$$\omega_s = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T_s} = 2\pi .$$

$\Rightarrow$ ne možemo odrediti $X_1(\omega)$ iz $X_2(\omega)$ jer je došlo do aliasinga!

c) ~~pogledati pod 16. zadatak~~

Rješenje c) dijela zadatka će biti naknadno objavljeno.

19.

a) potrebno je pokazati da je skalarni produkt odgovarajućih funkcija upravo $\delta(m-n)$, tj:

$$\langle \mathrm{sinc}(t-n), \mathrm{sinc}(t-m)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t-n)\,\mathrm{sinc}(t-m)\,dt = \delta(n-m)$$

Izravna evaluacija gornjeg integrala, preko definicije sinca, garantirano vodi do ludila. Stoga je korisno integral malo presložiti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t-n)\,\mathrm{sinc}(t-m)\,dt = \left| \begin{matrix} t-n = \vartheta \\ dt = d\vartheta \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\,\vartheta\,\mathrm{sinc}(\vartheta+n-m)\,d\vartheta$$

$$= \left| \begin{matrix} m-n = u \\ \text{sinc paran!} \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\,\vartheta\,\mathrm{sinc}(u-\vartheta)\,d\vartheta \leftarrow$$ ovdje se jasno prepoznaje konvolucija!

Stvar ćemo transformirati koristeći dvostranu Fourierovu transformaciju. (zbog sinca moramo). Konvolucija sincova je množenje rectova u fr. dom.!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\,\vartheta\,\mathrm{sinc}(u-\vartheta)\,d\vartheta \circ\!-\!\bullet\ \mathrm{rect}^2(f) = \mathrm{rect}(f) \quad \left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\mathrm{rect}(f) \bullet\!-\!\circ\ \mathrm{sinc}(u) = \mathrm{sinc}(m-n) = \frac{\sin[\pi(m-n)]}{\pi(m-n)}$$

$\Rightarrow$ iz definicije sinca i uvjeta $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-n \in \mathbb{Z}$!

slijedi $\mathrm{sinc}(m-n) = \delta(m-n)$ (obj: $\mathrm{sinc}(0) = 1$, $\sin k\pi = 0$, $k \in \mathbb{Z}$)

Dakle je pokazano

$\langle \mathrm{sinc}(t-n), \mathrm{sinc}(t-m)\rangle = \delta(m-n)$, pa je točna tvrdnja da je skup $\{\mathrm{sinc}(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormalan skup.

b) Pokazati ću da općenito vrijedi formula za izračun koeficijenata, a zatim je i dodatno komentirati:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \,\mathrm{sinc}(t-n) \quad / \ \langle \mathrm{sinc}(t-k), \cdot \rangle$$

$$\langle \mathrm{sinc}(t-k), f(t)\rangle = \left\langle \mathrm{sinc}(t-k), \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \,\mathrm{sinc}(t-n)\right\rangle$$

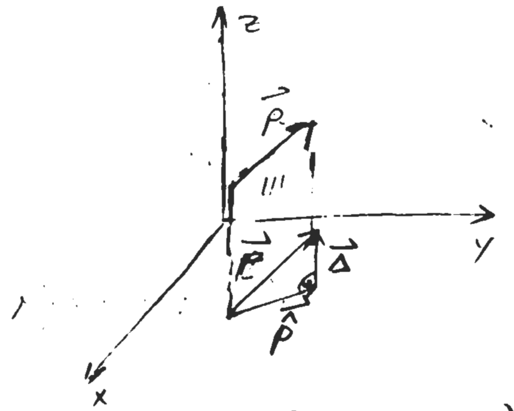
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \mathrm{sinc}(t-k), \alpha_n \,\mathrm{sinc}(t-n)\rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \langle \mathrm{sinc}(t-k), \mathrm{sinc}(t-m)\rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \delta(k-n) = \alpha_k$$, čime je pokazana točnost dane formule.

A kakvog je značenja spektralna ograničenost funkcije f? Pa jasno je da suma kao lineal ne može dati nove frekvencijske komponente, stoga će ta relacija vrijediti samo kad će frekvencijsko područje funkcije $f(t)$ biti „pokriveno" fr. podr. onoga što sumiramo - sinceva, dakle $\langle -\pi, \pi \rangle$! U suprotnom će navedena suma davati ort. proj. $f(t)$ u prostor S (v. c))

c) povucimo analogiju sa vektorima u euklidskom geom. prostoru



Općenito vrijedi $\vec{p} \in V^3$ (recimo da možemo reći $\vec{p} \subset \mathbb{R}^3$ iako je to neprecizno). $\hat{p}$ pak pripada ravnini xOy. Jasno je da za svaki takav par vektora možemo pisati $\vec{p} = \vec{\hat{p}} + \vec{\Delta}$, no samo ako je $\hat{p}$ ortogonalna projekcija $\vec{p}$ u xOy vrijedi $\vec{\Delta} \perp \vec{\hat{p}}$ tj. $\vec{\Delta} \cdot \vec{\hat{p}} = 0$.

Dakle: $\vec{\Delta} = \vec{p} - \vec{\hat{p}}$ pa mora vrijediti $\vec{\hat{p}} \cdot (\vec{p} - \vec{\hat{p}}) = 0$. Ort. projekcija vektora u neki prostor je okomita na razliku projiciranog vektora i projekcije. To mora vrijediti i u našem slučaju → mora biti

$$\langle \hat{f}, f - \hat{f} \rangle = 0 \ \ldots$$ pa izračunajmo

$$\langle \hat{f}, f-\hat{f} \rangle = \langle \hat{f}, f \rangle - \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \langle \hat{f}, f \rangle - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle \mathrm{sinc}(u-n), f(u) \rangle}_{\text{broj}} \, \mathrm{sinc}(t-n) \Big] dt - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{sinc}(u-n)\,du \Big) \mathrm{sinc}(t-n) \Big] dt - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{sinc}(u-n)\,du \; f(t)\,\mathrm{sinc}(t-n) \Big) dt - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{sinc}(u-n)\,du \Big) f(t)\,\mathrm{sinc}(t-n)\,dt - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{sinc}(u-n)\,du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sinc}(t-n)\,dt - \|\hat{f}\|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^2 - \|\hat{f}\|^2 = \cancel{\|\hat{f}\|^2} - \cancel{\|\hat{f}\|^2} = 0$$

Q.E.D.

Ivan Dokmanić