Rješenja zadataka za vježbu iz Digitalne obradbe signala

Akademska školska godina 2005./2006.

Umjesto uvoda

Ova rješenja zadataka za vježbu koji se mogu pronaći na WWW stranicama predmeta Digitalna obradba signala (`http://dos.zesoi.fer.hr/`) napisali su demonstratori:

- Vedran Bobanac
- Nina Brcko
- Tomislav Devčić
- Ivan Dokmanić
- Ivana Fazinić
- Lea Gagulić
- Tomislav Gracin
- Marin Kovačić
- Željka Lučev
- Petar Mostarac
- Tamara Petrović
- Fran Pregernik
- Vedrana Spudić
- Tomislav Vlah

Iako su rješenja pregledana gotovo sigurno u njima ima još dosta sitnijih pogrešaka ali, barem se tako nadamo, gotovo nijedna velika pogreška. Usprkos navedenim nedostatcima nadamo se da će vam ova rješenja dosta pomoći pri pripremi ispita ili kolokvija.

Tomislav Petković

1. Neka je $y[n]$ niz dobiven linearnom konvolucijom signala $x[n]$ i $h[n]$. Pokaži da vrijedi:

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\right)$

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]\right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n]\right)$

Rješenje:¸
Prvo pretpostavljamo da sve sume postoje, tj. konvergiraju.

a) Definicija linearne konvolucije u vremenskoj domeni glasi:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n-i].$$

Sada u zadani izraz uvrštavamo

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i].$$

i dobivamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-i]$$

Primijetimo da unutrašnja suma od $h[n-i]$ ne ovisi o i, jer zbrajamo po svim n-ovima od $-\infty$ do $+\infty$. Prema pretpostavki ta suma postoji i konvergira tako da je možemo zamijeniti nekom konstantom, nazovimo je C. Pišemo:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot C = C \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]$$

Sada imamo dvije neovisne sume te možemo umjesto i pisati n. Budući da vrijedi pravilo komutativnosti dokaz je završen.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\right) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\right)$$

b) Za linearnu konvoluciju vrijedi:

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i]$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n-i]$$

Ovdje primjećujemo da unutrašnja suma ovisi o i. U ovisnosti o parnosti broja i unutrašnja suma mijenja predznak zato što pomičemo niz $h[n-i]$, dok $(-1)^n$ ostaje nepromijenjen. Zbog toga možemo pisati:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i] = C$$, kada je i paran, te

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i] = -C$$, kada je i neparan.

Iz ovoga vidimo da nam je potrebna promjena predznaka u vanjskoj sumi u ovisnosti o parnosti broja i, što se lijepo može zapisati kao $(-1)^i$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i] = (-1)^i C$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i](-1)^i C = C\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i x[i] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i]\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i x[i]$$

Sada vidimo da suma po n ne više ne ovisi o i, pa možemo pisati:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n-i]\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i x[i] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n]\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i x[i]$$

Budući da imamo dvije neovisne sume možemo pisati n umjesto i. Vrijedi komutativnost, te je dokaz završen.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n]\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x[n]\right)\cdot\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n]\right)$$

Vedran Bobanac

3. Zadana su dva konačna niza brojeva

$$x_1[n] = \{ 5, 2, 4, -1, 0, 0 \} \ \text{ i } \ x_2[n] = \{ -3, 4, 0, 2, -1, 2\}$$

a) Odredi linearnu konvoluciju zadanih nizova. Kolika je duljina linearne konvolucije?
b) Proširi prvi niz na šest članova dodavanjem nula i odredi cirkularnu konvoluciju uz N = 6 tako proširenog niza s nizom $x_2[n]$.
c) Izračunaj cirkularnu konvoluciju iz b) zadatka korištenjem DFT-a.

a) Linearna je konvolucija određena izrazom :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\, x_2[n-m]$$

Primjenom algoritma zrcali i pomakni (Flip-and-Slide Form) možemo mnogo brže doći do linearne konvolucije dvaju nizova.
Signal $x_1[n]$ zapisan je u prvom redu dok se niz $x_2[n]$ zrcali i posmiče preko njega.

					5	2	4	-1						
2	-1	2	0	4	-3									n=0
	2	-1	2	0	4	-3								n=1
		2	-1	2	0	4	-3							n=2
			2	-1	2	0	4	-3						n=3
				2	-1	2	0	4	-3					n=4
					2	-1	2	0	4	-3				n=5
						2	-1	2	0	4	-3			n=6
							2	-1	2	0	4	-3		n=7
								2	-1	2	0	4	-3	n=8

y[n] = {-15, 14, -4, 29, -5, 16, -2, 9, -2 }

b) Niz $x_1[n]$ proširujemo sa nulama kako bi dobili 6 članova niza :

$x_1[n] = \{ 5, 2, 4, -1, 0, 0 \}$
$x_2[n] = \{ -3, 4, 0, 2, -1, 2\}$

Cirkularna je konvolucija određena izrazom :

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\, x_2\left[(n-m)_{\mathrm{mod}\,N}\right]$$

$$\begin{aligned} y_c[0] = {} & x_1[0]x_2[0] + x_1[1]x_2\left[(-1)_{\mathrm{mod}\,6}\right] + x_1[2]x_2\left[(-2)_{\mathrm{mod}\,6}\right] + x_1[3]x_2\left[(-3)_{\mathrm{mod}\,6}\right] + x_1[4]x_2\left[(-4)_{\mathrm{mod}\,6}\right] + \\ & + x_1[5]x_2\left[(-5)_{\mathrm{mod}\,6}\right] \end{aligned}$$

$$y_c[0] = x_1[0]x_2[0] + x_1[1]x_2[5] + x_1[2]x_2[4] + x_1[3]x_2[3] + x_1[4]x_2[2] + x_1[5]x_2[1]$$
$$= -15 + 4 - 4 - 2 = -17$$

Uzorci drugog niza se u daljnjem proračunu cirkularno ponavljaju :

$$y_c[1] = x_1[0]x_2[1] + x_1[1]x_2[0] + x_1[2]x_2[5] + x_1[3]x_2[4] + x_1[4]x_2[3] + x_1[5]x_2[2] = 23$$
$$y_c[2] = x_1[0]x_2[2] + x_1[1]x_2[1] + x_1[2]x_2[0] + x_1[3]x_2[5] + x_1[4]x_2[4] + x_1[5]x_2[3] = -6$$
$$y_c[3] = x_1[0]x_2[3] + x_1[1]x_2[2] + x_1[2]x_2[1] + x_1[3]x_2[0] + x_1[4]x_2[5] + x_1[5]x_2[4] = 29$$
$$y_c[4] = x_1[0]x_2[4] + x_1[1]x_2[3] + x_1[2]x_2[2] + x_1[3]x_2[1] + x_1[4]x_2[0] + x_1[5]x_2[5] = -5$$
$$y_c[5] = x_1[0]x_2[5] + x_1[1]x_2[4] + x_1[2]x_2[3] + x_1[3]x_2[2] + x_1[4]x_2[1] + x_1[5]x_2[0] = 16$$

Rezultat je :

$$y_c[n] = \{-17,\ 23,\ -6,\ 29,\ -5,\ 16\}$$

Jednostavniji način računanja je pomoću tablice :

n		$x_1[m] = \{5,\ 2,\ 4,\ -1,\ 0,\ 0\}$	y[n]
0	$x_2\left[\langle 0-m\rangle_6\right]$	$\{\underline{-3},\ 2,\ -1,\ 2,\ 0,\ 4\}$	-17
1	$x_2\left[\langle 1-m\rangle_6\right]$	$\{\underline{4},\ -3,\ 2,\ -1,\ 2,\ 0\}$	23
2	$x_2\left[\langle 2-m\rangle_6\right]$	$\{\underline{0},\ 4,\ -3,\ 2,\ -1,\ 2\}$	-6
3	$x_2\left[\langle 3-m\rangle_6\right]$	$\{\underline{2},\ 0,\ 4,\ -3,\ 2,\ -1\}$	29
4	$x_2\left[\langle 4-m\rangle_6\right]$	$\{-\underline{1},\ 2,\ 0,\ 4,\ -3,\ 2\}$	-5
5	$x_2\left[\langle 5-m\rangle_6\right]$	$\{\underline{2},\ -1,\ 2,\ 0,\ 4,\ -3\}$	16

c) DFT_N je određena izrazom :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi jnk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{\ nk}$$

Množenje $X_1[k]\cdot X_2[k]$ u DFT_N domeni odgovara cirkularnoj konvoluciji nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$ u vremenskoj domeni.

1. Računamo DFT_N nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$. N = 6

$$X_1[k] = DFT_6\left[x_1[n]\right] = 5W_6^{0k} + 2W_6^{1k} + 4W_6^{2k} - 1W_6^{3k} + 0W_6^{4k} + 0W_6^{5k}$$
$$X_2[k] = DFT_6\left[x_2[n]\right] = -3W_6^{0k} + 4W_6^{1k} + 0W_6^{2k} + 2W_6^{3k} - 1W_6^{4k} + 2W_6^{5k}$$

2. Množimo spektre $Y_c[k] = X_1[k] \cdot X_2[k]$

$$Y[k] = (5 + 2W_6^{1k} + 4W_6^{2k} - 1W_6^{3k})(-3 + 4W_6^{1k} + 2W_6^{3k} - 1W_6^{4k} + 2W_6^{5k})$$

$$\begin{aligned} Y[k] = &-15 + 20W_6^{1k} + 10W_6^{3k} + 10W_6^{3k} - 6W_6^{1k} + 8W_6^{2k} + 4W_6^{4k} - 2W_6^{5k} + 4W_6^{6k} - 12W_6^{2k} + \\ &+ 16W_6^{3k} + 8W_6^{5k} - 4W_6^{6k} + 8W_6^{7k} + 3W_6^{3k} - 4W_6^{4k} - 2W_6^{6k} + W_6^{7k} - 2_6^{8k} = \\ = &-15 + 14W_6^{k} + 29W_6^{3k} - 4W_6^{2k} - 5W_6^{4k} + 16W_6^{5k} - 2W_6^{6k} + 9W_6^{7k} - 2W_6^{8k} = \\ = &-15 + 14W_6^{k} + 29W_6^{3k} - 4W_6^{2k} - 5W_6^{4k} + 16W_6^{5k} - 2W_6^{0k} + 9W_6^{k} - 2W_6^{2k} = \\ = &-17 + 23W_6^{k} - 6W_6^{2k} + 29W_6^{3k} - 5W_6^{4k} + 16W_6^{5k} \end{aligned}$$

3. Računamo $IDFT_6$ spektra $Y_c[k]$

$y_c[n] = \{ -17, 23, -6, 29, -5, 16 \}$ što odgovara prethodno izračunatoj cirkularnoj konvoluciji

Ivana Fazinić

2. Korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije odredi konvoluciju signala

$$x_1[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

Z transformaciju niza x[n] dobijemo prema:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

pošto su svi uzorci signala za n < 0 jednaki nuli formulu možemo modificirati :

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

pa prema tome dobivamo Z transformacije nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$:

$$x_1[n] = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + ...$$

$$x_2[n] = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5} + z^{-6} - ....$$

konvoluciji u vremenskoj domeni odgovara množenje u Z domeni pa prema tome konvoluciji nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$ u vremenskoj domeni odgovara njihov umnožak u Z domeni.

$$X_1(z) \cdot X_2(z) = (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + ...)(1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5} + z^{-6} - ....) =$$

$$= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + 6z^{-6} + 7z^{-7} + ...$$

$$- z^{-2} - 2z^{-3} - 3z^{-4} - 4z^{-5} - 5z^{-6} - 6z^{-7} - 7z^{-8} - ....$$

$$+ z^{-3} + 2z^{-4} + 3z^{-5} + 4z^{-6} + 5z^{-7} + 6z^{-8} + 7z^{-9} + ...$$

$$- z^{-4} - 2z^{-5} - 3z^{-6} - 4z^{-7} - 5z^{-8} - 6z^{-9} - 7z^{-10} - ....$$

$$+ z^{-5} + 2z^{-6} + 3z^{-7} + 4z^{-8} + 5z^{-9} + 6z^{-10} + 7z^{-11} - ....$$

$$- z^{-6} - 2z^{-7} - 3z^{-8} - 4z^{-9} - 5z^{-10} - 6z^{-11} - 7z^{-12} - ....$$

.
.
.
.

$$= z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + 3z^{-5} + 3z^{-6} + 4z^{-7} + 4z^{-8} + ...$$

Kada to prebacimo natrag u vremensku domenu dobivamo uzorke signala nastalog konvolucijom signala $x_1[n]$ i $x_2[n]$. Prema tome je:

$$x_1[n] * x_2[n] = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...\}$$

zadatak je moguće riješiti i korištenjem tablica Z transformacije. Nizove $x_1[n]$ i $x_2[n]$ pomoću tablica prebacujemo u Z domenu.

$$X_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad X_2(z) = \frac{z}{z+1}$$

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2 \cdot (z+1)}$$

Taj umnožak rastavljamo na parcijalne razlomke i to na sljedeći način:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2 \cdot (z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+1}$$

Dobivamo sljedeće jednadžbe:

A + C = 0
B – 2C = 1
-A + B + C = 0

Rješavanjem jednadžbi dobivamo: A = ¼ ; B = ½ ; C = -¼

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+1}$$

$$Y(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{z}{z+1}$$

Zatim to vraćamo natrag u vremensko područje pomoću tablica Z transformacija i dobivamo:

$$Y[n] = \frac{1}{4} \cdot 1^n + \frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{4} \cdot (-1)^n = \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^n + 2n\right)$$

Vidimo da dobiveni rezultat odgovara i prijašnje dobivenom rezultatu.

Tomislav Vlah

4. Zadana su dva konačna impulsa

$x_1[n]=\{\underline{1},0,2,0\}$ i $x_2[n]=\{\underline{0},2,0,-1\}$

Odredite konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. DFT računajte u 4 točke. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

RJEŠENJE:

Konvoluciju u DFT domeni računamo prema izrazu:

$$DFT_N[y[n]]=DFT_N[x_1[n]]\cdot DFT_N[x_2[n]]$$

pri čemu vrijedi:

$$X_1[k]=DFT_N[x_1[n]] \qquad X_2[k]=DFT_N[x_2[n]] \qquad Y[k]=DFT_N[y[n]]$$

Možemo pisati: $Y[k]=X_1[k]\cdot X_2[k]$

Kako je u našem zadatku N = 4, potrebno je odrediti DFT_4 transformacije zadanih signala:

$$X_1[k]=DFT_4[x_1[n]]=1W_4^{0k}+0W_4^{1k}+2W_4^{2k}+0W_4^{3k}$$
$$X_{21}[k]=DFT_4[x_2[n]]=0W_4^{0k}+2W_4^{1k}+0W_4^{2k}-1W_4^{3k}$$

Množenjem u domeni transformacije dobivamo:

$$\begin{aligned}Y[k]&=X_1[k]X_2[k]=\left(1+2W_4^{2k}\right)\cdot\left(2W_4^{1k}-1W_4^{3k}\right)\\&=2W_4^{1k}+4W_4^{3k}-1W_4^{3k}-2W_4^{5k}\\&=2W_4^{1k}+3W_4^{3k}-2W_4^{5k}\\&=2W_4^{1k}+3W_4^{3k}-2W_4^{1k}\\&=3W_4^{3k}\end{aligned}$$

Inverznom transformacijom dobivamo:

$y[n]=\{\underline{0},0,0,3\}$

Općenito, množenju u DFT domeni odgovara cirkularna konvolucija u vremenskoj domeni.

Cirkularnu konvoluciju u vremenskoj domeni računamo prema sljedećem izrazu:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] \cdot x_2\left[\langle n-i \rangle_N\right]$$

Kako je u našem zadatku N = 4 potrebno je izračunati: $y[n] = \sum_{i=0}^{3} x_1[i] \cdot x_2\left[\langle n-i \rangle_4\right]$

Cirkularnu konvoluciju najčešće računamo tablično:

n	$x_1[i]$	=	$\{\underline{1},0,2,0\}$	$y[n]$
0	$x_2\left[\langle 0-i \rangle_4\right]$	=	$\{\underline{0},-1,0,2\}$	0
1	$x_2\left[\langle 1-i \rangle_4\right]$	=	$\{\underline{2},0,-1,0\}$	0
2	$x_2\left[\langle 2-i \rangle_4\right]$	=	$\{\underline{0},2,0,-1\}$	0
3	$x_2\left[\langle 3-i \rangle_4\right]$	=	$\{\underline{-1},0,2,0\}$	3

Kao rezultat dobivamo $y[n] = \{\underline{0},0,0,3\}$

Računanjem cirkularne konvolucije u vremenskoj domeni dobili smo jednak rezultat kao i pri računanju konvolucije množenjem u DFT domeni!

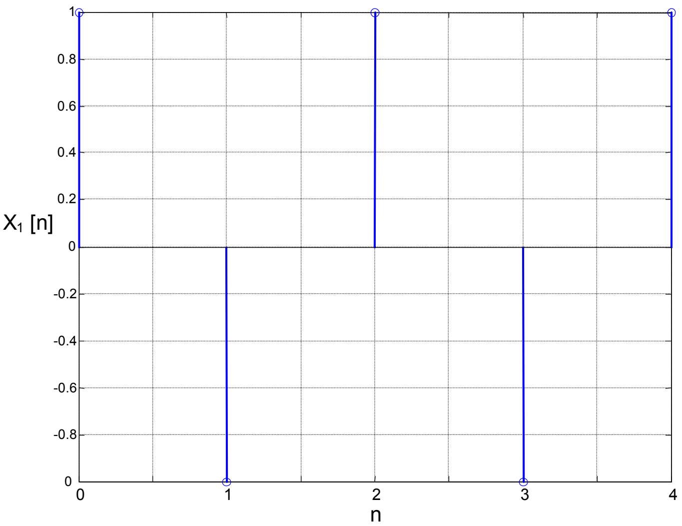
Zadatak riješila: Nina Brcko

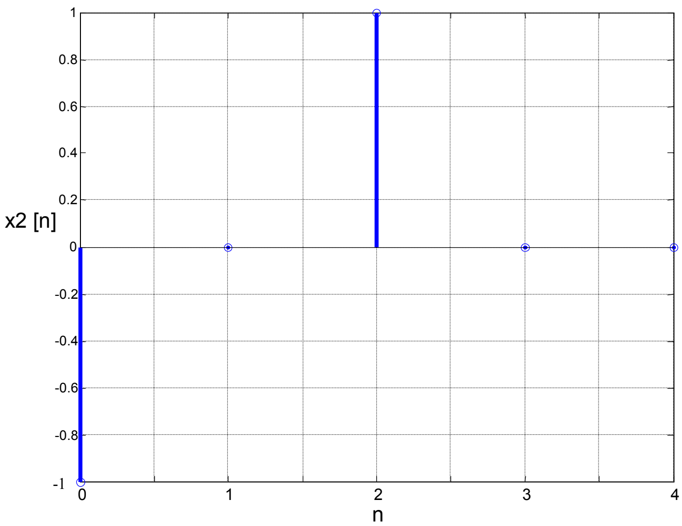
5. Zadana su dva konačna impulsa:

$$X_1[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & 0 \le n < 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad X_2[n] = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot n + \pi), & 0 \le n < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunaj linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala. Odredi periodičku konvoluciju zadanih konačnih impulsa ako ih periodički proširimo s periodom N = 5.

Signali su prikazani na sljedećim slikama:





<u>Linearna konvolucija dvaju signala konačne duljine</u>

$x_1[n] = \{\underline{1},-1,1,-1,1\}$ - duljina prvog signala M+1 = 5 => M = 4
$x_2[n] = \{\underline{-1},0,1\}$ - duljina drugog signala L = 3

$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ -duljina signala dobivenog konvolucijom M + L= 7

1) <u>metoda zrcali i pomakni</u>
Zrcalimo niz $x_1[n]$ i ispisujemo ga M+L = 7 puta jednog ispod drugog pomaknutog u lijevo za jedan .

				x 2[n] →	-1	0	1				
x 1ZRC[n]→	1	-1	1	-1	1						
		1	-1	1	-1	1					
			1	-1	1	-1	1				
				1	-1	1	-1	1			
					1	-1	1	-1	1		
						1	-1	1	-1	1	
							1	-1	1	-1	1

$$x[0] = x_2[0] \cdot x_1[0] = (-1) \cdot 1 = -1$$
$$x[1] = x_2[0] \cdot x_1[1] + x_2[1] \cdot x_1[0] = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 1$$
$$x[2] = ... = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$
$$x[3] = ... = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$x[4] = ... = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$
$$x[5] = ... = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$$
$$x[6] = x_2[2] \cdot x_1[4] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\boxed{x[n] = \{\underline{-1}, 1, 0, 0, 0, -1, 1\}}$$

2) Konvoluciju signala u vremenskoj domeni možemo dobiti množenjem Z transformacija signala i zatim primjenom inverzne Z transformacije

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = Z^{-1}\{ X_1(z)\, X_2(z) \}$$

$$X_1(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}$$

$$X_2(z) = -1 + z^{-2}$$

$$X(z) = X_1(z)\, X_2(z) = -1 + z^{-1} - z^{-5} + z^{-6}$$

$$\boxed{x[n] = Z^{-1}\{-1 + z^{-1} - z^{-5} + z^{-6}\} = \{\underline{-1}, 1, 0, 0, 0, -1, 1\}}$$

<u>Cirkularna konvolucija</u>

Neka su signali duljine N = 5 (pri čemu signal $x_2[n]$ nadopunjavamo dvjema nulama). Tada je cirkularna konvolucija također duljine 5 i odgovara jednoj periodi periodične konvolucije signala $\tilde{x}_1[n]$ i $\tilde{x}_2[n]$ dobivenih periodičkim proširivanjem signala $x_1[n]$ i $x_2[n]$. Cirkularna konvolucija računa se prema formuli:

$$x_{CIR}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2[(n-i)_{\mathrm{mod}\,N}],\ n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

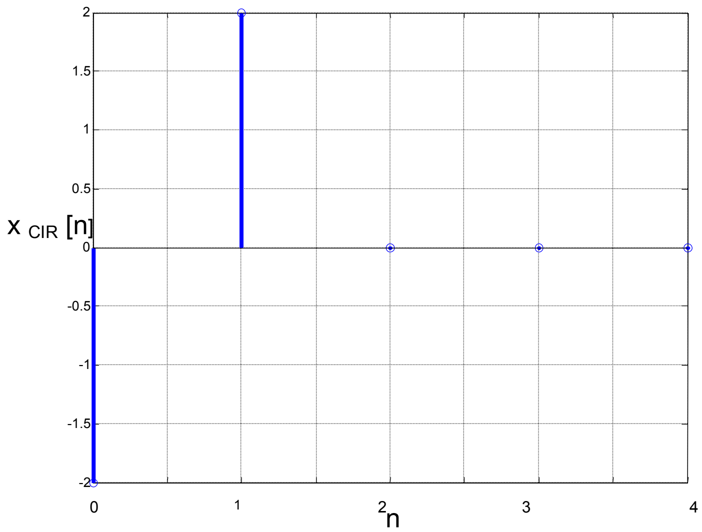
$$\begin{aligned}
x_{CIR}[0] &= \sum_{i=0}^{4} x_1[i]\, x_2\left[(-i)_{\mathrm{mod}\,N}\right] = \\
&= x_1[0] \cdot x_2\left[(0)_{\mathrm{mod}\,5}\right] + x_1[1] \cdot x_2\left[(-1)_{\mathrm{mod}\,5}\right] + x_1[2] \cdot x_2\left[(-2)_{\mathrm{mod}\,5}\right] + x_1[3] \cdot x_2\left[(-3)_{\mathrm{mod}\,5}\right] + x_1[4] \cdot x_2\left[(-4)_{\mathrm{mod}\,5}\right] = \\
&= x_1[0] \cdot x_2[0] + x_1[1] \cdot x_2[4] + x_1[2] \cdot x_2[3] + x_1[3] \cdot x_2[2] + x_1[4] \cdot x_2[1] = \\
&= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \\
&= -2
\end{aligned}$$

Analogno se određuju ostali uzorci:

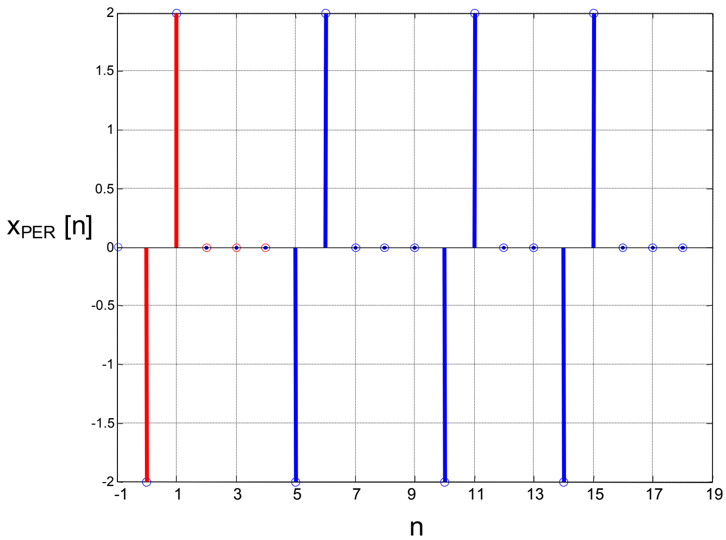
$$\begin{aligned}
x_{CIR}[1] &= x_1[0] \cdot x_2[1] + x_1[1] \cdot x_2[0] + x_1[2] \cdot x_2[4] + x_1[3] \cdot x_2[3] + x_1[4] \cdot x_2[2] = \\
&= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \\
&= 2 \\
x_{CIR}[2] &= x_1[0] \cdot x_2[2] + x_1[1] \cdot x_2[1] + x_1[2] \cdot x_2[0] + x_1[3] \cdot x_2[4] + x_1[4] \cdot x_2[3] = \\
&= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = \\
&= 0 \\
x_{CIR}[3] &= x_1[0] \cdot x_2[3] + x_1[1] \cdot x_2[2] + x_1[2] \cdot x_2[1] + x_1[3] \cdot x_2[0] + x_1[4] \cdot x_2[4] = \\
&= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = \\
&= 0 \\
x_{CIR}[4] &= x_1[0] \cdot x_2[4] + x_1[1] \cdot x_2[3] + x_1[2] \cdot x_2[2] + x_1[3] \cdot x_2[1] + x_1[4] \cdot x_2[0] = \\
&= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_{CIR}[n] = \{\underline{-2}, 2, 0, 0, 0\}}$$

Cirkularna konvolucija zadanih signala prikazana je na sljedećoj slici:



Periodička konvolucija x_{PER} [n] signala dobivenih periodičkim proširenjem signala $x_1[n]$ i x_2 [n] dobiva se periodičkim ponavljanjem cirkularne konvolucije. Periodička konvolucija prikazana je na sljedećoj slici:



6. Odredi linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala:

a) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}$,

b) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{0}, 2, -1, 0\}$,

c) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0\}$,

d) $x_1[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$ i $x_2[n] = \{\underline{4}, 3, 2, 1\}$ te

e) $x_1[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 1\}$.

RJEŠENJE:

Linearnu i cirkularnu konvoluciju možemo računati u vremenskoj, a možemo i u frekvencijskoj domeni. U oba slučaja rezultat je isti. I jedan i drugi način objašnjeni su vrlo lijepo i razumljivo u auditornim vježbama, pa se može odabrati onaj koji vam se više sviđa (za kraće nizove je najbrže tablično računanje). Ovdje ćemo cirkularnu konvoluciju rješavati u vremenskoj domeni, a linearnu u frekvencijskoj.

a) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$, $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}$

Linearna konvolucija:

Linearnu konvlouciju računamo u Z domeni. Koristimo se poznatim svojstvom Z transformacije, a koje se odnosi na konvoluciju signala:

$$y[n] = x[n] * h[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(z) = X(z)H(z).$$

Postupak je sljedeći: prebacimo naše signale Z transformacijom u Z domenu, zatim ih tu (u zemlji čudesa :) pomnožimo, te konačno, inverznom Z transformacijom rezultat vraćamo u vremensku domenu.

$$X_1(z) = 1 - z^{-2} + z^{-4}$$

$$X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-3} - z^{-4}$$

$$\begin{aligned}
&Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \left(1 - z^{-2} + z^{-4}\right) \cdot \left(1 - z^{-1} - z^{-3} - z^{-4}\right) = \\
&1 - z^{-1} - z^{-3} - z^{-4} - \\
&z^{-2} + z^{-3} + z^{-5} + z^{-6} + \\
&z^{-4} - z^{-5} - z^{-7} - z^{-8} = \\
&= 1 - z^{-1} - z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + 0 \cdot z^{-5} + z^{-6} - z^{-7} - z^{-8}
\end{aligned}$$

$y[n] = \{\underline{1}, -1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, -1\}$

Cirkularna konvolucija:

Cirkularnu konvoluciju računamo u vremenskoj domeni po sljedećem izrazu:

$$y[n] = h[n] \circledN x[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]h\big[\langle n-i\rangle_N\big].$$

U praksi to radimo tablično. Na vrhu tablice imamo naš signal $x[n]$, a ispod njega potpišemo «zrcaljeni» signal $h[n]$, odnosno permutacije tog signala koje dobivamo rotacijom elemenata. Krećemo prvo s zrcaljenim signalom $h[n]$. Ispod njega potpisujemo signal koji dobijemo tako da početni zrcaljeni h[n] rotiramo jedan put udesno. To znači, da će nam zadnji element doći na prvo mjesto, a svi ostali će se pomaknuti za jedno mjesto unaprijed. Sljedeću varijaciju dobijemo na isti način, samo sada rotaciju vršimo na već rotiranom i zrcaljenom $h[n]$ itd. n-ta komponenta rezultata dobije se da se elementi istog stupca od $x[n]$ i $h[n]$ pomnože, a zatim se zbroje.

n	$x_1[i]$	=	{ $\underline{1}$,	0,	−1,	0,	1}	$y[n]$
0	$x_2[(0-i)_5]$	=	{ $\underline{1}$,	−1,	−1,	0,	−1}	1
1	$x_2[(1-i)_5]$	=	{− $\underline{1}$,	1,	−1,	−1,	0}	0
2	$x_2[(2-i)_5]$	=	{ $\underline{0}$,	−1,	1,	−1,	−1}	−2
3	$x_2[(3-i)_5]$	=	{− $\underline{1}$,	0,	−1,	1,	−1}	−1
4	$x_2[(4-i)_5]$	=	{− $\underline{1}$,	−1,	0,	−1,	1}	0

b) $x_1[n]=\{\underline{1}, 0, 1, -1\}$, $x_2[n]=\{\underline{0}, 2, -1, 0\}$

Linearna konvolucija:

$$X_1(z) = 1 + z^{-2} - z^{-3}$$

$$X_2(z) = 2\cdot z^{-1} - z^{-2}$$

$$Y(z) = 2\cdot z^{-1} - 1\cdot z^{-2} + 2\cdot z^{-3} - 3\cdot z^{-4} + z^{-5}$$

$y[n]=\{\underline{0}, 2, -1, 2, -3, 1, 0\}$

Cirkularna konvolucija:

n	$x_1[i]$	=	{ $\underline{1}$,	0,	1,	−1}	$y[n]$
0	$x_2[(0-i)_4]$	=	{ $\underline{0}$,	0,	−1,	2}	−3
1	$x_2[(1-i)_4]$	=	{ $\underline{2}$,	0,	0,	−1}	3
2	$x_2[(2-i)_4]$	=	{− $\underline{1}$,	2,	0,	0}	−1
3	$x_2[(3-i)_4]$	=	{ $\underline{0}$,	−1,	2,	0}	2

c) $x_1[n]=\{1, 0, 0, -1\}$, $x_2[n]=\{1, 0, -1, 0\}$

Linearna konvolucija:

$$X_1(z)=1-z^{-3}$$

$$X_2(z)=1-z^{-2}$$

$$Y(z)=1-z^{-2}-z^{-3}+z^{-5}$$

$y[n]=\{\underline{1}, 0, -1, -1, 0, 1, 0\}$

Cirkularna konvolucija:

n							$y[n]$
	$x_1[i]$	=	$\{\underline{1},$	$0,$	$0,$	$-1\}$	
0	$x_2[(0-i)_4]$	=	$\{\underline{1},$	$0,$	$-1,$	$0\}$	1
1	$x_2[(1-i)_4]$	=	$\{\underline{0},$	$1,$	$0,$	$-1\}$	1
2	$x_2[(2-i)_4]$	=	$\{-\underline{1},$	$0,$	$1,$	$0\}$	-1
3	$x_2[(3-i)_4]$	=	$\{\underline{0},$	$-1,$	$0,$	$1\}$	-1

d) $x_1[n]=\{\underline{1}, 2, 3, 4\}$, $x_2[n]=\{\underline{4}, 3, 2, 1\}$

Linearna konvolucija:

$$X_1(z)=1+2\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+4\cdot z^{-3}$$

$$X_2(z)=4+3\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}+1\cdot z^{-3}$$

$$Y(z)=4+11\cdot z^{-1}+20\cdot z^{-2}+30\cdot z^{-3}+20\cdot z^{-1}+11\cdot z^{-2}+4\cdot z^{-3}$$

$y[n]=\{\underline{4}, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$

Cirkularna konvolucija:

n							$y[n]$
	$x_1[i]$	=	$\{\underline{1},$	$2,$	$3,$	$4\}$	
0	$x_2[(0-i)_4]$	=	$\{\underline{4},$	$1,$	$2,$	$3\}$	24
1	$x_2[(1-i)_4]$	=	$\{\underline{3},$	$4,$	$1,$	$2\}$	22
2	$x_2[(2-i)_4]$	=	$\{\underline{2},$	$3,$	$4,$	$1\}$	24
3	$x_2[(3-i)_4]$	=	$\{\underline{1},$	$2,$	$3,$	$4\}$	30

e) $x_1[n]=\{\underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1\}$, $x_2[n]=\{\underline{1}, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 1\}$

Linearna konvolucija:

$$X_1(z)=1+z^{-1}+z^{-3}-z^{-4}-z^{-7}$$

$$X_2(z)=1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-5}+z^{-7}$$

$$Y(z)=1+2\cdot z^{-3}-2\cdot z^{-4}+z^{-5}-2\cdot z^{-6}+z^{-8}+z^{-10}-z^{-11}+z^{-12}-z^{-14}$$

$y[n]=\{\underline{1}, 0, 0, 2, -2, 1, -2, 0, 1, 0, 1, -1, 1, 0, -1\}$

Cirkularna konvolucija:

n	$x_1[i]$	=	$\{\ \underline{1},$	$1,$	$0,$	$1,$	$-1,$	$0,$	$0,$	$-1\}$	$y[n]$
0	$x_2[(0-i)_8]$	=	$\{\ \underline{1},$	$1,$	$0,$	$-1,$	$0,$	$0,$	$1,$	$-1\}$	2
1	$x_2[(1-i)_8]$	=	$\{-\underline{1},$	$1,$	$1,$	$0,$	$-1,$	$0,$	$0,$	$1\}$	0
2	$x_2[(2-i)_8]$	=	$\{\ \underline{1},$	$-1,$	$1,$	$1,$	$0,$	$-1,$	$0,$	$0\}$	1
3	$x_2[(3-i)_8]$	=	$\{\ \underline{0},$	$1,$	$-1,$	$1,$	$1,$	$0,$	$-1,$	$0\}$	1
4	$x_2[(4-i)_8]$	=	$\{\ \underline{0},$	$0,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$1,$	$0,$	$-1\}$	-1
5	$x_2[(5-i)_8]$	=	$\{-\underline{1},$	$0,$	$0,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$1,$	$0\}$	1
6	$x_2[(5-i)_8]$	=	$\{\ \underline{0},$	$-1,$	$0,$	$0,$	$1,$	$-1,$	$1,$	$1\}$	-3
7	$x_2[(5-i)_8]$	=	$\{\ \underline{1},$	$0,$	$-1,$	$0,$	$0,$	$1,$	$-1,$	$1\}$	0

Marin Kovačić

7. Neka su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dva konačna niza duljine N=6. Ako je

$$y_L[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i]x_2[n-i], \quad n = 0,1,...,2N-2$$

linearna konvolucija zadanih nizova te ako je

$$y_C[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[n]x_2[\langle n-i \rangle_N]$$

cirkularna konvolucija zadanih nizova izrazi $y_C[n]$ pomoću $y_L[n]$.

Rješenje:

Linearna konvolucija predstavlja množenje u DTFT domeni i u ovom konkretnom slučaju je duljine 2N-1, dok cirkularna konvolucija predstavlja množenje u DFT domeni i duljina joj je u ovom slučaju N.

U domeni *Z* transformacije izraz za linearnu konvoluciju je

$$Y_L(z) = \sum_{n=0}^{2N-2} y_L[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{2N-2} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i]x_2[n-i] \right) z^{-n}$$

dok je u DFT domeni izraz za cirkularnu konvoluciju

$$Y_C[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y_C[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2[\langle n-i \rangle_N] \right) W_N^{nk}$$

Primijetimo da su izrazi dosta slični. Ukoliko u izrazu za *Z* transformaciju linearne konvolucije *z* supstituiramo s W_N^{nk} dobijemo novu sumu po *n* od o do $2N-1$ koju nakon iskorištavanja svojstva periodičnosti kompleksne eksponencijale možemo svesti na sumu po *n* od 0 do $N-1$ koja strukturno odgovara upravo izrazu za DFT transformaciju. Pokažimo da tim postupkom dobivamo upravo cirkularnu konvoluciju.
Zamjenom dobijemo

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{2N-2} y_L[n]W_N^{nk}$$

odnosno

$$Y[k] = y_L[0]W_N^0 + y_L[1]W_N^k + ... + y_L[2N-2]W_N^{(2N-2)k}$$

Kako je eksponencijala W_N^{nk} periodična s periodom N,

$$W_N^k = e^{-j2\pi\frac{k}{N}} = e^{-j2\pi\frac{k}{N} \pm j2\pi l} = e^{-j2\pi\frac{k \pm lN}{N}} = W_N^{k \pm lN}$$

možemo članove sume grupirati u skladu s periodičnošću W_N^{nk}

$$\begin{aligned} Y[k] = {} & \underbrace{y_L[0]W_N^0 + y_L[N]W_N^{6k}}_{0,N} + \underbrace{y_L[1]W_N^k + y_L[N+1]W_N^{(N+1)k}}_{1,N+1} + ... \\ & + \underbrace{y_L[N-2]W_N^{2k} + y_L[2N-2]W_N^{(2N-2)k}}_{N-2,N+N-2} + y_L[2N-1]W_N^{(2N-1)k} \end{aligned}$$

Pogledajmo sada što općenito dobivamo kada zbrojimo $y_L[n]$ i $y_L[n+N]$ ako je n manji od N (to odgovara članovima koje smo grupirali u izrazu za $Y[k]$). Pri tome se prisjetimo da Za operator *mod N* (ostatak pri dijeljenju s N) vrijedi $(n+kN) \bmod N = n \bmod N$.

Sada je

$$\begin{aligned}
y_L[n]+y_L[n+N] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i]x_2[n-i] + \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1[i]x_2[n+N-i] \\
&= \sum_{i=\max(0,n-N+1)}^{\min(n,N-1)} x_1[i]x_2[n-i] + \sum_{i=\max(0,n+N-N+1)}^{\min(n+N,N-1)} x_1[i]x_2[n+N-i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_1[i]x_2[n-i] + \sum_{i=n+1}^{N-1} x_1[i]x_2[n+N-i] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2\left[\langle n-i \rangle_N\right]
\end{aligned}$$

Izraz koji smo dobili prepoznajemo kao izraz za DFT transformaciju cirkularne konvolucije. Dakle vrijedi

$$Y[k] = Y_C[k]$$

Na kraju možemo napisati u vremenskoj domeni izraz za cirkularnu konvoluciju preko linearne

$$y_C[n] = y_L[n] + y_L[n+N], \text{ za } n = 0, 1, \ldots, N-2$$

$$y_C[N-1] = y_L[N-1]$$

što možemo zapisati i kao

$$y_C[n] = \sum_{i=0}^{1} y_L[n+iN], \; n = 0,1,\ldots, N-1$$

Napomena: Članu koji kod linearne konvolucije dva konačna niza jednake duljine N ima indeks 2N-1 vrijednost je 0, kao i svim preostalim članovima koji nemaju indekse iz intervala [0, 2N-2].

8. Pokaži da je cirkularna konvolucija komutativna, odnosno da vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2\left[\langle n-i\rangle_N\right] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i]x_1\left[\langle n-i\rangle_N\right]$$

Rješenje:

Zapišimo gore zapisanu cirkularnu konvoluciju kao periodičnu konvoluciju:

$$U[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2\left[\langle n-i\rangle_N\right] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[i]\tilde{x}_2[n-i] = \sum_{po\ \ periodu} \tilde{x}_1[i]\tilde{x}_2[n-i]$$

gdje su nizovi $\tilde{x}_1$ i $\tilde{x}_2$ periodizirani aperiodski nizovi x_1 i x_2.

Uvedimo pokratu $l = n - i$

$$U[n] = \sum_{l=n}^{n-N-1} \tilde{x}_1[n-l]\tilde{x}_2[l] = \sum_{po\ \ periodu} \tilde{x}_1[n-l]\tilde{x}_2[l]$$

Vratimo i: $i = l$

$$U[n] = \sum_{i=n-N+1}^{n} \tilde{x}_1[n-i]\tilde{x}_2[i] = \sum_{po\ \ periodu} \tilde{x}_1[n-i]\tilde{x}_2[i]$$

Odnosno, smijemo pisati:

$$U[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n-i]\tilde{x}_2[i]$$

Čime smo dokazali početnu tvrdnju:

$$U[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[i]\tilde{x}_2[n-i] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_2[i]\tilde{x}_1[n-i]$$

Odnosno ako promatramo samo jedan period:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2\left[\langle n-1\rangle_N\right] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i]x_1\left[\langle n-1\rangle_N\right]$$

Uzmimo primjer gdje su :

$$\widetilde{x}_1 = [\ldots \quad x_1[0] \quad x_1[1] \quad x_1[2] \quad x_1[3] \quad x_1[0] \quad x_1[1] \quad x_1[2] \quad x_1[3] \quad \ldots]$$

$$\widetilde{x}_2 = [\ldots \quad x_2[0] \quad x_2[1] \quad x_2[2] \quad x_2[3] \quad x_2[0] \quad x_2[1] \quad x_2[2] \quad x_2[3] \quad \ldots]$$

periodizirani nizovi.

Raspišimo $U[n] = \sum_{ii=n-N+1}^{n} \widetilde{x}_1[n-1]\widetilde{x}_2[i]$:

$$U[0] = \sum_{i=-3}^{0} x_1[-i]x_2[i] = x_1[3]x_2[1] + x_1[2]x_2[2] + x_1[1]x_2[3] + x_1[0]x_2[0]$$

$$U[1] = \sum_{i=-2}^{1} x_1[1-i]x_2[i] = x_1[3]x_2[2] + x_1[2]x_2[3] + x_1[1]x_2[0] + x_1[0]x_2[1]$$

$$U[2] = \sum_{i=-1}^{2} x_1[2-i]x_2[i] = x_1[3]x_2[3] + x_1[2]x_2[0] + x_1[1]x_2[1] + x_1[0]x_2[2]$$

$$U[3] = \sum_{i=0}^{3} x_1[3-i]x_2[i] = x_1[3]x_2[0] + x_1[2]x_2[1] + x_1[1]x_2[2] + x_1[0]x_2[3]$$

Ako presložimo gornje jednadžbe:

$$U[0] = \sum_{i=-3}^{0} x_1[-i]x_2[i] = x_2[0]x_1[0] + x_2[1]x_1[3] + x_2[2]x_1[2] + x_2[3]x_1[1]$$

$$U[1] = \sum_{i=-2}^{1} x_1[1-i]x_2[i] = x_2[0]x_1[1] + x_2[1]x_1[0] + x_2[2]x_1[3] + x_2[3]x_1[2]$$

$$U[2] = \sum_{i=-1}^{2} x_1[2-i]x_2[i] = x_2[0]x_1[2] + x_2[1]x_1[1] + x_2[2]x_1[0] + x_2[3]x_1[3]$$

$$U[3] = \sum_{i=0}^{3} x_1[3-i]x_2[i] = x_2[0]x_1[3] + x_2[1]x_1[2] + x_2[2]x_1[1] + x_2[3]x_1[0]$$

primijetit ćemo da vrijedi:

$$U[n] = \sum_{i=0}^{3} \widetilde{x}_2[i]\widetilde{x}_1[n-i]$$

Čime smo pokazali početnu tvrdnju za $N = 4$:

$$U[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{x}_1[i]\widetilde{x}_2[n-i] = \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{x}_2[i]\widetilde{x}_1[n-i]$$

Odnosno ako promatramo samo jedan period:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2[\langle n-1\rangle_N] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i]x_1[\langle n-1\rangle_N]$$

9. Neka je $y[n]$ cirkularna konvolucija dva konačna niza duljine N. Pokaži da vrijedi

a) $$\sum_{n=\phi}^{N-1} y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\right)$$

$$\sum_{n=\phi}^{N-1} y[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} x[j]\, h[\langle n-j\rangle_N] \right\}$$

| zamjena poretka sumacije |

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[j]\, h[\langle n-j\rangle_N]$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x[j] \sum_{n=0}^{N-1} h[\langle n-j\rangle_N] = \cdots$$

Koje sve uzorke niza h "pokupimo" u sumaciji? Uočimo sljedeće:

$$\{(\langle n+a\rangle_N) : n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\},\ a \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{N}\}$$

$$=$$

$$\{0, 1, \ldots, N-1\},$$

tj. pokupimo upravo uzorke od 0 do N-1 ali drugim redom $\to$ zato možemo pisati

$$\cdots = \sum_{j=0}^{N-1} x[j] \sum_{n=0}^{N-1} h[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\right)$$

b) $$\sum_{n=\phi}^{N-1} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h[n]\right)$$

Krenimo od desne strane:

$$\left(\sum_{n=\phi}^{N-1} (-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h[n]\right) = \left| \begin{array}{c} n \mapsto j \\ \text{u prvoj} \\ \text{sumi} \\ \text{(indeksi} \\ \text{moraju biti} \\ \text{nezavisni)} \end{array} \right| = \cdots$$

$$\ldots = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^j (-1)^n x[j]\, h[n]$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x[j] \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \cdot h[n] \cdot (-1)^j$$

(v. a)) $\rightarrow$ kada n prolazi od 0 do $N-1$, iste vrijednosti "kupimo" i sa $\langle n-j \rangle_N$, tako da unutar sumacije možemo n zamjeniti time. $(-1)^j$ ne smeta jer ne ovisi o n (kao da je ispred sume).

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x[j] \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{\langle n-j \rangle_N} \cdot h[\langle n-j \rangle_N] \cdot (-1)^j$$

- uočite da je $\langle n-j \rangle_N$ iste parnosti kao i $n-j$, za parni $N \rightarrow \langle n-j \rangle_N$ možemo zapisati kao

$$n-j-\underbrace{k \cdot N}_{\text{parno}}, \quad k = \max\{z \in \mathbb{Z} \,/\, z \cdot N \leq n-j\}$$

pa je parnost $n-j$ sačuvana!

$$\Rightarrow (-1)^{\langle n-j \rangle_N} = (-1)^{n-j}$$

$$\ldots = \sum_{j=0}^{N-1} x[j] \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n-\cancel{j}+\cancel{j}}\, h[\langle n-j \rangle_N]$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[j]\, h[\langle n-j \rangle_N]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^n x[j]\, h[\langle n-j \rangle_N]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} x[j]\, h[\langle n-j \rangle_N] \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n y[n], \quad \text{Q.E.D.}$$

Ivan Dokmanić

Zadatak 10.
Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza
$x_1[n] = \{5, 2, 4, -1\}$ i
$x_2[n] = \{-3, 4, 0, 2\}$
računanjem samo jedne kompleksne diskretne fourierove transformacije.

Rješenje:
Od dva zadana realna niza radimo jedan kompleksni tako da npr. prvi niz daje realni dio novog niza, dok drugi niz daje imaginarni dio novog niza.

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n] = \{\underline{5 - j3}, 2 + j4, 4 + j0, -1 + j2\}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{3} (x_1[n] + jx_2[n]) W_4^{nk} = \sum_{n=0}^{3} x_1[n] W_4^{nk} + j\sum_{n=0}^{3} x_2[n] W_4^{nk}$$

Kombinacijom spektara $X[k]$ i njegovog zrcalnog spektra,

$X[k] = \{\underline{10+3j}, 3-6j, 8-9j, -1\}$

$X[N-k] = \{\underline{10+3j}, -1, 8-9j, 3-6j\}$,

možemo dobiti spektar $X_1[k]$ prema

$2Re[X_1[k]] = Re[X[k]] + Re[X[N-k]]$

$2Im[X_1[k]] = Im[X[k]] - Im[X[N-k]]$.

Slijedi:

$X_1[k]=\{\underline{10}, 1-3j, 8, 1+3j\}$.

Na sličan način dobivamo i spektar $X_2[n]$:

$2\,Re[X_2[k]] = Im[X[k]] + Im[X[N - k]]$

$-2\,Im[X_2[k]] = Re[X[k]] - Re[X[N - k]]$.

Slijedi:

$X_2[k]=\{\underline{3}, -3 - 2j, -9, -3 + 2j\}$.

11. Neka je DFT u 8 točaka niza $x_1[n]=\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

dan izrazom $X_1[k]=\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$

Ako znate da je DFT u 4 točke drugog niza $x_2[n]=\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$

dan izrazom $X_2[k]=\{A_0, A_2, A_4, A_6\}$

odredi izraz koji povezuje brojeve a_k **i** b_k **.**

Riješenje:

Vrijedi da je

$$X_2[k]=X_1[2\text{k}] \quad \text{kraju}$$

Ako primjenimo IDFT za drugi niz imamo

$$x_2[n]=\frac{1}{N_2}\sum_{k=0}^{N_2-1} X_2[k]W_{N_2}^{-nk}$$

$$x_2[n]=\frac{1}{N_2}\sum_{k=0}^{N_2-1} X_1[2\text{k}]W_{N_2}^{-nk} \quad (*)$$

Također vrijedi DFT za spektar X_1 :

$$X_1[k]=\sum_{j=0}^{N_1-1} x_1[j]W_{N_1}^{jk}$$

Te ako to uvrstimo u (*) dobivamo:

$$x_2[n]=\frac{1}{N_2}\sum_{k=0}^{N_2-1} X_1[2\text{k}]W_{N_2}^{-nk}=\frac{1}{N_2}\sum_{k=0}^{N_2-1}\left(\sum_{j=0}^{N_1-1} x_1[j]W_{N_1}^{2\text{jk}}\right)W_{N_2}^{-nk} \quad (**)$$

$$\text{gdje su} \quad N_1=8 \quad , \quad N_2=4$$

Primjetimo da vrijedi također:

$$W_{N_1}^{2\text{jk}}=W_8^{2\text{jk}}=W_4^{jk}$$

Ponovno prepisujemo (**):

$$x_2[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{4-1}\left(\sum_{j=0}^{8-1} x_1[j]W_4^{jk}\right)W_4^{-nk}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=0}^{7} x_1[j]W_4^{(j-n)k}$$

uvodimo zamjene: $x_1[j]=a_j$, $x_2[n]=b_n$

$$b_n=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=0}^{7} a_j W_4^{(j-n)k}=\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} a_j\sum_{k=0}^{3} W_4^{(j-n)k}$$

Analiziramo drugu sumu:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(j-n)k} = N\,, \quad \boldsymbol{za\,(j-n)\,mod\;N=0}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(j-n)k} = 0, \quad \boldsymbol{ina\check{c}e}$$

Pa tako imamo:

$$b_n = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} a_j \sum_{k=0}^{3} W_4^{(j-n)k} = \sum_{j=0}^{7} a_j \underbrace{\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} W_4^{(j-n)k}}_{=1 \quad za\,(j-n)\,mod\,4=0}$$

I na kraju imamo:

$$b_n = a_n + a_{n+4} \quad \text{, odnosno} \quad x_2[n] = x_1[n] + x_1[n+4] \quad \text{za} \quad 0 \le n < 4$$

(op. aut. usporedite rezultat sa decimacijom u frekvencijskoj domeni!! :D)

Fran Pregernik

12. Nacrtaj graf toka signala za korijen-2 FFT algoritam koji operira na nizu duljine 8 i to za decimaciju u vremenu i decimaciju u frekvenciji. Za niz uzoraka x[n]={1,2,3,4,5,6,7,8}odredi međurezultate u svakom čvoru te konačnu transformaciju.

Rješenje:

Korijen-2 FFT algoritam je poseban je slučaj FFT algoritma primjenjiv na nizove duljine 2^j. Nad nizom se provodi decimacija za faktor 2. Postupak dobivanja DFT-a provodi se u j koraka.

Postupak decimacije u vremenu

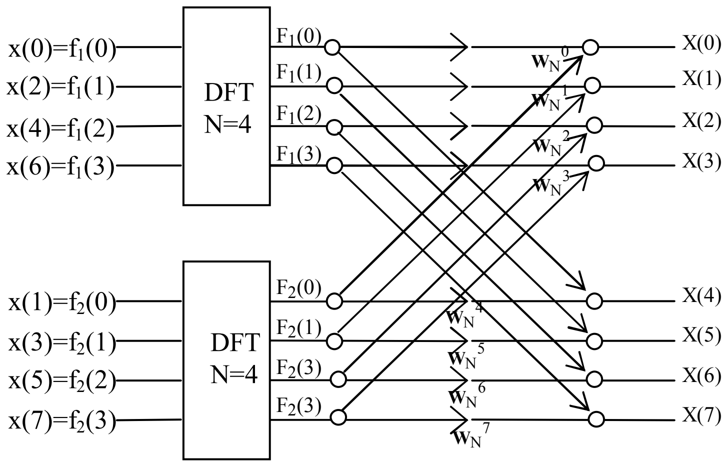
Postupkom decimacije u vremenu za faktor 2 dobivamo dva niza od kojih se jedan sastoji od parnih, a drugi od neparnih uzoraka niza. Za DFT vrijedi sljedeće:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n\ je\ paran} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\ je\ neparan} x(n) W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_N^{(2m+1)k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m) W_{\frac{N}{2}}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) W_{\frac{N}{2}}^{mk} = F_1(k) + W_N^k F_2(k)$$

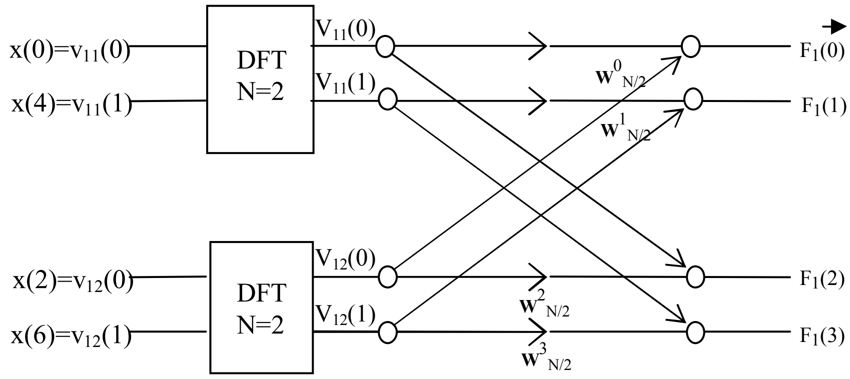
$F_1(k)$ je DFT niza koji se sastoji od parnih uzoraka, a $F_2(k)$ je DFT niza koji se sastoji od neparnih uzoraka niza x(n).

Pokazano svojstvo se primjenjuje na izračunavanje DFT-a niza duljine N=8 na način koji prikazuje sljedeći graf toka signala.

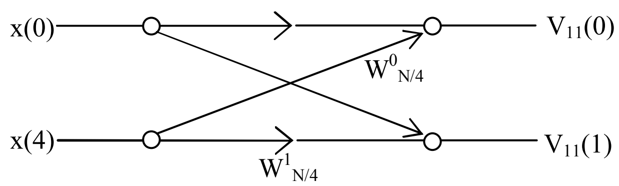


Već samo ovim korakom postignuta je velika „ušteda“ računskih operacija. Umjesto 64 kompleksna množenja koja je potrebno izračunati pri klasičnom računanju DFT-a u ovom slučaju imamo 16+16+8=40 kompleksnih množenja. No pri izračunu DFT-ova kraćih nizova također možemo primijeniti isti algoritam.

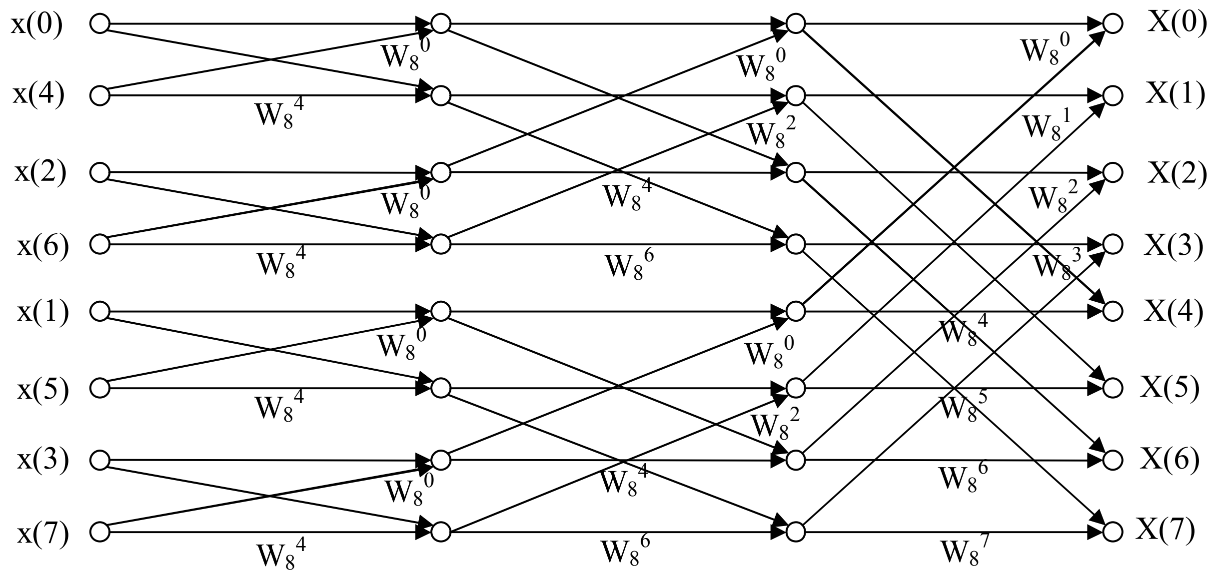
Na slici je prikazan graf toka signala kojim se nadomješta prvi DFT, N=4 blok. Princip je isti. Primijenili smo decimaciju na niz u vremenskoj domeni, izračunali DFT za prvi i drugi niz dobivenim decimacijom, te primijenili pokazano svojstvo DFT-a.



Na kraju primjenimo isti princip i na računanje DFT-a niza duljine dva



Ukupni graf toka signala korijen-2 FFT algoritma dan je na sljedećoj slici. Radi jednostavnosti zapisa i analogije sve su kompleksne eksponencijale zapisane preko W_N.



Za zadani niz x(n)={1,2,3,4,5,6,7,8} potrebno je izračunati međurezultat u svakom čvoru.

$V_{11}(0)=x(0)+W_8^0x(4)=1+5=6$
$V_{11}(1)=x(0)+W_8^4x(4)=1+(-1)*5=-4$

$V_{12}(0)= x(2)+W_8^0x(6)=10$
$V_{12}(1)= x(2)+W_8^4x(6)=-4$

$V_{21}(0)= x(1)+W_8^0x(5)=8$
$V_{21}(1)= x(1)+W_8^4x(5)=-4$

$V_{22}(0)= x(3)+W_8^0x(7)=12$
$V_{22}(1)= x(3)+W_8^4x(7)=-4$

$F_1(0)=V_{11}(0)+W_8^0V_{12}(0)=6+10= 16$
$F_1(1)=V_{11}(1)+W_8^2V_{12}(1)= -4+j4$
$F_1(2)=V_{11}(0)+W_8^4V_{12}(0)=6-10= -4$
$F_1(3)=V_{11}(1)+W_8^6V_{12}(1)= -4-j4$

$F_2(0)= V_{21}(0)+ W_8^0 V_{22}(0)=8+12= 20$
$F_2(1)= V_{21}(1)+W_8^2V_{22}(1)= -4 + j4$
$F_2(2)= V_{21}(0)+W_8^4V_{22}(0)=8-12= -4$
$F_2(3)= V_{21}(1)+W_8^6V_{22}(1)= -4-j4$

$X(0)=F_1(0)+W_8^0F_2(0)=16+20= 36$
$X(1)=F_1(1)+W_8^1F_2(1)= -4+j9.6569$
$X(2)=F_1(2)+W_8^2F_2(2)= -4+j4$
$X(3)=F_1(3)+W_8^3F_2(3)= -4+j1.6569$
$X(4)=F_1(0)+W_8^4F_2(0)= -4$
$X(5)=F_1(1)+W_8^5F_2(1)= -4-j1.6569$
$X(6)= F_1(2)+W_8^6F_2(2)= -4-j4$
$X(7)=F_1(3)+W_8^7F_2(3)= -4-j9.6569$

X(k)={36, -4+j9.6568, -4+j4, -4+j1.6568, -4, -4-j1.6569, -4-j4, -4-j9.6569}

Postupak decimacije u frekvenciji

Postupak decimacije u frekvenciji je način izračuna korijen-2 FFT algoritma pri kojem se ne provodi decimacija na nizu čiju DFT računamo, već se on slijedno razlaže na dva podniza. Rezultat je niz koji predstavlja DFT ulaznog niza decimiran za faktor 2. Vrijedi sljedeće:

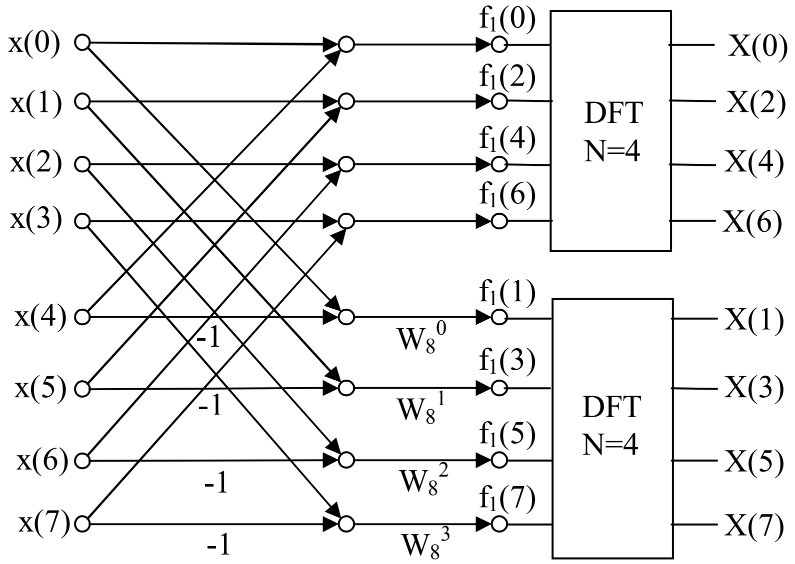
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)W_N^{nk}+x(n+\frac{N}{2})W_N^{(n+\frac{N}{2})k})=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_N^{\frac{N}{2}k})W_N^{nk}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_2^{k})W_N^{nk}$$

$$X(2k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_2^{2k})W_N^{2nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_1^{k})W_{\frac{N}{2}}^{nk}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}(x(n)+x(n+\frac{N}{2}))W_{\frac{N}{2}}^{nk}=DFT_{\frac{N}{2}}(x(n)+x(n+\frac{N}{2}))$$

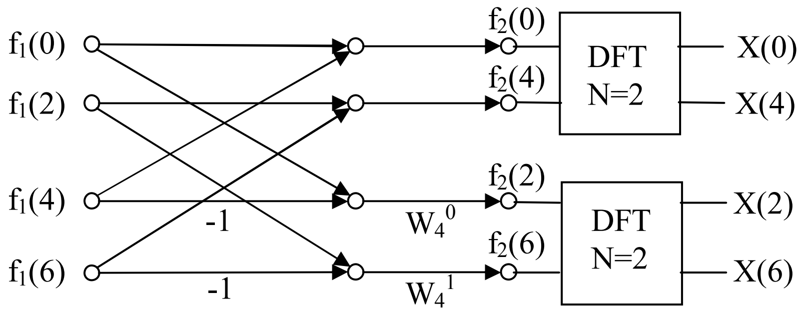
$$X(2k+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_2^{2k+1}\right)W_N^{n(2k+1)}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_2^{1}\right)W_N^{n}W_{\frac{N}{2}}^{nk}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right)W_N^{n}W_{\frac{N}{2}}^{nk}=DFT_{\frac{N}{2}}\left(\left(x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right)W_N^{n}\right)$$

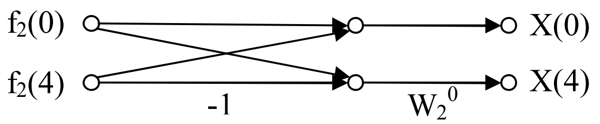
Dotični izrazi upotrebljeni su za izračun DFT-a niza duljine 8. Prvi korak prikazan je na sljedećoj slici:



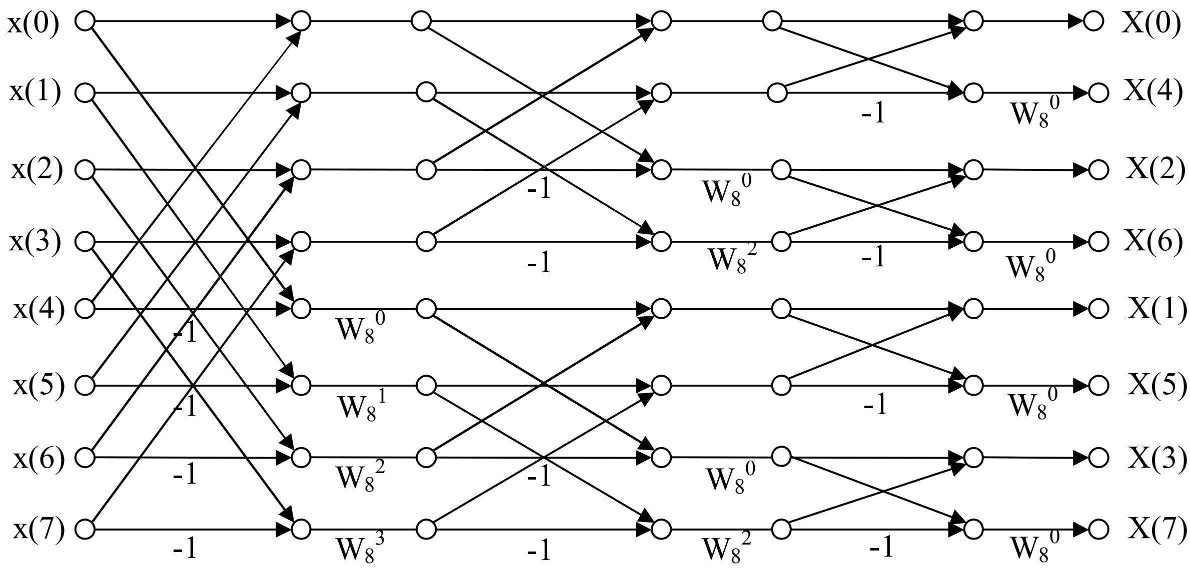
Blok DFT, N=4 zamjenjuje se analogno dalje sa sljedećim segmentom grafa toka signala:



Na kraju blok DFT, N=2 analogno mijenjamo sa:



Ukupni graf toka signala korijen-2 FFT algoritma za decimaciju u frekvenciji prikazan je na sljedećoj slici.



Izračun DFT-a po ovom algoritmu za niz x(n)={<u>1</u>,2,3,4,5,6,7,8}po međutočkama daje:

$f_1(0)=x(0)+x(4)=6$
$f_1(2)=x(1)+x(5)=8$
$f_1(4)=x(2)+x(6)=10$
$f_1(6)=x(3)+x(7)=12$
$f_1(1)=(x(0)-x(4))W_8^0=-4$
$f_1(3)=(x(1)-x(5))W_8^1=-2.8284+j2.8284$
$f_1(5)=(x(2)-x(6))W_8^2=4j$
$f_1(7)=(x(3)-x(7))W_8^3=2.8284+j2.8284$

$f_2(0)=f_1(0)+f_1(4)=16$
$f_2(4)=f_1(2)+f_1(6)=20$
$f_2(2)=(f_1(0)-f_1(4))\ W_8^0=-4$
$f_2(6)=(f_1(2)-f_1(6))\ W_8^2=j4$
$f_2(1)=f_1(1)+f_1(5)=-4+j4$
$f_2(5)=f_1(3)+f_1(7)=j5.6568$
$f_2(3)=(f_1(1)-f_1(5))\ W_8^0=-4-j4$
$f_2(7)=(f_1(3)-f_1(7))\ W_8^2=j5.6568$

$X(0)=f_2(0)+f_2(4)=36$
$X(4)=f_2(0)-f_2(4)=-4$
$X(2)=f_2(2)+f_2(6)=-4+j4$
$X(6)=f_2(2)-f_2(6)=-4-j4$
$X(1)=f_2(1)+f_2(5)=-4+j9.6568$
$X(5)=f_2(1)-f_2(5)=-4-j1.6568$
$X(3)=f_2(3)+f_2(7)=-4+j1.6568$
$X(7)=f_2(3)-f_2(7)=-4-j9.6568$

$X(k)=\{36,\ -4+j9.6568,\ -4+j4,\ -4+j1.6568,\ -4,\ -4-j1.6568,\ -4-j4,\ -4-j9.6568\}$

Vedrana Spudić

13. Zadan je konačni diskretni signal koji ima devet uzoraka,

$$x[n]=\{\underline{0},1,0,0,0,1,1,0,0\}$$

Ako raspolažete s tri bloka za računanje DFT-a u tri točke, kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u devet točaka. Odredite transformacije na izlazima iz svakog bloka za računanje DFT-a u tri točke te konačnu transformaciju za zadani signal.

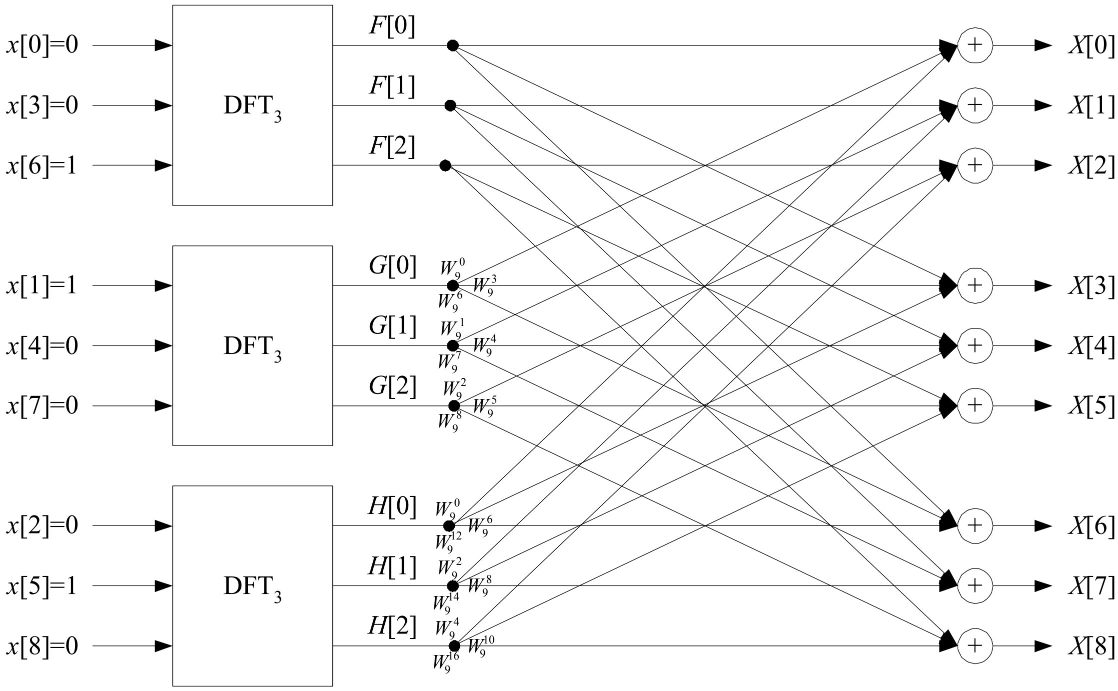
RJEŠENJE (Riješio Tomislav Gracin):

Rješavamo zadatak korištenjem decimacije u vremenu. Zadatak se može riješiti i decimacijom u frekvenciji. Postupak je sličan samo što se u tom slučaju mreža za povezivanje nalazi ispred DTF_3 blokova, a sad se ona nalazi iza DTF_3 blokova.

$$X[k]=\sum_{n=0}^{9-1}x[n]W_9^{nk}=\sum_{n=0}^{2}x[3n]W_9^{3nk}+\sum_{n=0}^{2}x[3n+1]W_9^{(3n+1)k}+\sum_{n=0}^{2}x[3n+2]W_9^{(3n+2)k}$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{2}x[3n]W_3^{nk}+W_9^{k}\sum_{n=0}^{2}x[3n+1]W_3^{nk}+W_9^{2k}\sum_{n=0}^{2}x[3n+2]W_3^{nk}$$

Izgled bloka za računanje DFT-a u 9 točaka dobiven od tri bloka za računanje DFT-a u 3 točke:



Transformacije na izlazima iz svakog bloka za računanje DFT-a, te konačna transformacija:

$$X[k]=F[k]+W_9^kG[k]+W_9^{2k}H[k]$$

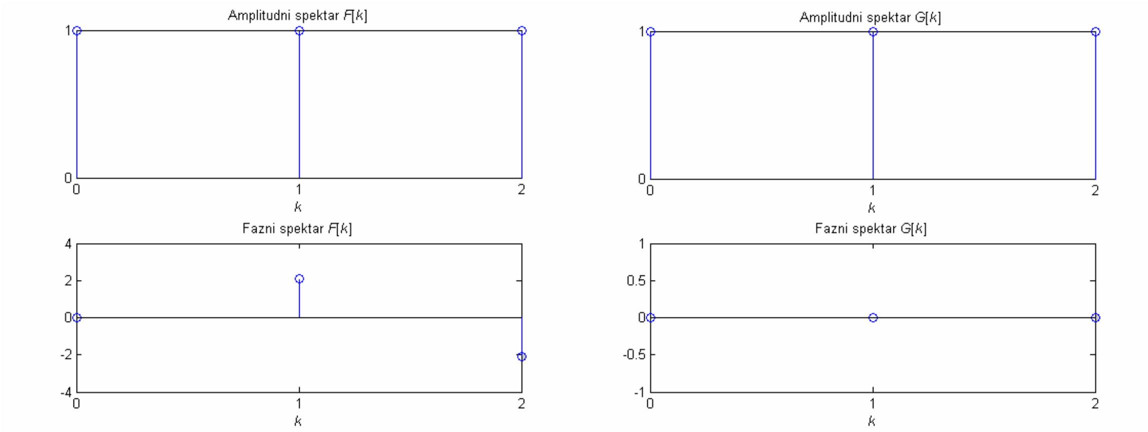
$$F[k]=W_3^{2k}\qquad G[k]=W_3^{0k}\qquad H[k]=W_3^{1k}$$

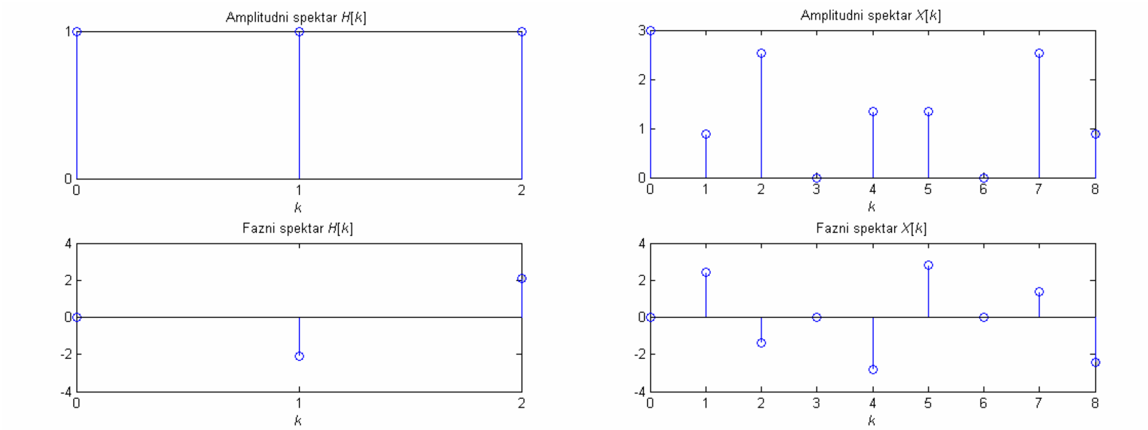
$$X[k]=W_3^{2k\bmod 3}+W_9^{k}+W_9^{2k}W_3^{k\bmod 3}$$

Izračunate vrijednosti spektara *F, G, H* i *X* su:

$X[0] = 3$	$F[0] = 1$	$G[0] = 1$	$H[0] = 1$
$X[1] = -0{,}67 + 0{,}56\,j$	$F[1] = -0{,}5 + 0.86\,j$	$G[1] = 1$	$H[1] = -0{,}5 - 0.86\,j$
$X[2] = 0{,}44 - 2{,}49\,j$	$F[2] = -0{,}5 - 0.86\,j$	$G[2] = 1$	$H[1] = -0{,}5 + 0.86\,j$
$X[3] = 0$			
$X[4] = -1{,}26 - 0{,}46\,j$			
$X[5] = -1{,}26 + 0{,}46\,j$			
$X[6] = 0$			
$X[7] = 0{,}44 + 2{,}49\,j$			
$X[8] = -0{,}67 - 0{,}56\,j$			

Izračunati spektri su pokazani slikama kao amplitudni i fazni spektar pojedine komponente *F, G, H* i *X*.





14.* Odredi korijen-3 FFT algoritam za računanje diskretne Fourierove transformacije u 9 točaka. Neka algoritam koristi decimaciju u vremenu. Skiciraj graf toka signala za dobiveni algoritam. Kako je dobiveno rješenje povezano s rješenjem prethodnog zadatka?

RJEŠENJE:

Neka je $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}$. Prema korijen-3 FFT algoritmu možemo pisati $N=3^j$, te ulazni niz razvrstavamo u 3 retka, i to tako da je u prvom retku niz $f_1[n]$, u drugom $f_2[n]$ i u trećem $f_3[n]$:

$$\begin{aligned} f_1[n] &= x[3n] \\ f_2[n] &= x[3n+1] \\ f_3[n] &= x[3n+2] \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n]W_N^{3nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n+1]W_N^{(3n+1)k} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n+2]W_N^{(3n+2)k}$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n]W_{\frac{N}{3}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n+1]W_{\frac{N}{3}}^{nk} + W_N^{2k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{3}-1} x[3n+2]W_{\frac{N}{3}}^{nk}$$

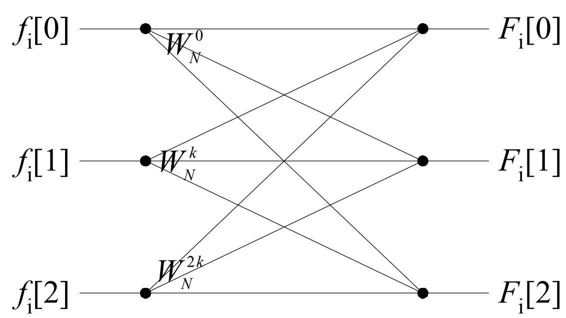
$$X[k]=F_1[k]+W_N^k F_2[k]+W_N^{2k} F_3[k]$$

$F_1[k]$, $F_2[k]$ i $F_3[k]$ su DFT-ovi od N/3 točaka i periodični su s periodom N/3.

Osnovna struktura za računanje korijen-3 algoritma realizira sumaciju:

$$\sum_{n=0}^{2} f_i[n]W_3^{nk}$$

koja se prikazuje grafom toka signala na sljedeći način:

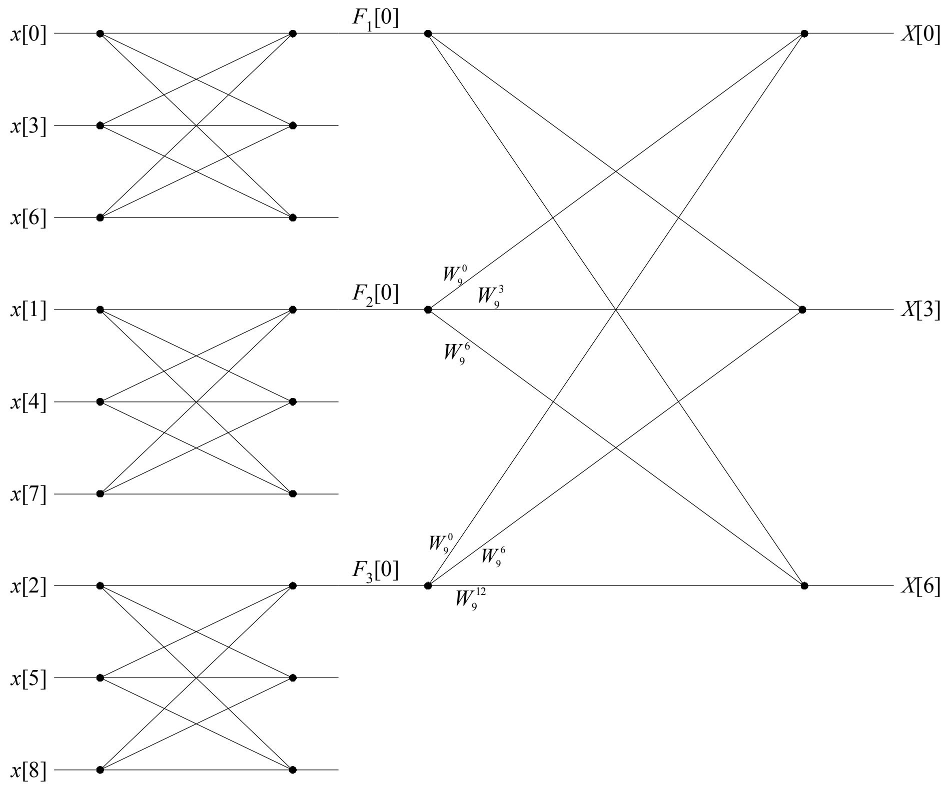


Zadano je $N=9=3^2$, te u ovom slučaju vrijedi:

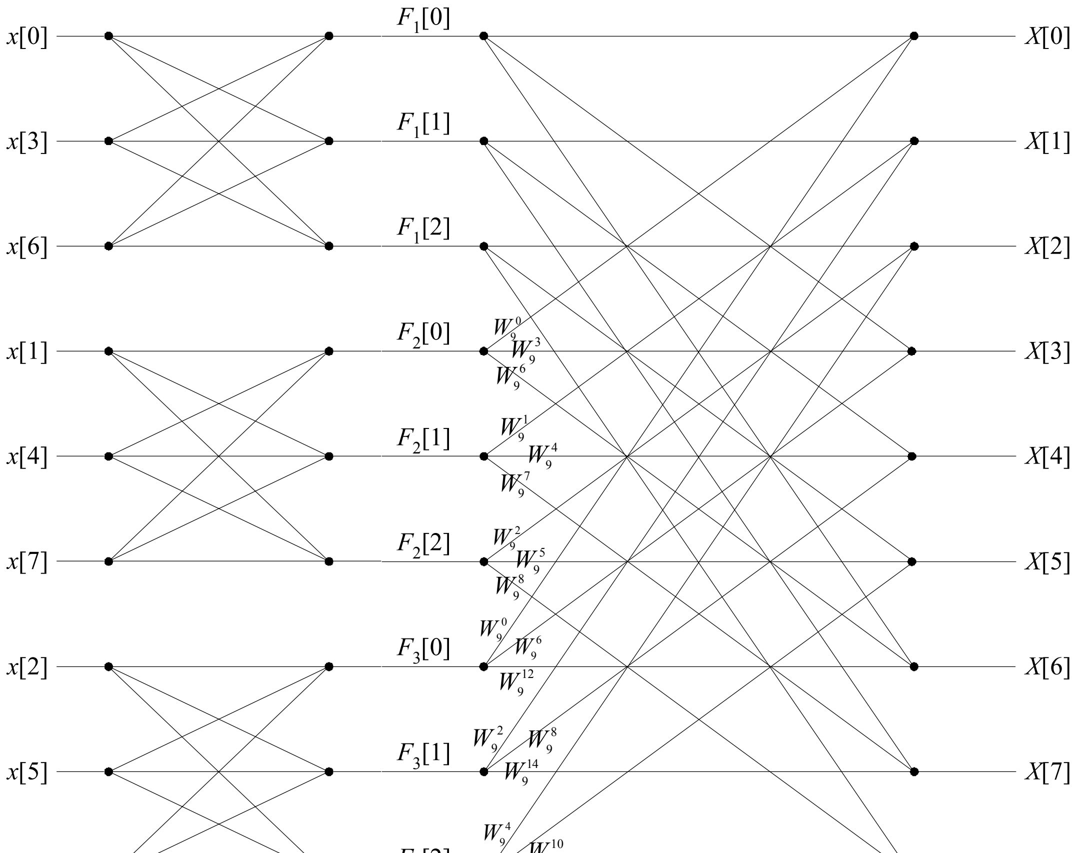
$$X[k]=\sum_{n=0}^{9-1} x[n]W_9^{nk} = \sum_{n=0}^{2} x[3n]W_3^{nk} + W_9^k \sum_{n=0}^{2} x[3n+1]W_3^{nk} + W_9^{2k} \sum_{n=0}^{2} x[3n+2]W_3^{nk}$$

Dobiveni algoritam realizira se pomoću tri osnovne strukture raspoređena u dva stupnja (zbog $j=2$).

Strukture drugog stupnja crtamo tako ih spojimo na izlaze struktura prvog stupnja koje imaju iste indekse, npr. na $F_i[0]$ (koeficijenti kojima se množe ulazi koji su ucrtani u prijašnjoj slici su ispušteni zbog preglednosti):



Analogno spajamo osnovne strukture na izlaze $F_i[1]$ i $F_i[2]$ struktura prvog stupnja, te je konačni graf toka signala (dio koeficijenata s kojima se množe signali je ispušten zbog preglednosti):



Dobiveno rješenje je potpuno analogno rješenju prethodnog zadatka, samo što smo sada prikazali i strukturu pojedinog DFT_3 bloka..

Riješila Željka Lučev