Rješenja zadataka za vježbu iz Digitalne obradbe signala

Akademska školska godina 2005./2006.

Umjesto uvoda

Ova rješenja zadataka za vježbu koji se mogu pronaći na WWW stranicama predmeta Digitalna obradba signala (`http://dos.zesoi.fer.hr/`) napisali su demonstratori:

- Vedran Bobanac
- Nina Brcko
- Tomislav Devčić
- Ivan Dokmanić
- Ivana Fazinić
- Lea Gagulić
- Tomislav Gracin
- Marin Kovačić
- Željka Lučev
- Petar Mostarac
- Tamara Petrović
- Fran Pregernik
- Vedrana Spudić
- Tomislav Vlah

Iako su rješenja pregledana gotovo sigurno u njima ima još dosta sitnijih pogrešaka ali, barem se tako nadamo, gotovo nijedna velika pogreška. Usprkos navedenim nedostatcima nadamo se da će vam ova rješenja dosta pomoći pri pripremi ispita ili kolokvija.

Tomislav Petković

1. Kada projektiramo FIR filtre simetrija impulsnog odziva je bitna. Stoga razlikujemo četiri tipa filtra u ovisnosti o parnosti reda filtra (paran ili neparan) i simetriji impulsnog odziva (simetričan ili antisimetričan). Za svaki od tipova odredi analitički izraz za frekvencijsku karakteristiku i prikaži ga kao kombinaciju trigonometrijskih funkcija.

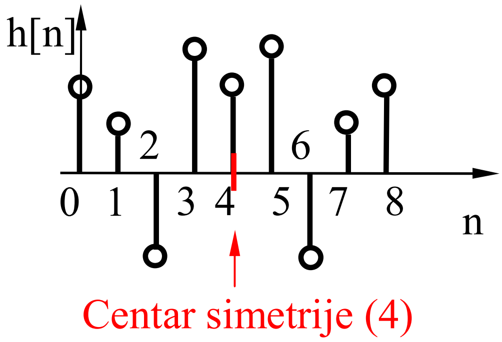
Napomena:

Iako se četiri tipa FIR filtara gotovo uvijek označavaju rimskim brojevima I, II, III, IV u različitim knjigama pojedini brojevi odgovaraju drugačijim tipovima filtara stoga nije dovoljno samo reći «filtar je tipa I» nego je potrebno i spomenuti koja svojstva FIR filtar ima (paran ili neparan red, simetričan ili antisimetričan odziv).

Rješenje:

a) Tip I

- simetričan impulsni odziv
- parni red filtra N
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva



Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet: $h[n] = h[N-n]$, $0 \le n \le N$.

Za daljnje razmatranje ćemo pretpostaviti da je N=8. U tom slučaju prijenosna funkcija filtra glasi:

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

Budući da je odziv simetričan vrijedi:

$$h[0] = h[8] \ , \ \ h[1] = h[7] \ , \ \ h[2] = h[6] \ , \ \ h[3] = h[5] \ .$$

Sada možemo napisati izraz za prijenosnu funkciju filtra na sljedeći način:

$$H(z) = h[0]\cdot(1+z^{-8}) + h[1]\cdot(z^{-1}+z^{-7}) + h[2]\cdot(z^{-2}+z^{-6}) + h[3]\cdot(z^{-3}+z^{-5}) + h[4]\cdot z^{-4} =$$
$$= z^{-4}\cdot\left\{h[0]\cdot(z^{4}+z^{-4}) + h[1]\cdot(z^{3}+z^{-3}) + h[2]\cdot(z^{2}+z^{-2}) + h[3]\cdot(z^{1}+z^{-1}) + h[4]\right\}$$

Frekvencijska karakteristika se dobije zamjenom $z = e^{j\omega}$.

Podsjetimo se da vrijedi: $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\cdot\sin(\omega)$ i $e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\cdot\sin(\omega)$.

Uvrštavanjem ovih relacija u dobiveni izraz za prijenosnu funkciju filtra dobivamo frekvencijsku karakteristiku izraženu kao:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 4}\left\{h[0](e^{j\omega 4}+e^{-j\omega 4}) + h[1](e^{j\omega 3}+e^{-j\omega 3}) + h[2](e^{j\omega 2}+e^{-j\omega 2}) + h[3](e^{j\omega}+e^{-j\omega}) + h[4]\right\}$$
$$= e^{-j\omega 4}\left\{2\cdot h[0]\cdot\cos(4\omega) + 2\cdot h[1]\cdot\cos(3\omega) + 2\cdot h[2]\cdot\cos(2\omega) + 2\cdot h[3]\cdot\cos(\omega) + h[4]\right\}$$

Pri čemu valja naglasiti da uvijek izlučujemo $e^{-j\omega N/2}$.

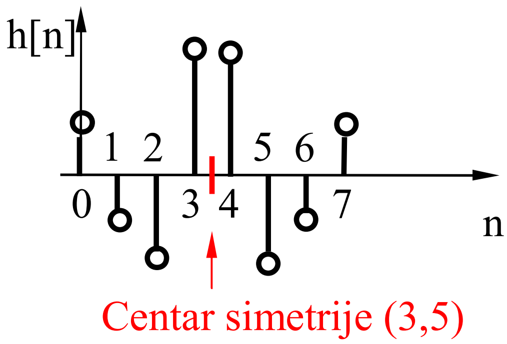
U općem slučaju izraz za frekvencijsku karakteristiku možemo zapisati kao:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{N/2} a[m] \cdot \cos(\omega \cdot m) \right\},$$

pri čemu vrijedi

$$a[m] = \begin{cases} h\left[\frac{N}{2}\right], & m = 0 \\ 2 \cdot h\left[\frac{N}{2} - m\right], & 1 \le m \le \frac{N}{2} \end{cases}$$

b) Tip II
- simetričan impulsni odziv
- neparan red filtra N
- paran broj uzoraka impulsnog odziva



Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet:
$h[n] = h[N-n]$, $0 \le n \le N$.
Za daljne razmatranje ćemo pretpostaviti da je N=7. U tom slučaju prijenosna funkcija filtra glasi:

$$H(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + h[2] \cdot z^{-2} + h[3] \cdot z^{-3} + h[4] \cdot z^{-4} + h[5] \cdot z^{-5} + h[6] \cdot z^{-6} + h[7] \cdot z^{-7}$$

Budući da je odziv simetričan vrijedi:

$$h[0] = h[7] \ , \ \ h[1] = h[6] \ , \ \ h[2] = h[5] \ , \ \ h[3] = h[4] \ .$$

Sada možemo napisati izraz za prijenosnu funkciju filtra na sljedeći način:

$$H(z) = h[0] \cdot (1 + z^{-7}) + h[1] \cdot (z^{-1} + z^{-6}) + h[2] \cdot (z^{-2} + z^{-5}) + h[3] \cdot (z^{-3} + z^{-4}) =$$
$$= z^{-3.5} \cdot \left\{ h[0] \cdot (z^{3.5} + z^{-3.5}) + h[1] \cdot (z^{2.5} + z^{-2.5}) + h[2] \cdot (z^{1.5} + z^{-1.5}) + h[3] \cdot (z^{0.5} + z^{-0.5}) \right\}$$

Analogno kao za tip I dolazimo do sljedećeg izraza za frekvencijsku karakteristiku:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 3.5} \left\{ 2h[0]\cos(3.5\omega) + 2h[1]\cos(2.5\omega) + 2h[2]\cos(1.5\omega) + 2h[3]\cos(0.5 \cdot \omega) \right\}$$

U općem slučaju izraz za frekvencijsku karakteristiku možemo zapisati kao:

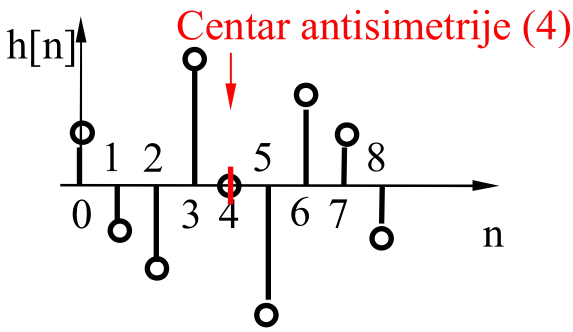
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{(N+1)/2} b[m] \cdot \cos(\omega \cdot (m - \frac{1}{2})) \right\},$$

pri čemu vrijedi

$$b[m] = 2 \cdot h\left[\frac{N+1}{2} - m\right], \ \ 1 \le m \le \frac{N+1}{2} \ .$$

c) Tip III

- antisimetričan impulsni odziv
- paran red filtra N
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva



Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet:
$h[n] = -h[N-n]$, $0 \le n \le N$.
Za daljne razmatranje ćemo pretpostaviti da je N=8. U tom slučaju prijenosna funkcija filtra glasi:

$$H(z) = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + h[3]z^{-3} + h[4]z^{-4} + h[5]z^{-5} + h[6]z^{-6} + h[7]z^{-7} + h[8]z^{-8}$$

Budući da je odziv antisimetričan vrijedi:

$h[0] = -h[8]$, $h[1] = -h[7]$, $h[2] = -h[6]$, $h[3] = -h[5]$.

Sada možemo napisati izraz za prijenosnu funkciju filtra na sljedeći način:

$$H(z) = h[0]\cdot(1 - z^{-8}) + h[1]\cdot(z^{-1} - z^{-7}) + h[2]\cdot(z^{-2} - z^{-6}) + h[3]\cdot(z^{-3} - z^{-5}) + h[4]\cdot z^{-4} =$$
$$= z^{-4}\cdot\{h[0]\cdot(z^{4} - z^{-4}) + h[1]\cdot(z^{3} - z^{-3}) + h[2]\cdot(z^{2} - z^{-2}) + h[3]\cdot(z^{1} - z^{-1}) + h[4]\}$$

Analogno kao za tip I i tip II dolazimo do sljedećeg izraza za frekvencijsku karakteristiku:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 4}\{2jh[0]\sin(4\omega) + 2jh[1]\sin(3\omega) + 2jh[2]\sin(2\omega) + 2jh[3]\sin(\omega) + h[4]\}$$

U općem slučaju izraz za frekvencijsku karakteristiku možemo zapisati kao:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}\cdot e^{j\pi/2}\cdot\left\{\sum_{m=1}^{N/2} c[m]\cdot\sin(\omega\cdot m)\right\},$$

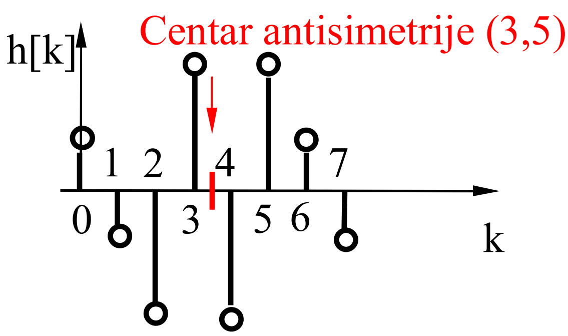
pri čemu j zamjenjujemo s $e^{j\pi/2}$, te vrijedi

$$c[m] = 2\cdot h\left[\frac{N}{2} - m\right] , \quad 1 \le m \le \frac{N}{2} .$$

Ovdje valja primijetiti da u općem izrazu za frekvencijsku karakteristiku nema člana $h[4]$. To je zato što imamo neparan broj uzoraka, a $h[4]$ je srednji član (centar antisimetrije) i iznosi 0. Kada srednji član ne bi bio 0 ne bi imali antisimetričan odziv, jer ne bi vrijedilo $h[n] = -h[N-n]$ (samo 0 je rješenje jednadžbe $-h[N/2] = h[N/2]$).

d) Tip IV

- antisimetričan impulsni odziv
- neparan red filtra N
- paran broj uzoraka impulsnog odziva



Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet:
$h[n] = -h[N-n]$, $0 \le n \le N$.
Za daljne razmatranje ćemo pretpostaviti da je N=7. U tom slučaju prijenosna funkcija filtra glasi:

$$H(z) = h[0] + h[1]\cdot z^{-1} + h[2]\cdot z^{-2} + h[3]\cdot z^{-3} + h[4]\cdot z^{-4} + h[5]\cdot z^{-5} + h[6]\cdot z^{-6} + h[7]\cdot z^{-7}$$

Budući da je odziv antisimetričan vrijedi:

$$h[0] = -h[7]\ ,\ \ h[1] = -h[6]\ ,\ \ h[2] = -h[5]\ ,\ \ h[3] = -h[4]\ .$$

Sada možemo napisati izraz za prijenosnu funkciju filtra na sljedeći način:

$$\begin{aligned} H(z) &= h[0]\cdot(1 - z^{-7}) + h[1]\cdot(z^{-1} - z^{-6}) + h[2]\cdot(z^{-2} - z^{-5}) + h[3]\cdot(z^{-3} - z^{-4}) = \\ &= z^{-3.5}\cdot\left\{h[0]\cdot(z^{3.5} - z^{-3.5}) + h[1]\cdot(z^{2.5} - z^{-2.5}) + h[2]\cdot(z^{1.5} - z^{-1.5}) + h[3]\cdot(z^{0.5} - z^{-0.5})\right\} \end{aligned}$$

Analogno kao za tip I, tip II i tip III dolazimo do sljedećeg izraza za frekvencijsku karakteristiku:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 3.5}\left\{2jh[0]\sin(3.5\omega) + 2jh[1]\sin(2.5\omega) + 2jh[2]\sin(1.5\omega) + 2jh[3]\sin(0.5\omega)\right\}$$

U općem slučaju izraz za frekvencijsku karakteristiku možemo zapisati kao:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2}\cdot e^{j\pi/2}\cdot\left\{\sum_{m=1}^{(N+1)/2} d[m]\cdot\sin(\omega\cdot(m - \frac{1}{2}))\right\},$$

pri čemu vrijedi

$$d[m] = 2\cdot h\left[\frac{N+1}{2} - m\right]\ ,\ \ 1 \le m \le \frac{N+1}{2}\ .$$

Napomena:

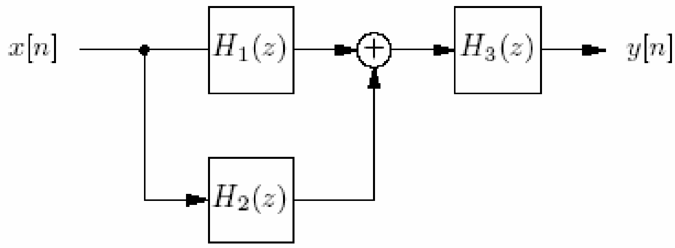
Iz dobivenih prijenosnih funkcija $H(e^{j\omega})$ FIR filtara vidimo da pojedini tipovi imaju nulu za $\omega = \pi$ ili $\omega = 0$ (nule svih sinusa ili kosinusa u dobivenoj prijenosnoj funkciji) te se stoga ne mogu koristiti za izvedbu visokopropusnih ili niskopropusnih filtara.

Vedran Bobanac

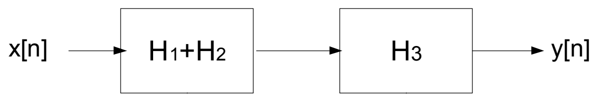
2. Tri FIR filtra s prijenosnim funkcijama

$$H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}, \quad H_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{7}{3}z^{-2}, \quad \text{i} \quad H_3(z) = 2 + 3z^{-1} + 1z^{-2}$$

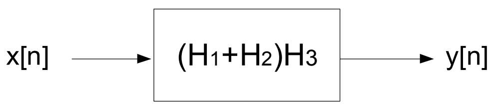
spojena su kako je prikazano na slici. Odredi prijenosnu funkciju cijelog sustava.



Prikazanu shemu možemo transformirati na način da prvo paralelu H_1 i H_2 transformiramo u zbroj funkcija H_1 i H_2:



Nakon toga dobivenu seriju dvaju prijenosnih funkcija prikazujemo kao njihov umnožak:



Iz navedenog slijedi prijenosna funkcija cijelog sustava:

$$\frac{y[n]}{x[n]} = H(z)$$

$$H(z) = H_3(z) \cdot [H_1(z) + H_2(z)] =$$

$$= H_3(z) \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} + \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{7}{3}z^{-2}\right] =$$

$$= H_3(z) \cdot [1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}] = [2 + 3z^{-1} + z^{-2}] \cdot [1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}] =$$

$$H(z) = 2 + 7z^{-1} + 13z^{-2} + 11z^{-3} + 3z^{-4}$$

Tomislav Vlah

3) Prisjetite se da su vremenski diskretni sustavi čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-ja\omega}, \quad A(\omega) = |H(\omega)| \quad i \quad a \in R; \qquad (1)$$

sustavi s linearnom fazom, dok se sustavi čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j(a\omega+b)}, \; R(\omega), a, b \in R \qquad (2)$$

nazivaju generaliziranim sustavima s linearnom fazom. Za svaki od zadanih konačnih impulsnih odziva odredi da li je pripadni filtar generalizirani sustav s linearnom fazom. U slučaju da je zadani filtar generalizirani sustav s linearnom fazom odredi $R(\omega)$, a i b te ispitaj da li je sustav takoder sustav s linearnom fazom.

a) h[n] = {2, 1, 2},
b) h[n] = {1, 2, 3},
c) h[n] = {-1, 3, 1},
d) h[n] = {1, 1, 1,- 1,- 1},
e) h[n] = {1, 1, 0,-1,-1},
f) h[n] = {1, 0,-1},
g) h[n] = {2, 1, 1, 2} i
h) h[n] = {2, 0, 1, 0, 2}.

Rješenje:

Frekvencijska karakteristika odgovara vremenski diskretnoj Fourierovoj transformaciji impulsnog odziva.

a) h[n] = {2, 1, 2} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega}$

Za svaki FIR filtar koji ima simetričan ili antisimetrični impulsni odziv frekvencijsku karakteristiku rastavljamo tako da izlučimo član $e^{-j\omega N/2}$ gdje je N red filtra. Dobivamo:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} \\ &= e^{-j\omega}(2e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega}) \\ &= e^{-j\omega}(1 + 4\cos(\omega)) \end{aligned}$$

Zadani sustav je generalizirani sustav s linearnom fazom:

$R(\omega) = (1 + 4\cos\omega)$; a = 1, b=0.

Sustav ima linearnu faznu karakteristiku ako vrijedi : 1. b = 0
2. R(ω) $\geq 0, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$

U ovom je slučaju zadovoljen samo prvi uvjet pa sustav nema linearnu fazu.

b) h[n] = {1, 2, 3} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega}$

$$= e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 2 + 3e^{-j\omega})$$
$$= e^{-j\omega}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + 2 + 3\cos(\omega) - 3j\sin(\omega))$$
$$= e^{-j\omega}(4\cos(\omega) - 2j\sin(\omega) + 2)$$

Ova se frekvencijska karakteristika ne može zapisati u obliku (1) ili (2). Njena je fazna karakteristika:

$$\varphi(\omega) = 2\omega + arctg\frac{-\sin(\omega)}{2\cos(\omega)+1}$$

iz čega se jasno vidi da sustav nema generaliziranu linearnu faznu karakteristiku.

c) h[n] = {-1, 3, 1} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = -1 + 3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}$
$$= e^{-j\omega}(-e^{j\omega} + 3 + e^{-j\omega})$$
$$= e^{-j\omega}(-2j\sin(\omega) + 3)$$

$\varphi(\omega) = 2\omega + arctg\frac{-2\sin\omega}{3}$, pa sustav nema generaliziranu linearnu faznu karakteristiku

d) h[n] = {1, 1, 1,- 1,- 1} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} - e^{-3j\omega} - e^{-4j\omega}$
$$= e^{-2j\omega}(e^{2j\omega} + e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} - e^{-2j\omega})$$
$$= e^{-2j\omega}(2j\sin(\omega) + 2j\sin(2\omega) + 1)$$

$\varphi(\omega) = 3\omega + arctg(2\sin(\omega) + 2\sin(2\omega))$, sustav nema generalizirano linearnu faznu karakteristiku

e) h[n] = {1, 1, 0,-1,-1} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} - e^{-3j\omega} - e^{-4j\omega}$
$$= e^{-2j\omega}(e^{2j\omega} + e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{-2j\omega})$$
$$= e^{-2j\omega}(2j\sin(\omega) + 2j\sin(2\omega))$$
$$= e^{-2j\omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot (2\sin(\omega) + 2\sin(2\omega))$$
$$= e^{-j(2\omega - \frac{\pi}{2})} \cdot (2\sin(\omega) + 2\sin(2\omega))$$

Zadani sustav ima generaliziranu linearnu faznu karakteristiku.

R(ω) = $2\sin(\omega) + 2\sin(2\omega)$; a = 2ω; b = -$\frac{\pi}{2}$

b$\neq$ 0 i ne vrijedi R(ω) $\geq 0, \forall\omega \in [-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ Sustav nema linearnu fazu

f) h[n] = {1, 0,-1} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-2j\omega}$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\
&= e^{-j\omega}(2j\sin(\omega)) \\
&= e^{-j\omega + \frac{\pi}{2}} \cdot 2\sin(\omega) \\
&= e^{-j(\omega - \frac{\pi}{2})} \cdot 2\sin(\omega)
\end{aligned}
$$

R(ω) = $2\sin(\omega)$; a = ω; b = -$\frac{\pi}{2}$

b$\neq$ 0 i ne vrijedi R(ω) $\geq 0, \forall\omega \in [-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ Sustav nema linearnu fazu

g) h[n] = {2, 1, 1, 2} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} + 2e^{-3j\omega}$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-1.5j\omega}(2e^{1.5j\omega} + e^{0.5j\omega} + e^{-0.5j\omega} + 2e^{-1.5j\omega}) \\
&= e^{-1.5j\omega}(4\cos(1.5\omega) + 2\cos(0.5\omega))
\end{aligned}
$$

R(ω) = $4\cos(1.5\omega) + 2\cos(0.5\omega)$; a =1.5; b = 0

b = 0 ali ne vrijedi R(ω) $\geq 0, \forall\omega \in [-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ Sustav nema linearnu fazu

h) h[n] = {2, 0, 1, 0, 2} $\Rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = 2 + e^{-2j\omega} + 2e^{-4j\omega}$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-2j\omega}(2e^{2j\omega} + 1 + 2e^{-2j\omega}) \\
&= e^{-2j\omega}(4\cos(2\omega) + 1)
\end{aligned}
$$

R(ω) = $4\cos(2\omega) + 1$; a = 2; b = 0

b = 0 ali ne vrijedi R(ω) $\geq 0, \forall\omega \in [-\pi, \pi]$ $\Rightarrow$ Sustav nema linearnu fazu

Ivana Fazinić

4. FIR filtar drugog reda ima simetrični impulsni odziv, tj. vrijedi h[0] = h[2]. Ako na ulaz takvog filtra dovedemo dvije čiste kosinusoide kružnih frekvencija π/4 i π/2 filtar propušta samo komponentu niže frekvencije i to s jediničnim pojačanjem. Odredi impulsni odziv filtra.

RJEŠENJE:

Red filtra jest N = 2.
Duljina realnog impulsnog odziva jest M = N+1 = 3.

Zadani filtar ima simetričan impulsni odziv, te neparan broj uzoraka impulsnog odziva (tip 1).

Pripadna frekvencijska karakteristika filtra ovog tipa ima oblik:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega/2}\left\{\sum_{m=0}^{N/2} a[m]\cdot\cos(\omega\cdot m)\right\}$$

pri čemu koeficjenti iznose:

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right], \quad a[m] = 2h\left[\frac{N}{2}-m\right], \quad 1 \le m \le \frac{N}{2}$$

Računamo frekvencijsku karakteristiku za zadani filtar:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\left\{\sum_{m=0}^{1} a[m]\cdot\cos(\omega\cdot m)\right\} = e^{-j\omega}\{a[0]\cdot\cos(0) + a[1]\cdot\cos(\omega)\} = e^{-j\omega}\{a[0] + a[1]\cdot\cos(\omega)\}$$

Vrijedi:

$$a[0] = h\left[\frac{N}{2}\right] = h[1]$$

$$a[1] = 2\cdot h[0]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\{h[1] + 2\cdot h[0]\cdot\cos(\omega)\}$$

Iz zahtjeva na filtar određujemo h[0] i h[1]. Na frekvenciji π/2 dolazi do gušenja (amplitudna karakteristika jednaka je nula), dok za π/4 imamo propuštanje (amplitudna karakteristika jednaka je jedan).

$$e^{-j\pi/2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$e^{-j\pi/4} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + j\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|H(e^{j\pi/2})| = |e^{-j\pi/2}\left\{h[1] + 2\cdot h[0]\cdot\cos(\frac{\pi}{2})\right\}| = |-j\cdot(h[1] + 2\cdot h[0]\cdot 0)| = |-j\cdot h[1]| = 0$$

$\rightarrow \quad h[1] = 0$

$$|H(e^{j\pi/4})| = |e^{-j\pi/4}\left\{h[1] + 2\cdot h[0]\cdot\cos(\frac{\pi}{4})\right\}| = |(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(2\cdot h[0]\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})| = |h[0] - j\cdot h[0]| = 1$$

$$|H(e^{j\pi/4})| = \sqrt{h[0]^2 + h[0]^2} = \sqrt{2h[0]^2} = 1$$

$\rightarrow \quad h[0] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Postoje dva rješenja traženog impulsnog odziva:

$$h_1[n] = \left\{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

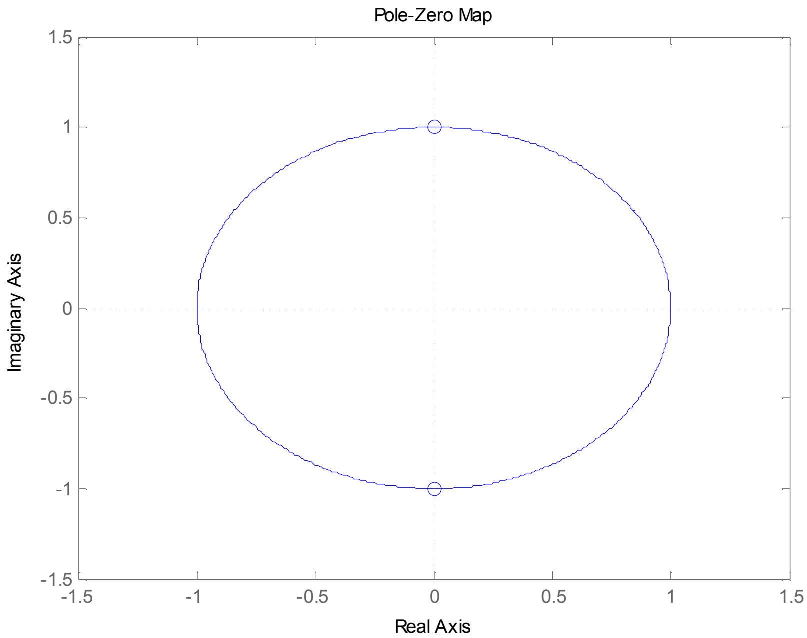
$$h_2[n] = \left\{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

DRUGIN NAČIN RJEŠAVANJA:

Iz poznate prijenosne karakteristike filtra lagano se može odrediti impulsni odziv. Vrijedi:

$$H(z) = h[2]z^{-2} + h[1] \cdot z^{-1} + h[0]$$

Frekvencijsku karakteristiku potrebno je povezati s položajem nula i polova koji će nam određivati svojstva filtra. Za gušenje određene frekvencije potrebno je imati pojačanje nula za tu frekvenciju što zahtjeva dvije nule u polarnom prikazu. U našem slučaju nule ćemo dobiti za kuteve π/2 i - π/2, tj. na vrijednostima +j i -j. Uz pomoć pojačanja frekvencije koju propuštamo može se izračunati pojačanje A.



$$H(z) = A \cdot (z - n_1) \cdot (z - n_2)$$

$$H(z) = A \cdot (z - j) \cdot (z + j) = A \cdot (z^2 - j^2) = A \cdot (z^2 + 1)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = A \cdot (e^{2j\frac{\pi}{4}} + 1) = A \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} + 1) = A \cdot (j + 1) = A + Aj$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| = \sqrt{A^2 + A^2} = \sqrt{2A^2} = 1$$

$$A = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H(z) = A \cdot (z^2 + 1) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} z^2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

S obzirom na to kako sustav (tj. filtar) mora biti kauzalan potrebno je dobivenu prijenosnu karakteristiku filtra pomaknuti u nulu. Zato pišemo:

$$H_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} z^{-2} + 0 \cdot z^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H_2(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2} z^{-2} + 0 \cdot z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Impulsni odziv:

$$h_1[n] = \left\{ \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$h_2[n] = \left\{ -\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Zadatak riješila: Nina Brcko

5. Odredi impulsni odziv pojasno – propusnog FIR filtra 105 reda projektiranog pomoću Hammingovog vremenskog otvora. Neka su granične frekvencije π / 4 i 3π / 4 .

Uputa: Odredi inverznu vremenski – diskretnu transformaciju spektra idealnog filtra koji je na intervalu [-π , π] određen izrazom:

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j\omega N/2} = \begin{cases} e^{-j\omega N/2}, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

N = 105 – red FIR filtra
L = N+1 = 106 – širina otvora

Inverzna vremenski- diskretna Fourierova transformacija računa se prema izrazu:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)e^{jn\omega}d\omega, \quad -\infty < n < \infty$$

Inverznu vremeski diskretnu Fourierovu transformaciju računamo primjenom teorema o pomaku u vremenskoj domeni :

$$F\{x[n-k]\} = e^{-j\omega k}X(\omega)$$

Računamo dakle inverznu transformaciju od konstante i dobiveni niz h' [n] u vremenskoj domeni pomičemo za N/2 supstitucijom n - N/2 i tako dobivamo traženu inverznu transformaciju h[n] idealnog PP filtra:

$$h'[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} e^{jn\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{jn\omega}d\omega =$$

$$= \frac{2\cdot\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right]\cdot\sin\left[\frac{n\pi}{4}\right]}{n\pi}, \quad -\infty < n < +\infty$$

$$h[n] = h'\left[n - \frac{N}{2}\right] = h'\left[n - \frac{105}{2}\right] =$$

$$= \frac{4\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}(2n-105)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{8}(2n-105)\right]}{\pi(2n-105)}, \quad -\infty < n < + \quad (5\text{-}1)$$

Izraz (5-1) predstavlja impulsni odziv idealnog pojasno-propusnog filtra koji je pomaknut u vremenu za (N+1)/2 = 53.Taj impulsni odziv je simetričan u odnosu na n = N/2 = 105/2 tj. h [52] = h[53], h[51] = h[54], ... ,h[0] = h[105] itd.

Impulsni odziv FIR filtra dobiva se množenjem impulsnog odziva idealnog filtra i impulsnog odziva Hammingovog vremenskog otvora širine L = 106. Budući da je impulsni odziv simetričan,a filter je neparnog reda ovaj FIR filter je tipa 2. Impulsni odziv Hammingovog vremenskog otvora, u slučaju da je širina otvora parna (L=106), dan je sljedećim izrazom:

$$w_{ha}[n] = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{L-1}\right), & n \in \left\{-\dfrac{L}{2},...,\dfrac{L}{2}-1\right\} \text{ i } \quad \alpha = 0.54 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$w_{ha}[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{105}\right), & n \in \{-53,...,52\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

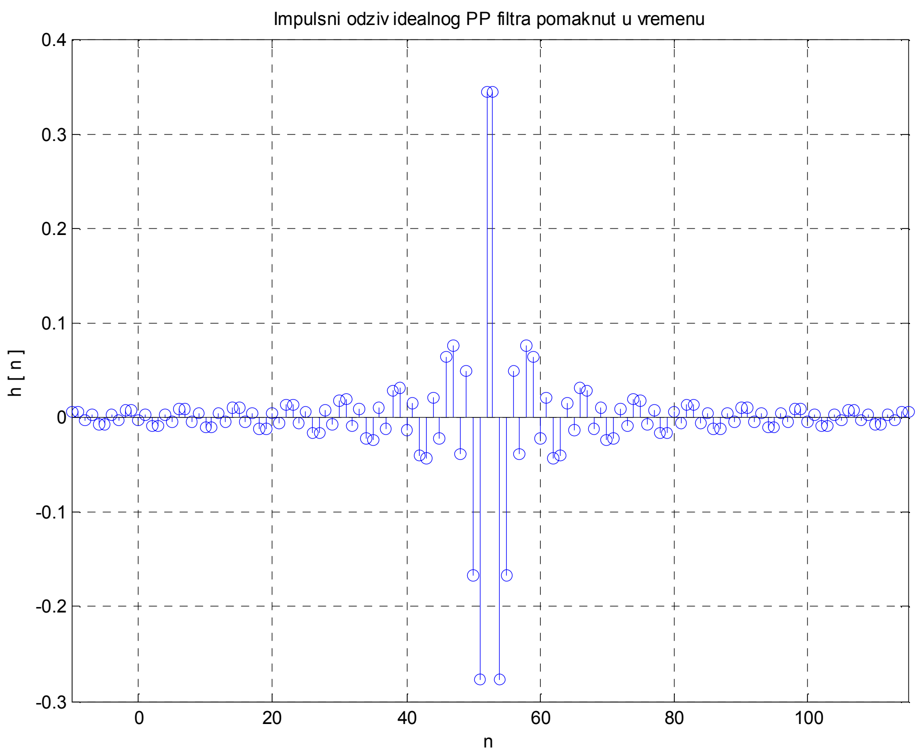
Impulsni odziv ovog vremenskog otvora pomaknut za (N+1)/2 tj. 53 – $\mathbf{w_{ha\_pomaknut}[i]}$ mozemo dobiti supstitucijom
n = i - 53:

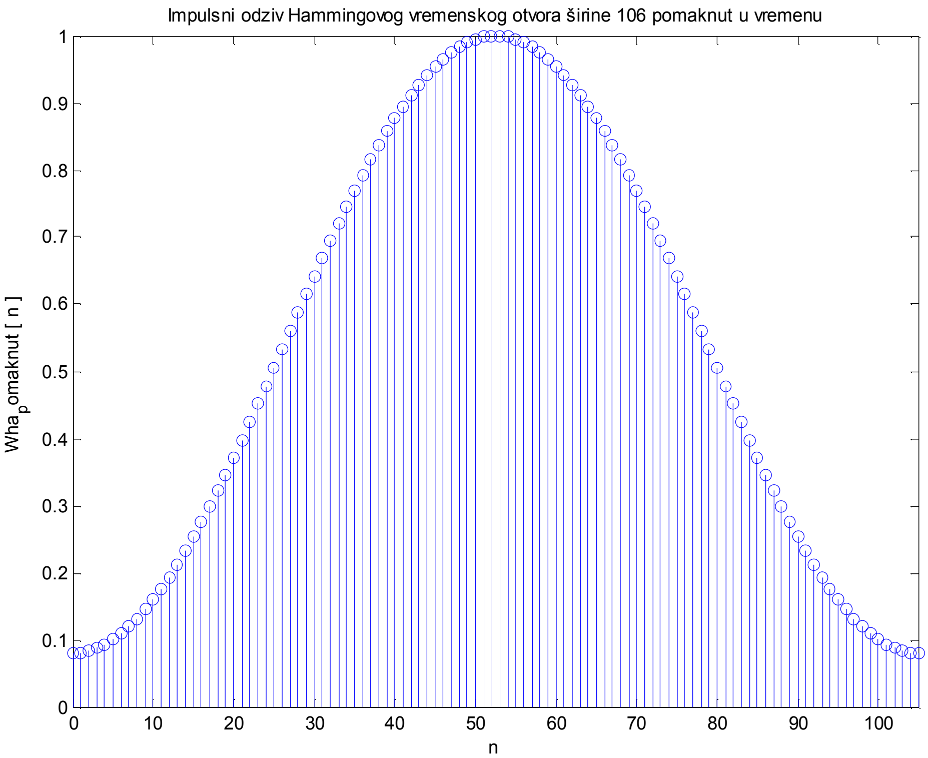
$$w_{ha\_pomaknut}[i] = 0.54 + 0.46\cdot\cos\left[\frac{2}{105}\left(\frac{-105}{2}+n\right)\pi\right], \quad i \in \{0,...,105\}$$

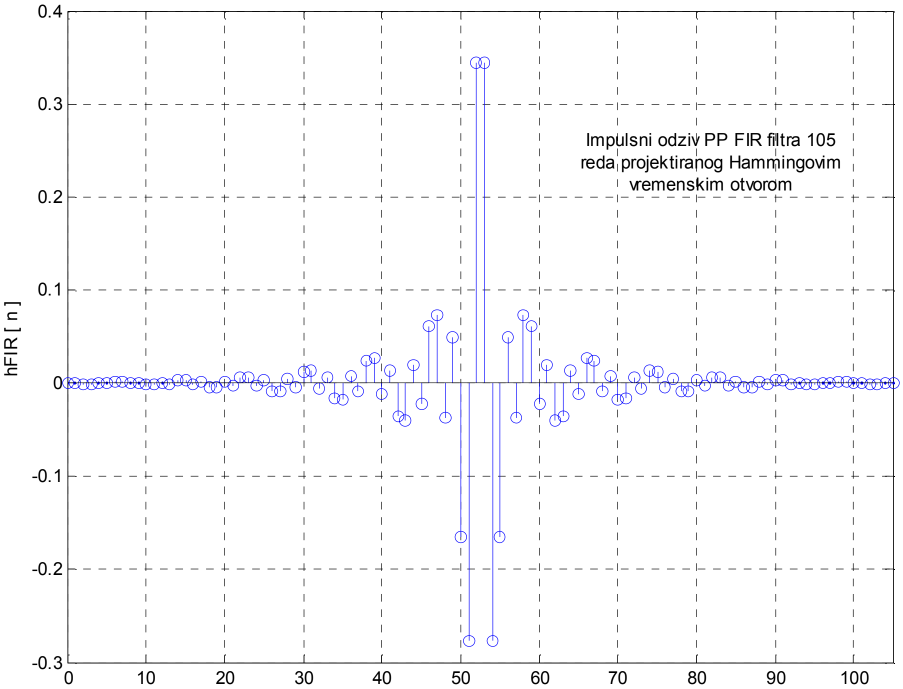
Impulsni odziv pojasno-propusnog FIR filtra projektiranog pomoću Hammingovog otvora dobivamo na sljedeći način:

$$h_{FIR}[n] = h[n]\cdot w_{ha\_pomaknut}[n] =$$

$$= \frac{1.27324\left[0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2n\pi}{105}\right)\right]\cdot\cos\left[\dfrac{\pi}{4}(2n-105)\right]\cdot\sin\left[\dfrac{\pi}{8}(2n-108)\right]}{2n-105}, \quad n \in \{0,...,105\}$$







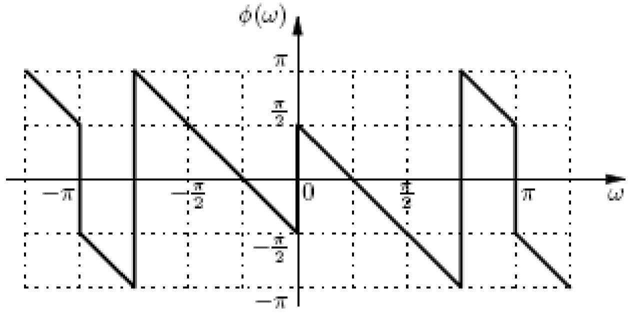
Tamara Petrović

6. Na slici je prikazana fazna karkterisitika jednog FIR filtra s generaliziranom linearnom fazom.

a) Odredi red zadanog fitra
b) Da li je moguće odrediti o kojem se tipu FIR filtra radi (tip I, II, III, ili IV)? Ako je moguće odredit tip filtra, a ako nije objasni zašto nije.
c) Možeš li karakterizrati filtar kao (i) niski propust, (ii) visoki propust, (iii) niti niski niti visoki propust ili (iv) nije moguće odrediti o kojoj se vrsti filtra radi?
d) Odredi impulsni odziv filtra ako je poznato da amplitudna karakteristika prolazi kroz 4 za frekvenciju π/2 i ako je:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 \, d\omega = 20\pi.$$

Da li je dobiveni impulsni odziv jedinstven?
Uputa: Iskoristite svojstva simetrije te Parsevalov teorem.



RJEŠENJE:

Red zadanog filtra možemo odrediti iz nagiba fazne karakterisitike (primjetite da je nagib karakteristike na svakom intervalu isti):

$$\frac{N}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = 2 \rightarrow N = 4$$

Red filtra je dakle 4, a broj uzoraka impulsnog odziva je za jedan veći od reda filtra, dakle 5. Uočavamo kako je to neparni broj uzoraka, dakle za određivanje tipa filtra potrebno nam je još samo odrediti da li je impulsni odziv simetričan ili antisimetričan.
Sada promatramo faznu karakteristiku sustava. Ona ima oblik kakav obično dobijemo kada za crtanje iste koristimo neki programski alat kao npr. Matlab. Dakle, uočavamo skokove od 2π sa –π na π (ili obrnuto) za koje je faza stvarno neprekinuta pa nam ti skokovi ne daju nove informacije. Ali, primijetimo isto tako skokove za π na frekvencijama – π, 0 i π. Kako su frekvencije – π i π opet zapravo ista frekvencija dovoljno je promatrati samo 0 i π.
Sada definirajmo par stvari. Vremenski diskretne sustave čija se frekvencijska karakteristika može prikazati kao

$$H(\omega) = R(\omega) \cdot e^{-j(a\omega+b)}, R(\omega), a, b \in \Re$$

zovemo generalizirani sustavima s linearnom fazom. R(ω) se tada može koristiti za prikaz amplitudnog spektra, a ostatak izraza za prikaz faznog spektra. Iz takvog prikaza naravno ništa ne bi mogli zaključiti osim reda filtra.
Prikaz koji ovdje imamo je Φ(ω), jer amplitudnu i faznu karakteristiku možemo definirati i na sljedeći način.

$$A(\omega)=|H(\omega)|, \Phi(\omega)=\arg(H(\omega))$$

Ono što je značajno za ovakav prikaz, jest to da svaki put kad po obilasku po jediničnoj kružnici u Z-domeni naiđemo na nulu na nekoj frekvenciji na toj istoj frekvenciji ćemo u prikazu fazne karakteristike imati skok za π. Dakle ono što mi možemo očitati iz našeg grafa su frekvencije za koje nam H(ω) ima iznos 0. To se događa za ω = 0 i ω = π. Podsjetimo se opće formule za tip I i III tip FIR filtra jer su to tipovi sa neparnim brojem uzoraka impulsnog odziva. Tip I je dan sa relacijom koja sadrži kosinus, dok je tip III relacijski povezan sa sinusom. Iz tog razloga očekujemo da bi naš filtar prije mogao biti tipa III (sinus funkcije imaju nule u nuli i kπ), pa prvo testiramo taj oblik.

$$H(e^{j\omega})=h[0]+h[1]\cdot e^{-j\omega}+h[2]\cdot e^{-j2\omega}+h[3]\cdot e^{-j3\omega}+h[4]\cdot e^{-j4\omega}=$$
$$e^{-j2\omega}\cdot\left(h[0]e^{-j2\omega}+h[4]e^{-j2\omega}+h[1]e^{-j\omega}+h[3]e^{-j\omega}+h[2]\right)$$

$$h[2]=0$$
$$h[4]=-h[0]$$
$$h[3]=-h[1]$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j2\omega}\cdot(2\cdot j\cdot h[0]\cdot\sin(2\omega)+2\cdot j\cdot h[1]\cdot\sin(\omega))=$$
$$e^{+j\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\omega\right)}\cdot(2\cdot h[0]\cdot\sin(2\omega)+2\cdot h[1]\cdot\sin(\omega))$$

Kao što se može vidjeti FIR filtar tipa III zadovoljava uvjete H(ω) = 0 za ω = 0 i za ω = π, naravno ukoliko je h[2] = 0 što uvijek vrijedi jer inače ne razmatramo tip III. Sličnim postupkom dobivamo da filtar nikako ne može biti tip I. Kako filtar ima nule za ω = 0 i za ω = π možemo odmah reći da nije niti NP niti VP filtar.
Sada, kad smo odredili red i tip filtra trebamo odrediti kako točno izgleda impulsni odziv. Za to iskorištavamo uvjete koji su nam zadani i relacije koje vrijede za tip III FIR filtra. Prvi uvjet kaže da amplitudna karakteristika prolazi kroz 2 za frekvenciju ω=π/2.

$$\left|H\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)\right|=4$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2+\mathrm{Im}(\omega)^2}=\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(2\cdot h[0]\cdot\sin(\pi)+2\cdot h[1]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}=4$$

$$\sqrt{4\cdot h[1]^2}=4$$

$$h[1]=|2|$$

Dozvoljena rješenja za prvi koeficijent su 2 i –2. Drugu nepoznanicu h[0] dobivamo iz drugog uvjeta koji nam je postavljen te Parsevalove relacije.

Parsevalova relacija dana je sljedećim izrazom:

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\cdot\omega}\right)\right|^2 d\omega=\sum_n h[n]^2$$

Kombinirajući uvjet i gore navedenu relaciju dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|H(e)\right|^2 d\omega=20\cdot\pi$$

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot 20\cdot\pi=\sum_n h[n]^2$$

$$\sum_n h[n]^2=10$$

$$2\cdot h[0]^2+2\cdot h[1]^2=10$$
$$h[0]^2+h[1]^2=5$$
$$h[0]^2=5-h[1]^2=1$$
$$h[0]=|1|$$

Očito je da rješenje nije jednoznačno jer imamo mogućnost izbora predznaka koeficijenata. Postoje četiri moguća rješenja koja zadovoljavaju zadane uvjete:

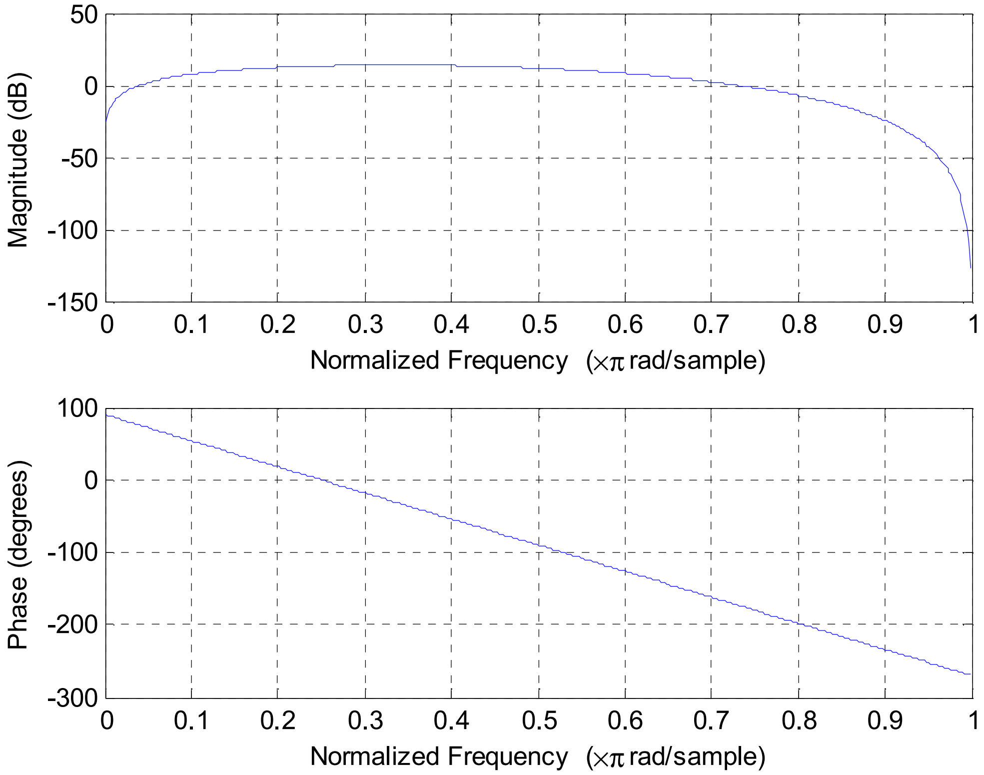
$h_1[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\}$
$h_2[n] = \{\underline{-1}, -2, 0, 2, 1\}$
$h_3[n] = \{\underline{1}, -2, 0, 2, -1\}$
$h_4[n] = \{\underline{-1}, 2, 0, -2, 1\}$

No ima li svako od tih rješenja faznu karakteristiku koja je zadana? Rješenja $h_2[n] = \{\underline{-1}, -2, 0, 2, 1\}$ i $h_3[n] = \{\underline{1}, -2, 0, 2, -1\}$ odmah otpadaju jer faza u nuli ima vrijednost $-\pi/2$. Sada nam preostaju rješenja $h_1[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\}$ i $h_4[n] = \{\underline{-1}, 2, 0, -2, 1\}$. Oba rješenja zadovoljavaju sve zadane uvjete te naš filtar nije jednoznačno određen (faza oba filtra je ista, a amplitudna karakteristika je simetrična oko frekvencije $\pi/2$):

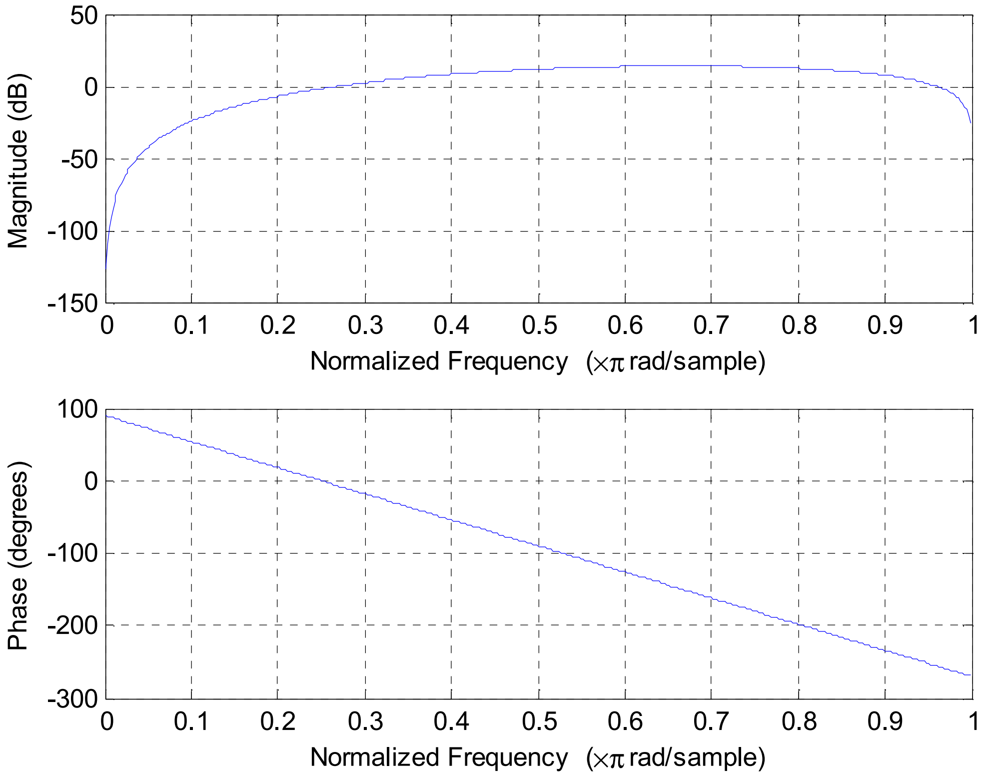
$$h_1[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\}$$
$$h_4[n] = \{\underline{-1}, 2, 0, -2, 1\}$$

Iz navedenog je očito da impulsni odziv nije jedinstven. Frekvencijske karakteristike oba filtra su prikazane na slikama.

Karakteristika filtra s impulsnim odzivom $h_1[n] = \{\underline{1}, 2, 0, -2, -1\}$ (odmotana faza):



Karakteristika filtra s impulsnim odzivom $h_4[n] = \{\underline{-1}, 2, 0, -2, 1\}$ (odmotana faza):



Marin Kovačić

7.* Odredi impulsni odziv i frekvencijsku karakteristiku pojasno-propusnog FIR filtra 35. reda koji ima granične frekvencije $\pi/4$ i $3\pi/4$. Koristi metodu projektiranja pomoću vremenskih otvora uz Hammingov vremenski otvor. Kakav je odnos frekvencijske karakteristike idealnog pojasno-propusnog filtra i FIR filtra dobivenog metodom vremenskih otvora. Kolika je valovitost u području propuštanja te koliko je gušenje u području gušenja? Koliko točno se granične frekvencije dobivenog FIR filtra poklapaju sa željenim vrijednostima? Nacrtaj realizaciju dobivenog filtra te odredi iznose koeficijenata ako filtar realiziramo na procesoru koji ima frakcionu aritemetiku uz 15 bitova (14 bitova i predznak).
Hammingov vremenski otvor određen je izrazom:

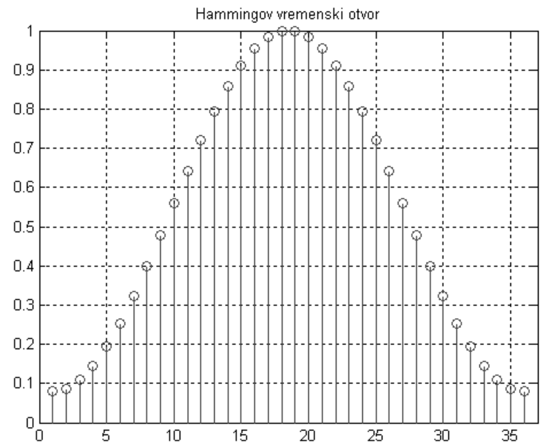
$$\omega[n] = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n + \pi}{N}\right), \quad n \in \left[-\frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}\right]$$

Prijenosna funkcija idealnog pojasno-propusnog filtra graničnih frekvencija ω_1 i ω_2 uz $\omega_1 < \omega_2$ je:

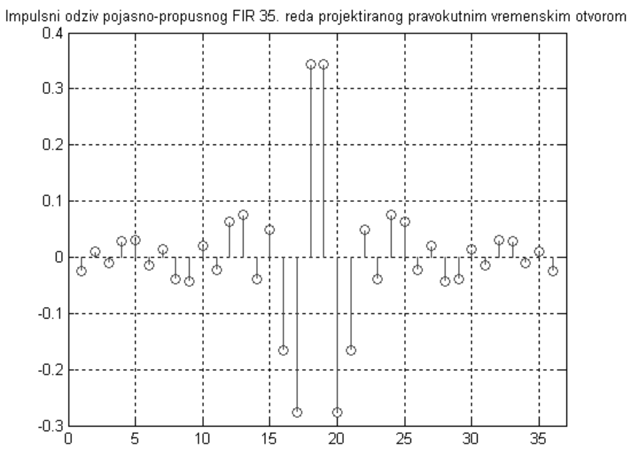
$$h_{BP}[n] = \frac{4}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{2n+1}{4}(\omega_2 + \omega_1)\right)\sin\left(\frac{2n+1}{4}(\omega_2 - \omega_1)\right)$$

<u>Rješenje:</u>
Broj uzoraka impulsnog odziva filtra koji projektiramo je L=N+1, odnosno u ovom konkretnom slučaju 36.

Hammingov vremenski otvor izgleda kao na slici:



Impulsni odziv idealnog pojasno-propusnog filtra je beskonačan. Množeći njegov impulsni odziv pravokutnim vremenski otvorom 35. reda dobijemo FIR filtar čiji impulsni odziv izgleda kao na slici:

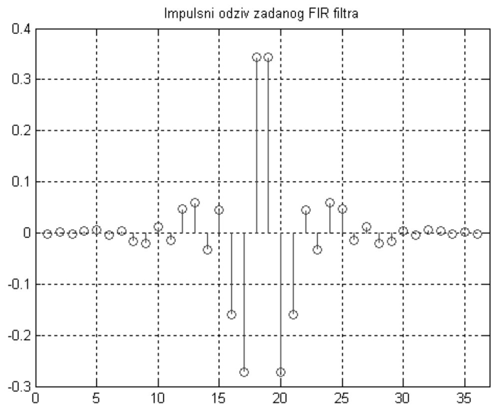


Impulsni odziv zadanog FIR filtra dobijemo množenjem prijenosne funkcije idealnog pojasno-propusnog filtra i Hammingovog vremenskog otvora.

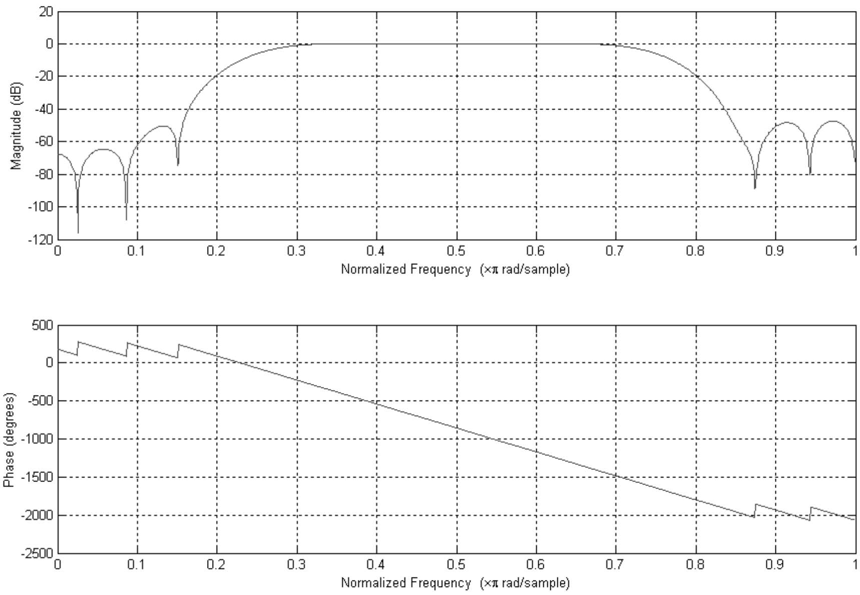
Izraz koji dobijemo glasi:

$$\omega[n] = \frac{4}{\pi(2n+1)}\left(0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{2\pi n + \pi}{N}\right)\right)\cos\left(\frac{2n+1}{4}(\omega_2 + \omega_1)\right)\sin\left(\frac{2n+1}{4}(\omega_2 - \omega_1)\right)$$

Rezultat množenja izgleda ovako:



Frekvencijske karakteristike projektiranog FIR filtra dane su slikom:

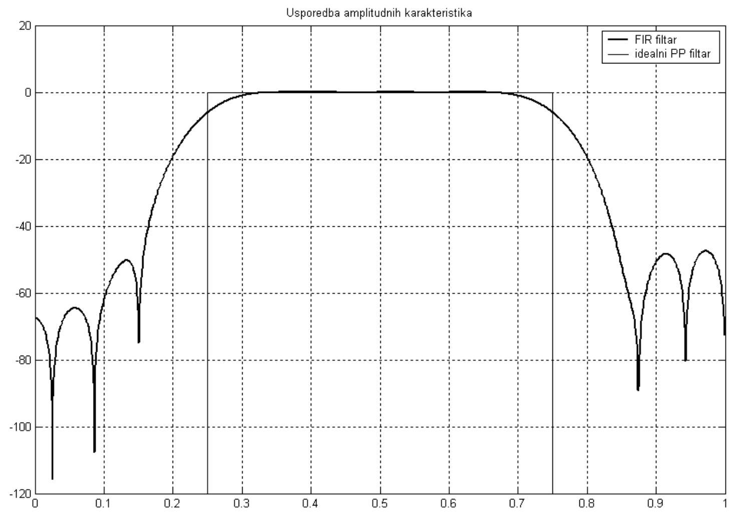


Valovitost projektiranog FIR filtra u području propuštanja iznosi δ=0.0035.
Gušenje u području gušenja za projektirani FIR filtar iznosi -47.5 dB.

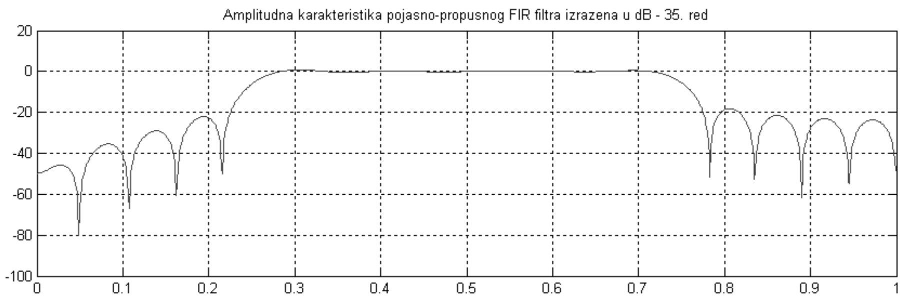
Granične frekvencije filtara:

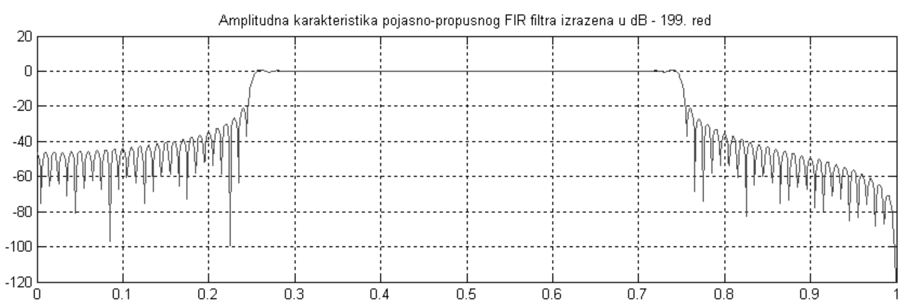
frekvencija	idealni filtar	projektirani FIR filtar
ω_1	$0.25\ \pi$	$0.2728\ \pi$
ω_2	$0.75\ \pi$	$0.7272\ \pi$

Na slici je prikazana usporedba amplitudnih karakteristika idealnog pojasno-propusnog filtra i projektiranog FIR filtra:

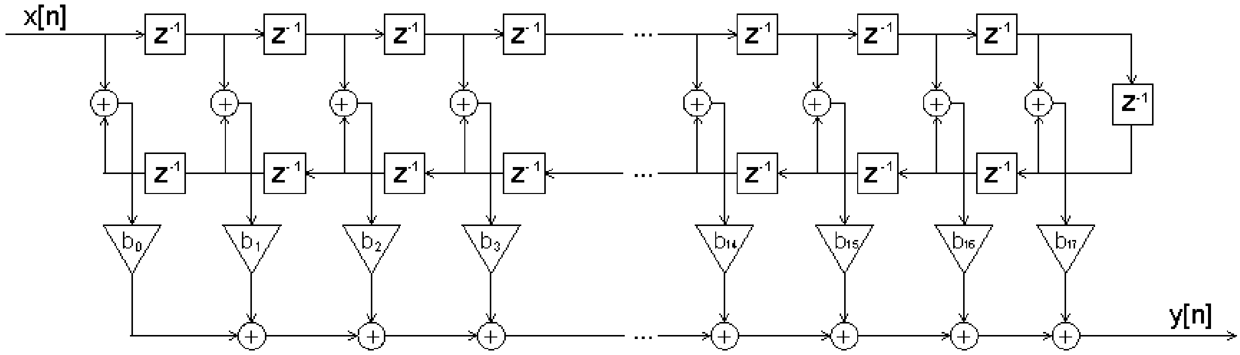


Vidljivo je da projektirani FIR filtar ima nešto uže područje propuštanja od idealnog pojasno-propusnog filtra. Povećanjem reda filtra karakteristike se približavaju idealnim, a to je moguće uočiti i iz primjera karakteristika FIR filtara 35. i 199. reda projektiranih pravokutnim vremenskim otvorom prikazanih na slici:





Direktna realizacija projektiranog FIR filtra izgleda kao na slici:



Ovakvom realizacijom broj množenja se smanji za N/2 ali se broj zbrajanja poveća za N/2. Kako je kod nekih DSP-ova operacija množenja dosta sporija od operacije zbrajanja time smanjujemo vrijeme potrebno za računanje odziva sustava.

Iznose koeficijenata za filtar realiziran na procesoru s frakcionom aritmetikom uz 15 bitova (14 bitova i predznak) uz zaokruživanje na najbliži cijeli broj računamo po izrazu:

$$b_n = \frac{round\left[2^{14} h[n]\right]}{2^{14}}$$

Koeficijenti su simetrični s obzirom na 0, no ovdje su prikazani uz koeficijente iz intervala [0,35] umjesto intervala [-18,17].

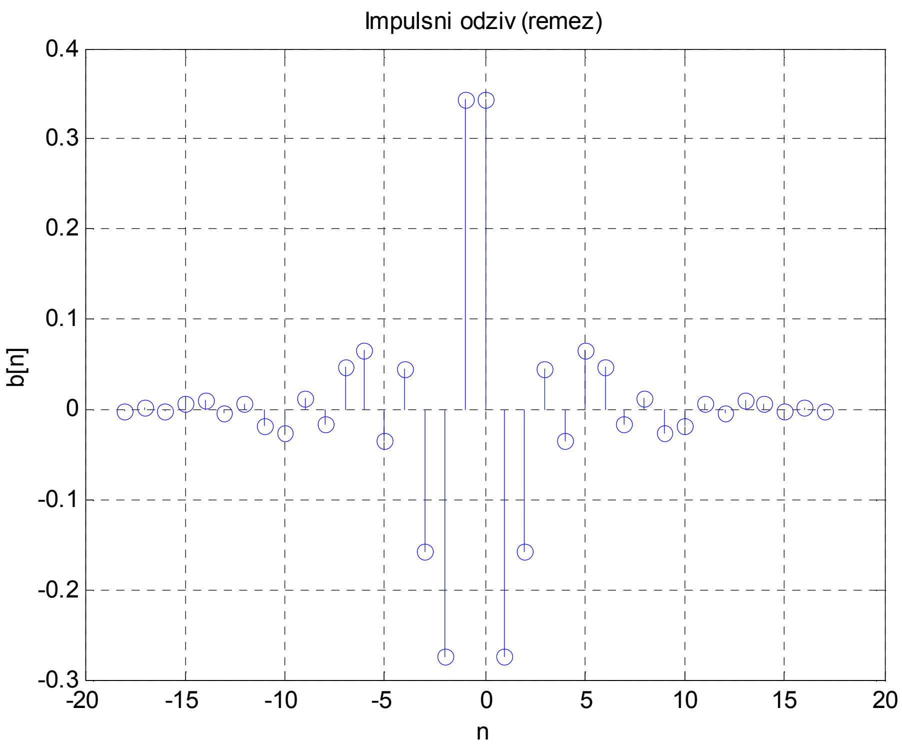
koeficijenti	koeficijenti bez frakc. aritm.	koef. u frakc. aritm.
b_0, b_{35}	-0.0019012	-0.0018921
b_1, b_{34}	0.00091242	0.00091553
b_2, b_{33}	-0.0012151	-0.0012207
b_3, b_{32}	0.0041622	0.0041504
b_4, b_{31}	0.0059638	0.0059814
b_5, b_{30}	-0.0034894	-0.003479
b_6, b_{29}	0.0048238	0.0048218
b_7, b_{28}	-0.015758	-0.015747
b_8, b_{27}	-0.020937	-0.020935
b_9, b_{26}	0.011362	0.011353
b_{10}, b_{25}	-0.014754	-0.014771
b_{11}, b_{24}	0.046119	0.046143
b_{12}, b_{23}	0.059995	0.059998
b_{13}, b_{22}	-0.032842	-0.032837
b_{14}, b_{21}	0.044895	0.044922
b_{15}, b_{20}	-0.15878	-0.15875
b_{16}, b_{19}	-0.27267	-0.27264
b_{17}, b_{18}	0.3439	0.34387

8. Koristeći Parks-McClellanov algoritam upotrebom MATLAB-a dizajniraj minimax filtar ekvivalentan filtru iz prethodnog zadatka. Neka su težine za valovitosti u područjima gušenja i propuštanja jednake. Za prijelazna područja mogu se odabrati intervali od 0.17π do 0.33π i 0.067π do 0.83π. Usporedite odziv dobivenog minimax filtra s filtrom iz prethodnog zadatka.

Za realizaciju filtra upotrebom Parks-McClellanovog algoritma koristit ćemo već gotovu MATLAB funkciju **remez** u koj je taj algoritam već implementiran.

- Sintaksa za filtar korištenjem remez funkcije:

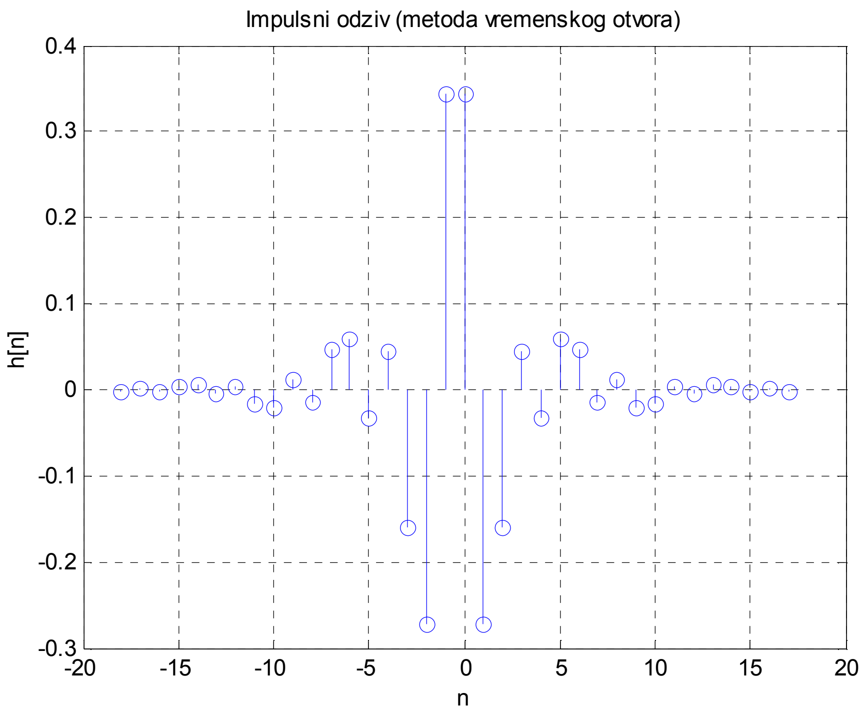
```
N=35;                          %red filtra
f=[0 0.17 0.33 0.67 0.83 1];   %vektor s definicijom frekvencijskih područja propuštanja i
                               %gušenja, pogledaj zadane intervale u tekstu
m=[0 0 1 1 0 0];               %vektor s definicijama o razini amplituda na %frekvencijama u vektoru
                               f
w=[1 1 1];                     %omjeri valovitosti u područjima propuštanja i gušenja
b=remez(N,f,m,w);              %poziv funkcije remez koja vraća impulsni odziv

figure                         %prikaz impulsnog odziva
stem(S,b)
xlabel('n')
ylabel('h[n]')
title('Impulsni odziv (remez)')
grid on
```



Usporedimo ovaj impulsni odziv s impulsnim odzivom filtra projektiranog metodom vremenskog otvora iz prethodnog zadatka.

- Sintaksa za filtar korištenjem metode vremenskog otvora:

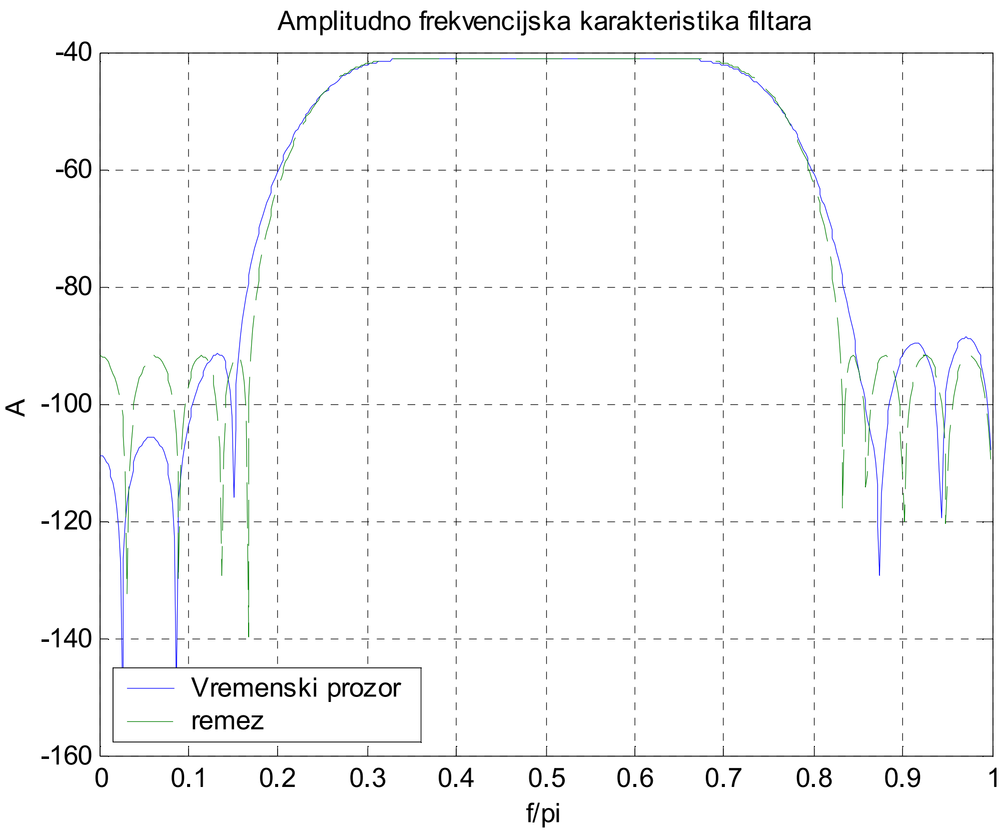
```
N=35;
Wd=pi/4;
Wg=3*pi/4;

%vektor vremenskih trenutaka
S=[-(N+1)/2:(N-1)/2];
L=N+1;            %duljina impulsnog odziva

for n=1:L
%vremenski otvor (Hamming)
W(n)=0.54+0.46*cos( 2*pi*(S(n)+0.5)/N );
%impulsni odziv idealnog PP filtra
Hi(n)=2/( pi*(S(n)+0.5) )*( cos( (S(n)+0.5)*(Wd+Wg)/2 )*sin( (S(n)+0.5)*(Wg-Wd)/2 ) );
%impulsni odziv filtra
h(n)=W(n)*Hi(n);

end

figure            %prikaz impulsnog odziva
stem(S,h)
xlabel('n')
ylabel('h[n]')
title('Impulsni odziv (vrem otvor)')
grid on
```



Primijetimo kako su impulsni odzivi prostim okom gledano gotovo identični. Pogledajmo u frekvencijsku domenu:

- Sintaksa:

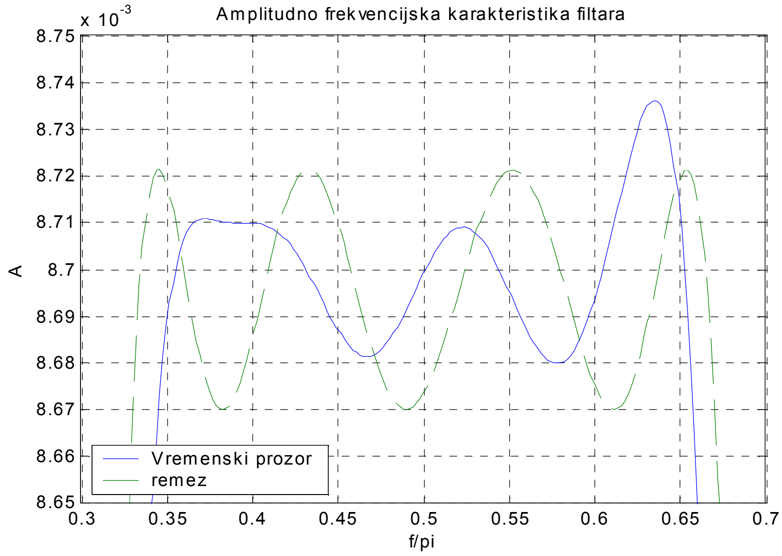
```
[Hp,Wp]=freqz(h,'s');
[Hb,Wp]=freqz(b,'s');

figure
plot(Wp/pi,20 * log10(abs(Hp)),'-',Wp/pi,20 * log10(abs(Hb)),'--')
legend('Vremenski prozor','remez',3)
xlabel('f/pi')
ylabel('dB')
title('Amplitudno frekvencijska karakteristika filtara')
grid on
```



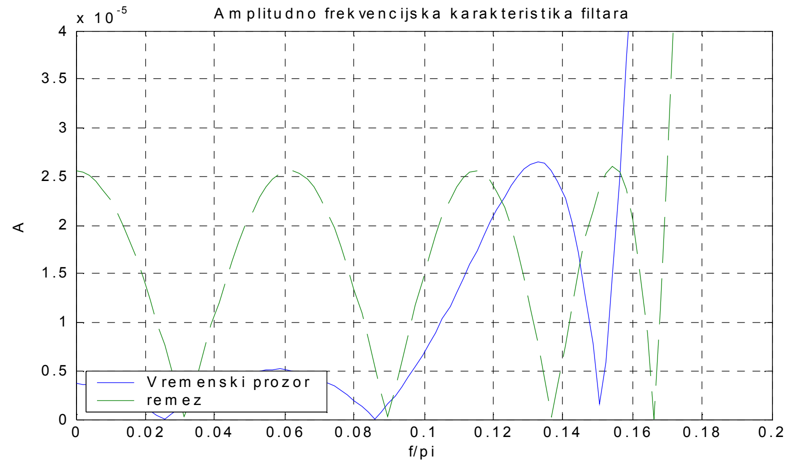
Primijetimo da filtar projektiran koristeći Parks-McClellanov algoritam ima strmiju prijelaznu karakteristiku, dok u području gušenja ; gušenje se ne mijenja udaljavanjem frekvencija od područja propuštanja, jer mu je valovitost jednolika. Za razliku od filtra projektiranog metodom vremenskog otvora gdje se gušenje povećava u području gušenja.

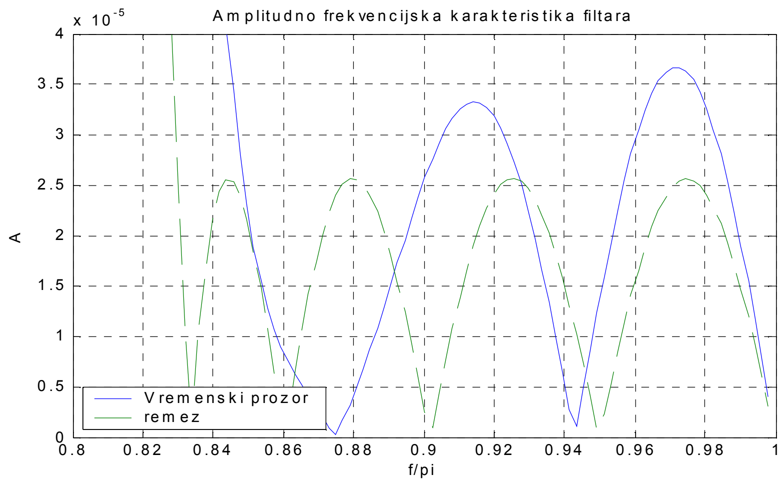
U narednim slikama primijetite kako filtar koristeći P-M algoritam ima jednoliku valovitost u području propuštanja i gušenja.

Promotrimo pobliže područje propuštanja:



Područje gušenja:





9. Za svaku od zadanih prijenosnih funkcija odredite položaj polova i nula u z-ravnini te ispitajte stabilnost sustava. Također skicirajte amplitudnu frekvencijsku karakteristiku.

a) $H(z) = \dfrac{1 - r^{-1} z^{-1}}{1 - r z^{-1}}, \; 0 < r < 1$

Nule

$1 - r^{-1} z^{-1} = 0 \,\big|\cdot rz$

$rz = 1$

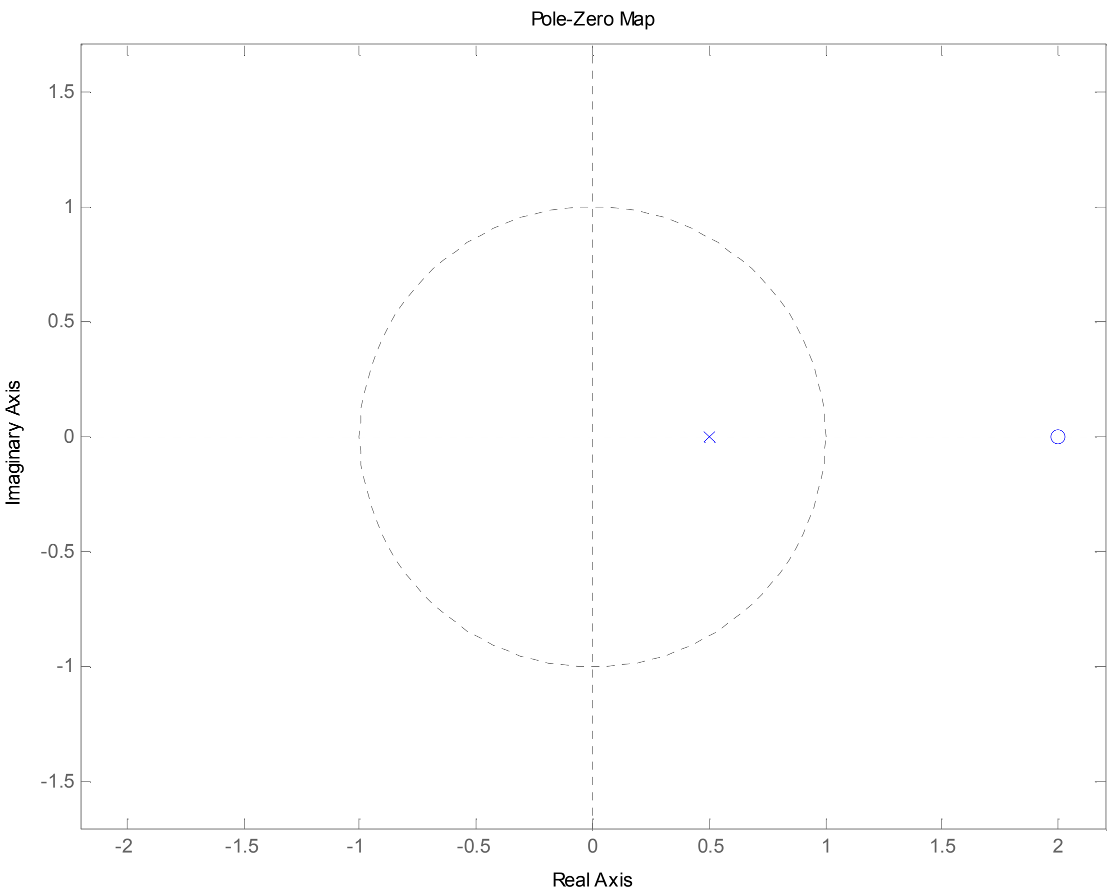
$z_n = \dfrac{1}{r}$

Polovi

$1 - r z^{-1} = 0 \,\big|\cdot z$

$z - r = 0$

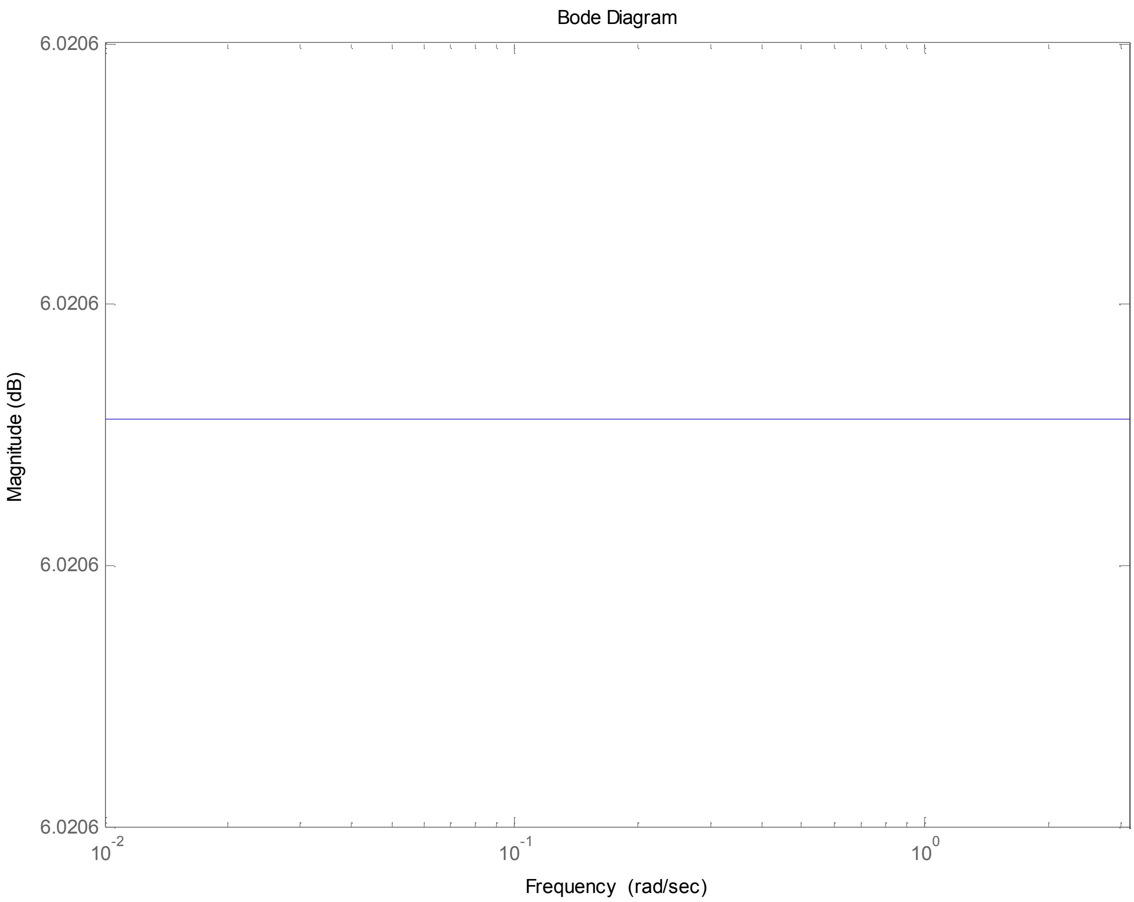
$z_p = r$



Raspored polova i nula za prijenosnu funkciju pod a)

Kako r raste, pol i nula se približavaju jediničnoj kružnici. Pol je uvijek unutar jedinične kružnice, a u graničnom slučaju se poništava s nulom, tako da je sustav uz zadane uvjete uvijek stabilan.

Također je, zbog činjenice da je nula inverzija pola s obzirom na jediničnu kružnicu, sustav svepropustan, pa mu je amplitudna frekvencijska karakteristika konstanta.



Amplitudna frekvencijska karakteristika filtra pod a)

b) $H(z)=\frac{1-r}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-rz^{-1}}$, $0<r<1$

Nule

$1+z^{-1}=0 \,\big|\cdot z$

$z+1=0$

$z_n=-1$

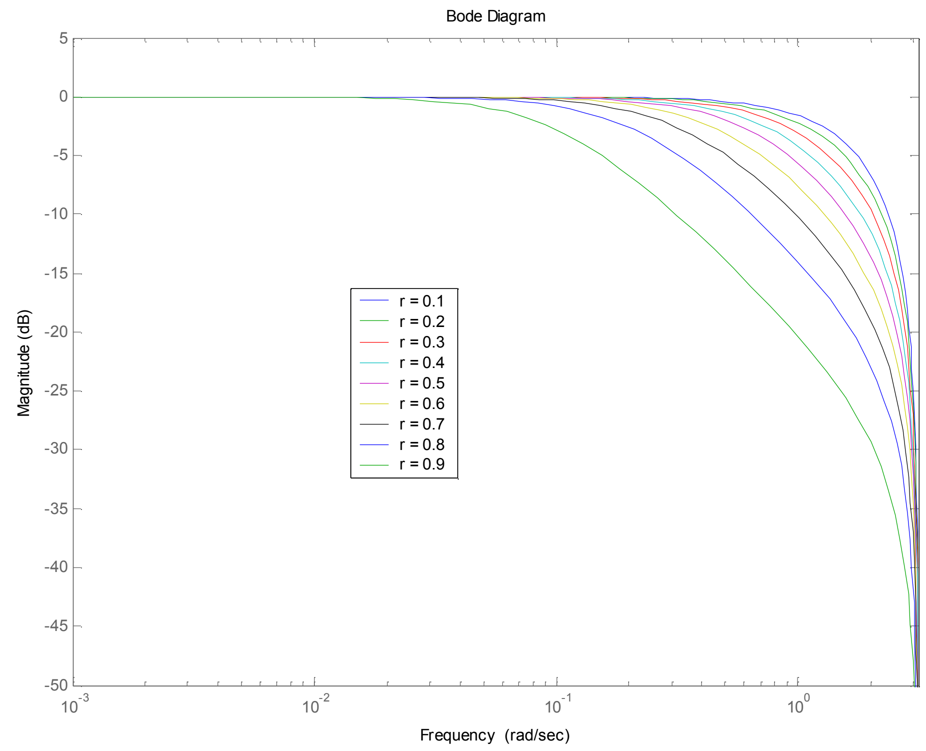
Polovi

$1-rz^{-1}=0 \,\big|\cdot z$

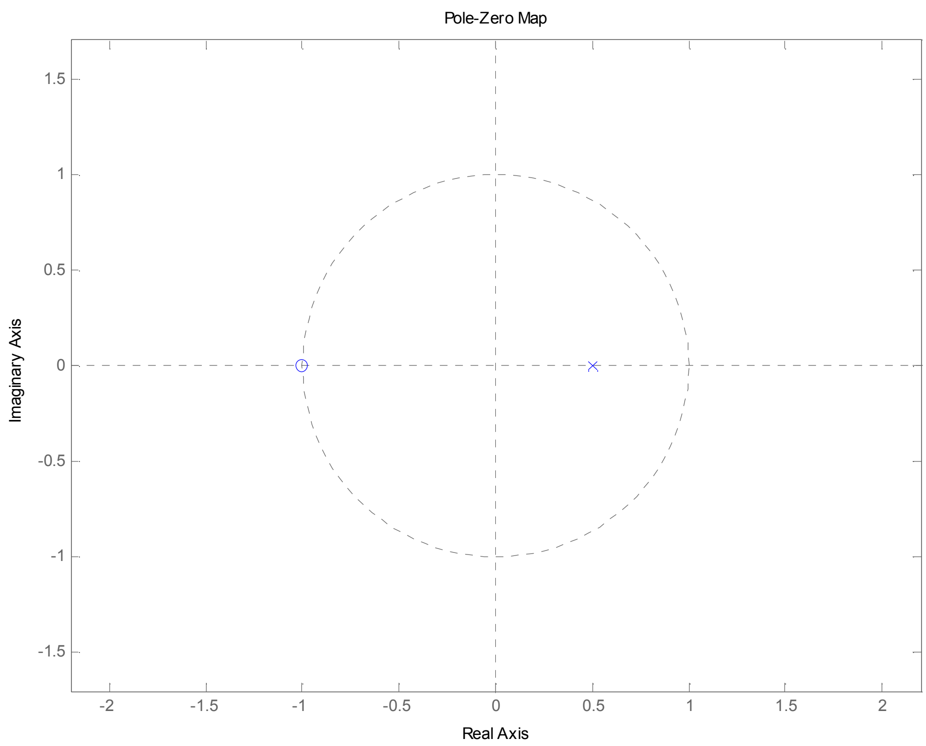
$z-r=0$

$z_p=r$

Sustav je uvijek stabilan, jer je pol uvijek unutar jedinične kružnice.



Amplitudna i fazna frekvencijska karakteristika za prijenosnu funkciju pod b)



Položaj polova i nula za b)

c) $H(z)=\frac{1+r}{2}\frac{1-z^{-1}}{1-rz^{-1}},\ 0<r<1$

Nule

$1-z^{-1}=0\ \big|\cdot z$

$z-1=0$

$z_n=1$

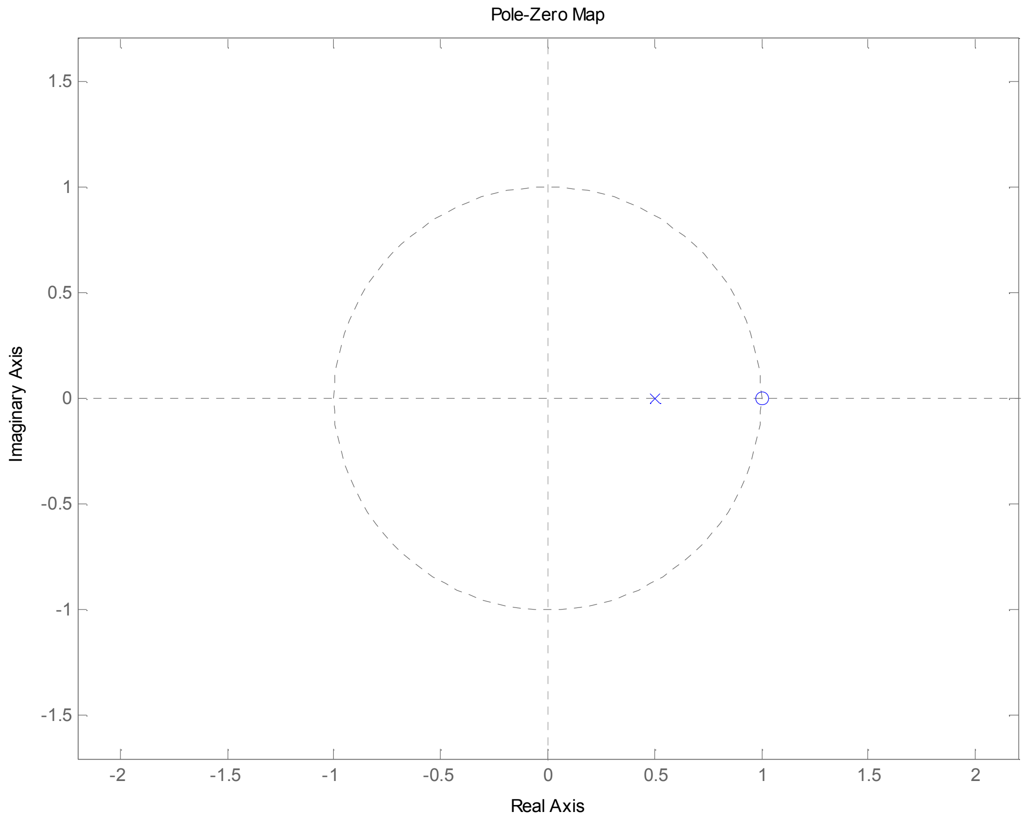
Polovi

$1-rz^{-1}=0\ \big|\cdot z$

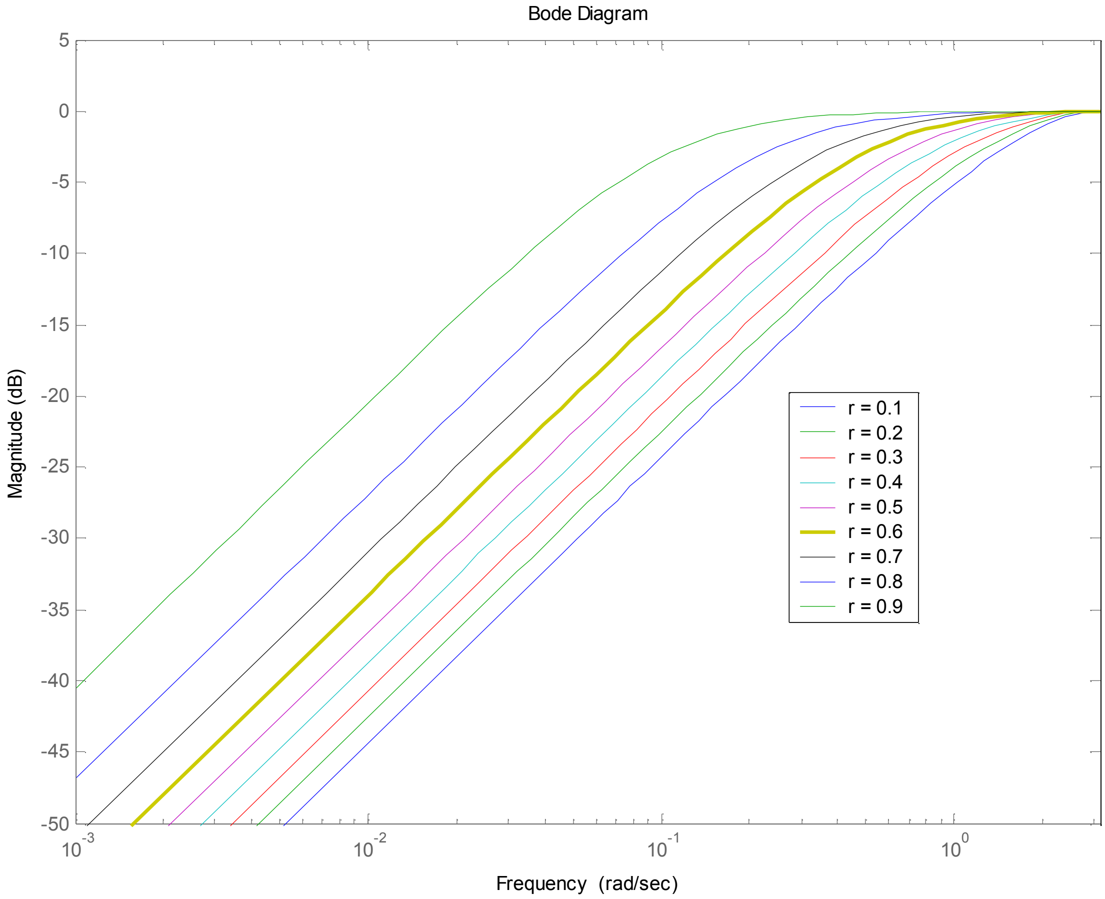
$z-r=0$

$z_p=r$

Sustav je uvijek stabilan uz uvjete zadane na *r*.



Položaj polova i nula za c)



Amplitudno frekvencijska karakteristika za c)

Zadane tri prijenosne funkcije predstavljaju upravljive sustave 1. reda na čije karakteristike možemo utjecati mijenjanjem parametra *r*. Svi sustavi pri tome uvijek ostaju stabilni.

10. Zadatak

$$H(z)=\frac{z^{-2}-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha}{\alpha z^{-2}-\beta(1+\alpha)z+1}=\frac{z^{-2}-\beta(1+\alpha)z^{-1}+\alpha}{z^{-2}(z^{2}-\beta(1+\alpha)z+\alpha)}=\left|\begin{array}{l}a=\beta(1+\alpha)\\ b=(\beta^{2}(1+\alpha)^{2}-\alpha)^{1/2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{(z^{-1}-(a+jb))(z^{-1}-(a+jb))}{z^{-2}(z-(a+jb))(z-(a+jb))}\qquad od\,tuda\rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|=\left|\frac{(e^{-j\omega}-(a+jb))(e^{-j\omega}-(a+jb))}{e^{-j2\omega}(e^{-j\omega}-(a+jb))(e^{-j\omega}-(a+jb))}\right|=\left|\left|e^{j\omega}\right|=1\right|=$$

$$=\frac{\left|\cos(\omega)-a-j(\sin(\omega)+b)\right|\left|\cos(\omega)-a-j(\sin(\omega)+b)\right|}{\left|\cos(\omega)-a+j(\sin(\omega)+b)\right|\left|\cos(\omega)-a+j(\sin(\omega)+b)\right|}=1$$

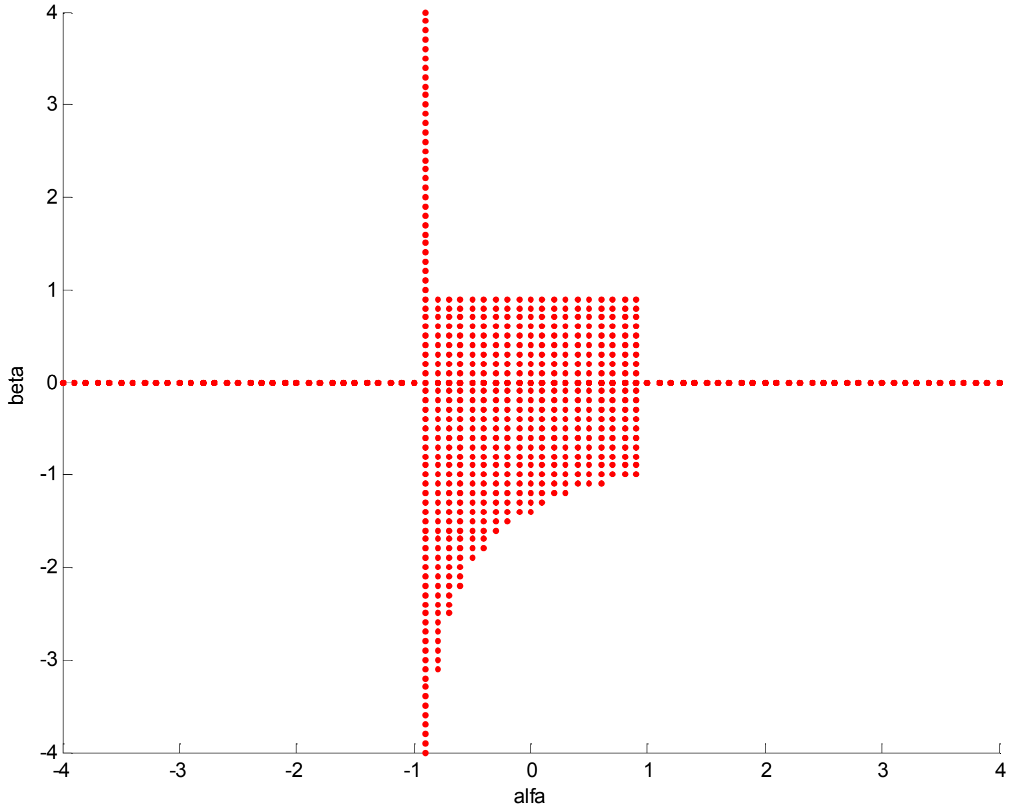
$$20\log(1)=0;$$

Amplituda je konstantna iznosa 1.
Polovi i nule su međusobno recipročnih modula, koji su funkcije parametara α, β.

Da bi sustav bio stabilan polovi moraju biti unutar jedinične kružnice, dakle njihov modul mora biti manji od jedan:

$$\sqrt{a^{2}+b^{2}}<1\qquad\rightarrow\qquad\sqrt{\frac{\beta(1+\alpha)}{2}-\alpha}<1$$

Područje za koje to vrijedi je nacrtano na slici:



Slika 10.1. Parametarska ravnina.

Petar Mostarac

11. Neka su a i b realni brojevi za koje vrijedi $|a|<1$ i $|b|<1$. Odredi i usporedi amplitudne i fazne karakteristike sustava:

$$H_1(z)=\frac{z+b}{z+a} \text{ i } H_2(z)=\frac{bz+1}{z+a}$$

Rješenje:

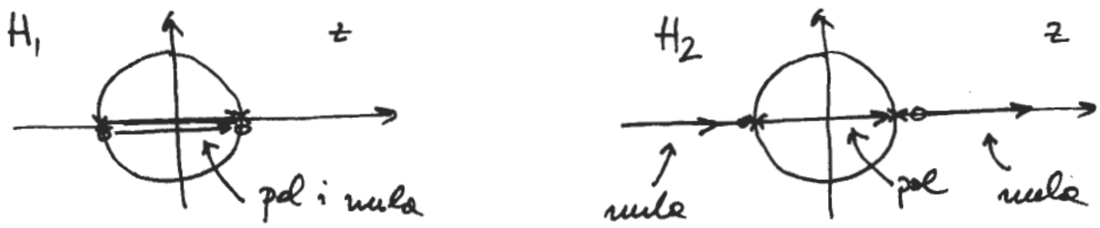
Nultočke i polovi sustava H_1 su:

$$p_1=-a,\ n_1=-b$$

Nultočke i polovi sustava H_2 su:

$$p_2=-a,\ n_2=-\frac{1}{b}$$

Oba sustava su stabilna:



H_1 je sustav sa minimalnom fazom.

Uvrštavanjem $e^{j\omega}$ u H_1 i H_2 dobivamo:

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{j\omega}+b}{e^{j\omega}+a} \text{ i } H_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{be^{j\omega}+1}{e^{j\omega}+a}$$

Odredimo amplitudu:

$$\begin{aligned}
A_1^2(\omega)&=\left|\frac{e^{j\omega}+b}{e^{j\omega}+a}\right|^2=\left|\frac{b+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}\right|^2\\
&=\frac{b^2+2b\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)}{a^2+2a\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)}\\
&=\frac{b^2+2b\cos(\omega)+1}{b^2+2b\cos(\omega)+1}
\end{aligned}$$

$$A_2^2(\omega) = \left|\frac{be^{j\omega}+1}{e^{j\omega}+a}\right|^2 = \left|e^{j\omega}\frac{b+e^{-j\omega}}{e^{j\omega}+a}\right|^2 = \left|\frac{b+\cos(\omega)-j\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)+j\sin(\omega)}\right|^2$$

$$= \frac{b^2+2b\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)}{a^2+2a\cos(\omega)+\cos^2(\omega)+\sin^2(\omega)}$$

$$= \frac{b^2+2b\cos(\omega)+1}{b^2+2b\cos(\omega)+1}$$

Vidimo da vrijedi $A_1(\omega) = A_2(\omega)$. Odredimo sada fazne karakteristike:

$$\phi_1(\omega) = arctg\left(\frac{\sin(\omega)}{b+\cos(\omega)}\right) - arctg\left(\frac{\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)}\right)$$

$$\phi_2(\omega) = -\omega - arctg\left(\frac{\sin(\omega)}{b+\cos(\omega)}\right) - arctg\left(\frac{\sin(\omega)}{a+\cos(\omega)}\right)$$

Fazne karakteristike se razlikuju: drugi sustav ima veći fazni pomak.

Zadatak 12

Odredi ampitudnu frekvencijsku karakteristiku vremenski diskretnog sustava opisanog prijenosnom funkcijom oblika:

$$H(z)=\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}+d_{N-2}z^{-2}+\ldots+d_1z^{-N+1}+z^{-N}}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}+\ldots+d_{N-1}z^{-N+1}+d_Nz^{-N}}$$

Rješenje:

$$H(z)=\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}+d_{N-2}z^{-2}+\ldots+d_1z^{-N+1}+z^{-N}}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}+\ldots+d_{N-1}z^{-N+1}+d_Nz^{-N}}$$

$$H(z)=\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}+d_{N-2}z^{-2}+\ldots+d_1z^{-N+1}+z^{-N}}{z^{-N}(d_N+d_{N-1}z+d_{N-2}z^{2}+\ldots+d_1z^{N-1}+z^{-N})}$$

Polinom N-tog reda ima K realnih i (N-K)/2 parova konjugirano kompleksnih rješenja.

$$H(z)=\frac{(z^{-1}-\alpha_1)\ldots(z^{-1}-\alpha_K)(z^{-1}-(\alpha_{K+1}+j\beta_{K+1}))(z^{-1}-(\alpha_{K+1}-j\beta_{K+1}))\ldots(z^{-1}-(\alpha_{(N-K)/2}-j\beta_{(N-K)/2}))}{z^{-N}(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_K)(z-(\alpha_{K+1}+j\beta_{K+1}))(z-(\alpha_{K+1}-j\beta_{K+1}))\ldots(z-(\alpha_{(N-K)/2}-j\beta_{(N-K)/2}))}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\left|e^{-j\omega}-\alpha_1\right|\ldots\left|e^{-j\omega}-\alpha_K\right|\left|e^{-j\omega}-(\alpha_{K+1}+j\beta_{K+1})\right|\left|e^{-j\omega}-(\alpha_{K+1}-j\beta_{K+1})\right|\ldots\left|e^{-j\omega}-(\alpha_{(N-K)/2}-j\beta_{(N-K)/2})\right|}{\left|e^{-jN\omega}\right|\left|e^{j\omega}-\alpha_1\right|\ldots\left|e^{j\omega}-\alpha_K\right|\left|e^{j\omega}-(\alpha_{K+1}+j\beta_{K+1})\right|\left|e^{j\omega}-(\alpha_{K+1}-j\beta_{K+1})\right|\ldots\left|e^{j\omega}-(\alpha_{(N-K)/2}-j\beta_{(N-K)/2})\right|}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left|e^{-jN\varpi}\right|=1\\
&\frac{\left|e^{-j\varpi}-(\alpha+j\beta)\right|\left|e^{-j\varpi}-(\alpha-j\beta)\right|}{\left|e^{j\varpi}-(\alpha+j\beta)\right|\left|e^{j\varpi}-(\alpha-j\beta)\right|}=\frac{\left|\cos\omega-\alpha-j(\sin\omega+\beta)\right|\left|\cos\omega-\alpha-j(\sin\omega-\beta)\right|}{\left|\cos\omega-\alpha+j(\sin\omega-\beta)\right|\left|\cos\omega-\alpha+j(\sin\omega+\beta)\right|}=1\\
&\frac{\left|e^{-j\varpi}-\alpha\right|}{\left|e^{j\varpi}-\alpha\right|}=\frac{\left|\cos\omega-\alpha-j\sin\omega\right|}{\left|\cos\omega-\alpha+j\sin\omega\right|}=1
\end{aligned}\right\}\ \left|H(e^{j\omega})\right|=1$$

Prijenosna funkcija ovog oblika ima na frekvencijama ovisnim o iznosima koeficijenata polinoma po nulu i pol recipročnog modula. Amplitudna karakteristika je konstantno 1.

Vedrana Spudić

13. Vremenski diskretni sustav opisan je prijenosnom funkcijom

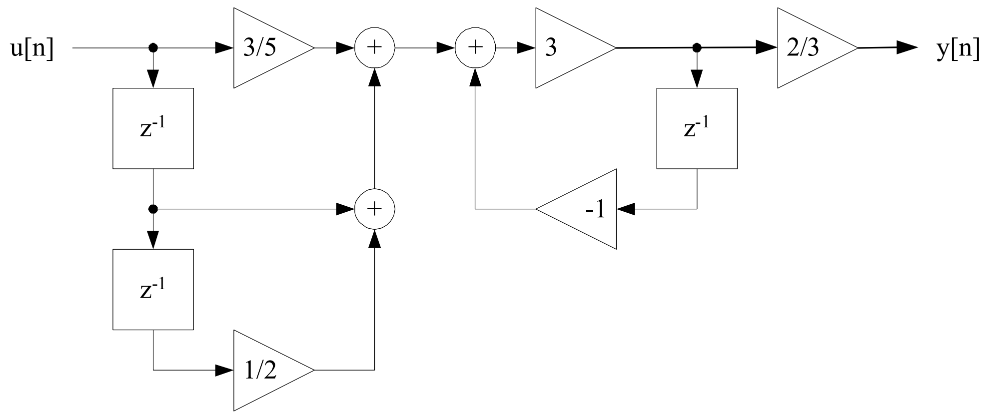
$$H(z)=\frac{1{,}2+2z^{-1}+z^{-2}}{1+3z^{-1}}$$

Nacrtajte direktnu forme I, I_t, II i II_t. Za svaku od realizacija odredite skalirane koeficijente (vrijednosti unutar intervala [-1, 1]).

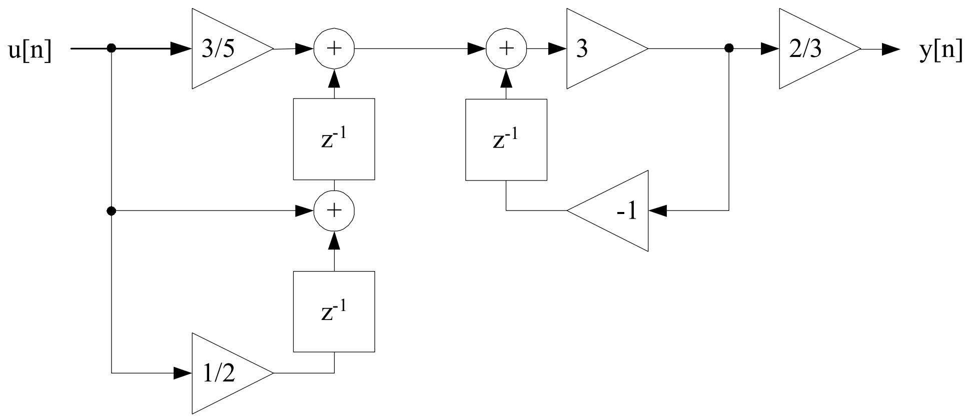
RJEŠENJE (Riješio Tomislav Gracin):
Skalirani koeficijenti se odrede tako da se iz brojnika i nazivnika izvuče najveći broj te nakon toga se dobije prijenosna funkcija sa skaliranim koeficijentima. Iz prijenosne funkcije tada lagano dobijemo forme I, I_t, II i II_t.

$$H(z)=\frac{1{,}2+2z^{-1}+z^{-2}}{1+3z^{-1}}=\frac{2}{3}\frac{\frac{3}{5}+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2}}{\frac{1}{3}+z^{-1}}$$

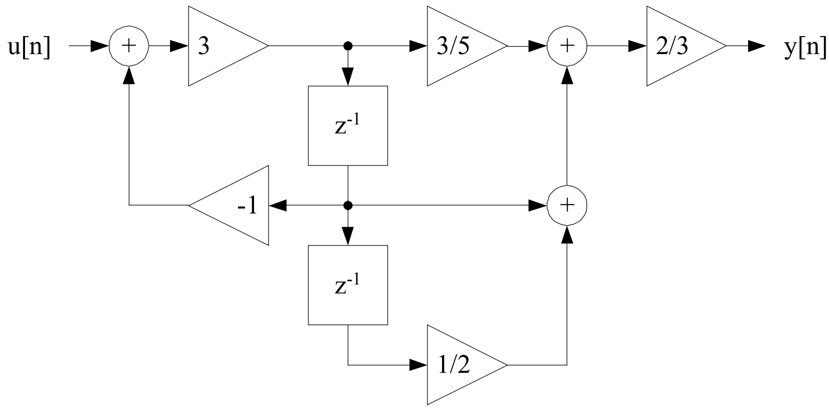
Direktna forma I



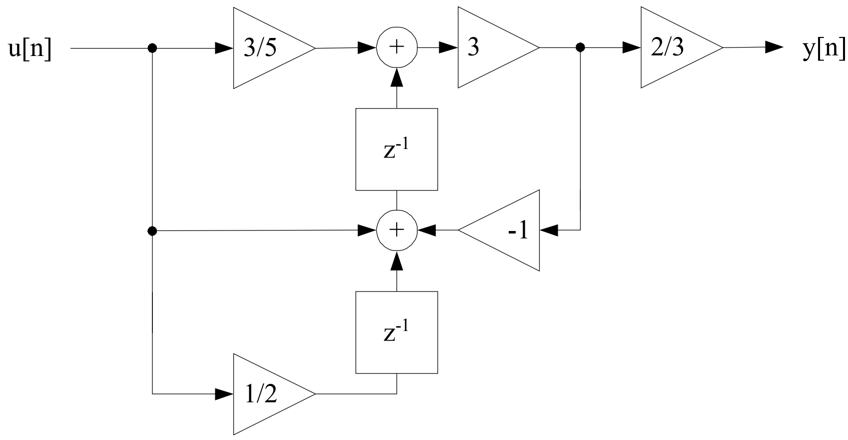
Direktna forma I_t



Direktna forma II



Direktna forma II_t



14. Odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom iz prototipa

$$H(s)=\frac{4s^2+10s+8}{(s^2+2s+3)(s+1)}$$

Neka je $T = 0{,}2$.

RJEŠENJE:
Bilinearna transformacija dana je izrazom:

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

i vrijedi:

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}\;.$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$H(z)=\frac{4\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2+10\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+8}{\left(\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2+2\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+3\right)\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+1\right)}=\frac{400\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}+100\frac{z-1}{z+1}+8}{\left(100\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}+20\frac{z-1}{z+1}+3\right)\left(10\frac{z-1}{z+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{\frac{508z^2-784z+308}{(z+1)^2}}{\frac{1353z^3-3241z^2+2659z-747}{(z+1)^3}}=\frac{508z^2-276z^2-476z+308}{1353z^3-3241z^2+2659z-747}$$

Riješila Željka Lučev

15. Korištenjem bilinearne transformacije uz T = 2 odredi prijenosnu funkciju niskopropusnog filtra granične frekvencije $\pi/3$. Neka je prototipni filtar Butterworthov filtar drugog reda.

RJEŠENJE:

Kontinuirana frekvencija Ω_g i diskretna frekvencija ω_{NP} povezane su izrazom:

$$\Omega_g = \frac{2}{T} tg\left(\frac{\omega_{NP}}{2}\right) = \frac{2}{2} tg\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Prvo računamo prototipni analogni niskopropusni filtar drugog reda granične frekvencije $\Omega_g = \frac{\sqrt{3}}{3}$ uz Butterworthovu aproksimaciju. Prijenosna funkcija snage niskopropusnog filtra je oblika:

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^{2N}}.$$

Zamjenom $\Omega = -js$ dobiva se:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{-js}{\Omega_g}\right)^{2N}} = \frac{1}{1+\left(-js\sqrt{3}\right)^4} = \frac{1}{1+9s^4}.$$

Polovi dobivenog kontinuiranog sustava dobiju se kao rješenja jednadžbe $1+9s^4 = 0$:

$$s_1 = -\frac{1+j}{\sqrt{6}} \qquad s_2 = \frac{1+j}{\sqrt{6}}$$

$$s_3 = -\frac{1-j}{\sqrt{6}} \qquad s_4 = \frac{1-j}{\sqrt{6}}$$

i jednoliko su razmješteni po kružnici polumjera Ω_g. Polovi prijenosne funkcije $H(s)$ su s_1 i s_3, koji se nalaze u lijevoj poluravnini, a polovi s_2 i s_4 iz desne poluravnine odgovaraju prijenosnoj funkciji $H(-s)$. Prema tome, prijenosna funkcija prototipnog Butterworthovog filtra drugog reda glasi:

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_3)} = \frac{1}{\left(s+\frac{1+j}{\sqrt{6}}\right)\left(s+\frac{1-j}{\sqrt{6}}\right)} = \frac{3}{3s^2+\sqrt{6}s+1}.$$

Konačno, prijenosna funkcija digitalnog filtra dobije se zamjenom s sa $\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$:

$$H(z) = \frac{3}{3\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\sqrt{6}\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+1} = \frac{3z^2+6z+3}{\left(4+\sqrt{6}\right)z^2-4z+4-\sqrt{6}}.$$

Riješila Željka Lučev

16. Na filtar iz prethodnog zadatka primijeni frekvencijsku transformaciju u z-ravnini tako da dobiveni filtar bude visokopropusni filtar granične frekvencije $5\pi/8$. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku dobivenog filtra.

RJEŠENJE:

Prijenosna funkcija niskopropusnog filtra iz prethodnog zadatka glasi:

$$H_{NP}(z)=\frac{3z^2+6z+3}{\left(4+\sqrt{6}\right)z^2-4z+4-\sqrt{6}}=\frac{3+6z^{-1}+3z^{-2}}{4+\sqrt{6}-4z^{-1}+\left(4-\sqrt{6}\right)z^{-2}}.$$

Preslikavanje NP u VP filtar dano je izrazom:

$$\cancel{z_{NP}^{-1}=\frac{z_{VP}^{-1}+\alpha}{1+\alpha z_{VP}^{-1}}},\qquad z_{NP}^{-1}=-\frac{z_{VP}^{-1}+\alpha}{1+\alpha z_{VP}^{-1}}$$

gdje je z_{NP} kompleksna varijabla vezana uz NP filtar, a z_{VP} kompleksna varijabla vezana uz VP filtar. Pomoću koeficijenta α određujemo odnos graničnih frekvencija NP i VP filtra:

$$\alpha=\frac{-\cos\left(\dfrac{\omega_{NP}+\omega_{VP}}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\omega_{NP}-\omega_{VP}}{2}\right)}.$$

Za zadane $\omega_{NP}=\dfrac{\pi}{3}$, a $\omega_{VP}=\dfrac{5\pi}{8}$ dobivamo:

$$\alpha=\frac{-\cos\left(\dfrac{\pi/3+5\pi/8}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi/3-5\pi/8}{2}\right)}=\frac{-\cos\left(\dfrac{23\pi}{\cancel{24}\,48}\right)}{\cos\left(-\dfrac{7\pi}{\cancel{24}\,48}\right)}=\cancel{1{,}629}=-0{,}0729$$

Sada je:

$$z_{NP}^{-1}=\underset{\uparrow\ \text{fali minus}}{\frac{z_{VP}^{-1}+\alpha}{1+\alpha z_{VP}^{-1}}}=\cancel{\frac{z_{VP}^{-1}+1{,}629}{1+1{,}629z_{VP}^{-1}}}=-\frac{z_{VP}^{-1}-0{,}0729}{1-0{,}0729z_{VP}^{-1}}$$

te je prijenosna funkcija traženog VP filtra:

$$H_{VP}(z)=\cancel{\frac{3+6\dfrac{z^{-1}+1{,}629}{1+1{,}629z^{-1}}+3\left(\dfrac{z^{-1}+1{,}629}{1+1{,}629z^{-1}}\right)^2}{4+\sqrt{6}-4\dfrac{z^{-1}+1{,}629}{1+1{,}629z^{-1}}+\left(4-\sqrt{6}\right)\left(\dfrac{z^{-1}+1{,}629}{1+1{,}629z^{-1}}\right)^2}}=\cancel{\frac{16{,}884+36{,}737z^{-1}+19{,}279z^{-2}}{4{,}048+11{,}448z^{-1}+12{,}143z^{-2}}}$$

$$H_{VP}(z)=\frac{3{,}4535-6{,}9070z^{-1}+3{,}4535z^{-2}}{6{,}1660+2{,}8545z^{-1}+1{,}2931z^{-2}}$$

Riješila Željka Lučev

18. Metodom jednakog impulsnog odziva odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog iz prototipa

$$H(s) = \frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 3)}.$$

Neka je $T = 0{,}1$.

Metodom jednakog impulsnog odziva postižemo da nam diskretni sustav ima jednaki impulsni odziv kao i kontinuirani sustav, samo naravno otipkani. Da bi to postigli, trebamo prijenosnu funkciju iz s-domene prebaciti u z-domenu, koristeći Z-transformaciju. Kako je Z-transformacija proračunata za neke tipične oblike prijenosnih funkcija, to nam je u biti i najbrži način proračuna iste. Stoga je postupak rješavanja ovog zadatka u biti jako jednostavan, rastaviti H(s) na parcijalne razlomke i zatim svaki taj razlomak transformirati.

Da bi rastavili H(s) na parcijalne razlomke moramo prvo proračunati sve korijene nazivnika. Odmah uočavamo da će nam svi korijeni biti kompleksni:

$$s^2 + s + 1 = (s - s_1)\cdot(s - s_2)$$
$$s^2 + 2\cdot s + 3 = (s - s_3)\cdot(s - s_4)$$
$$s_1 = -\frac{1}{2} + j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5000 + 0.8660j$$
$$s_2 = -\frac{1}{2} - j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5000 - 0.8660j$$
$$s_3 = -1 + j\cdot\sqrt{2} = -1.0000 + 1.4142j$$
$$s_4 = -1 - j\cdot\sqrt{2} = -1.0000 - 1.4142j$$

Prijenosnu funkciju sada rastavljamo na parcijalne razlomke na sljedeći način:

$$H(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{s - s_3} + \frac{D}{s - s_4}$$

Način na koji dolazimo do koeficijenata A,B,C i D biti će ilustriran na primjeru iznalaženja izraza za koeficijent A. Za sve ostale koeficijente postupak je analogan tome primjeru. Prikazani postupak možemo primijeniti samo u slučaju kada su svi polovi jednostruki i međusobno različiti.

$$H(s)\cdot(s - s_1) = \left(\frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{C}{s - s_3} + \frac{D}{s - s_4}\right)\cdot(s - s_1)$$

$$\lim_{s \to s_1} H(s)\cdot(s - s_1) = A$$

$$A = \frac{3\cdot s^3 + 7\cdot s^2 + 10\cdot s + 7}{(s - s_1)\cdot(s - s_2)\cdot(s - s_3)\cdot(s - s_4)}\cdot(s - s_1)$$

$$A = \frac{3\cdot s^3 + 7\cdot s^2 + 10\cdot s + 7}{(s - s_2)\cdot(s - s_3)\cdot(s - s_4)},$$

uz

$s = s_1$

Sada možemo raspisati izraze i za ostale koeficijente:

$$B = \frac{3\cdot s^3 + 7\cdot s^2 + 10\cdot s + 7}{(s - s_1)\cdot(s - s_3)\cdot(s - s_4)},$$

uz

$s = s_2$

$$C = \frac{3\cdot s^3 + 7\cdot s^2 + 10\cdot s + 7}{(s - s_1)\cdot(s - s_2)\cdot(s - s_4)},$$

uz

$s = s_3$

$$D = \frac{3\cdot s^3 + 7\cdot s^2 + 10\cdot s + 7}{(s - s_1)\cdot(s - s_2)\cdot(s - s_3)},$$

uz

$s = s_4$

Nakon uvrštavanja dobivamo sljedeće rezultate za koeficijente:

A = 0.5000 – j0.8660
B = 0.5000 + j0.8660
C = 1.0000 + j0.3536
D = 1.0000 – j0.3536

$$H(s) = \frac{0.5 - j\cdot 0.8660}{s - (-0.5 + j\cdot 0.8660)} + \frac{0.5 + j\cdot 0.8660}{s - (-0.5 - j\cdot 0.8660)} + \frac{1 + j\cdot 0.3536}{s - (-1 + j\cdot 1.4142)} + \frac{1 - j\cdot 0.3536}{s - (-1 - j\cdot 1.4142)}$$

Sada prebacujemo dobivenu prijenosnu funkciju u vremensku domenu. Pri tome nas kompleksni brojevi ne smetaju:

$$h(t) = (0.5 - j\cdot 0.8660)e^{(-0.5 + j\cdot 0.8660)t} + (0.5 + j\cdot 0.8660)e^{(-0.5 - j\cdot 0.8660)t} + (1 + j\cdot 0.3536)e^{(-1 + j\cdot 1.4142)t} + (1 - j\cdot 0.3536)e^{(-1 - j\cdot 1.4142)t}$$

Grupiranjem konjugirano-kompleksnih parova dobili bi čisto realni impulsni odziv, no kako nas zanima samo prijenosna funkcija jednostavno zamijenimo vrijeme t s varijablom koraka nT:

$$\begin{aligned} h(nT) = h[n] = {} & (0.5 - j\cdot 0.8660)e^{(-0.5 + j\cdot 0.8660)n/10} + (0.5 + j\cdot 0.8660)e^{(-0.5 - j\cdot 0.8660)n/10} \\ & + (1 + j\cdot 0.3536)e^{(-1 + j\cdot 1.4142)n/10} + (1 - j\cdot 0.3536)e^{(-1 - j\cdot 1.4142)n/10} \end{aligned}$$

Koristeći tablice Z transformacije nakon "malo" sređivanja dobivamo sljedeći konačni rezultat:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{(0.5 - j \cdot 0.8660)z}{z - e^{\frac{-0.5 + j \cdot 0.8660}{10}}} + \frac{(0.5 + j \cdot 0.8660)z}{z - e^{\frac{-0.5 + j \cdot 0.8660}{10}}} \\
&\quad + \frac{(1 + j \cdot 0.3536)z}{z - e^{\frac{-1 + j \cdot 1.4142}{10}}} + \frac{(1 - j \cdot 0.3536)z}{z - e^{\frac{-1 - j \cdot 1.4142}{10}}} \\
&= \frac{0.3000 - 0.8269z^{-1} + 0.7638z^{-2} - 0.2362z^{-3}}{1.0000 - 3.6869z^{-1} + 5.1193z^{-2} - 3.1729z^{-3} + 0.7408z^{-4}}
\end{aligned}
$$

Marin Kovačić

19. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{2}{s+1}$$

Odredite:

a) Prijenosnu fciju H(z) diskretnog sustava koji bi imao jednaki impulsni odziv kao i zadani kontinuirani sustav u trenutcima t = nT
b) Impulsni odziv diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz period uzorkovanja T

---

a)

$$H(s) = \frac{k}{s+s1}, \quad k = 2, \quad s1 = -1$$

Prabacujemo prijenosnu fciju H(s) u vremensku domenu

$$H(s) = \sum_{i=-}^{N} \frac{k_i}{s - s_i} \rightarrow h(t) = \sum_{i=-\infty}^{N} k_i e^{s_i t}$$

$$h(t) = k_1 e^{s_1 t}$$

Otipkavanjem sa t=nT dobivamo

$$h[n] = h(nT) = 2e^{-nT} = 2\left(e^{-T}\right)^n$$

Pomoću Z transformacije se prebacujemo u frekv. domenu:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\left(e^{-T}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\left(e^{-T} z^{-1}\right)^n$$

Pretvaranjem $\sum_{-\infty}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-T} z^{-1}}$$

---

b) primjenom bilinearne trasformacije imamo:

$$H(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z)=\frac{2}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}+1}=\frac{2T(z+1)}{2(z-1)+T(z+1)}=\frac{2T(z+1)}{(T+2)z+(T-2)}=\frac{2T}{T+2}\frac{z+1}{z+\frac{T-2}{T+2}}=$$

$$=\frac{2T}{T+2}\frac{1}{z+\frac{T-2}{T+2}}+\frac{2T}{T+2}\frac{z}{z+\frac{T-2}{T+2}}=-\frac{2T}{T+2}\frac{T+2}{T-2}\frac{-\frac{T-2}{T+2}}{z+\frac{T-2}{T+2}}+\frac{2T}{T+2}\frac{z}{z+\frac{T-2}{T+2}}=$$

$$=-\frac{2T}{T-2}\frac{-\frac{T-2}{T+2}}{z+\frac{T-2}{T+2}}+\frac{2T}{T+2}\frac{z}{z+\frac{T-2}{T+2}}$$

Prema tablicama za Z transformaciju imamo:

$$\frac{z}{z-a}\xrightarrow[Z]{}a^n$$

$$\frac{a}{z-a}\xrightarrow[Z]{}a^n u[n-1],$$ gdje je *u[n]* step funkcija

Pa dobivamo:

$$h[n]=-\frac{2T}{T-2}\left(-\frac{T-2}{T+2}\right)^n u[n-1]+\frac{2T}{T+2}\left(-\frac{T-2}{T+2}\right)^n=$$

$$=\frac{2T}{T+2}\left(\frac{2-T}{T+2}\right)^n-\frac{2T}{T-2}\left(\frac{2-T}{T+2}\right)^n u[n-1]=$$

$$=2T\left(\frac{1}{T+2}-\frac{1}{T-2}u[n-1]\right)\left(\frac{2-T}{T+2}\right)^n$$

Fran Pregernik