Digitalna obradba signala – Zadaci za vježbu 1.
Akademska školska godina 2004./2005.

1. Ako je niz $x[n]$ realan niz pokažite da njegova vremenski diskretna Fourierova transformacija definirana s

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

zadovoljava sljedeća svojstva:

a) $\mathrm{Re}\big[X(\omega)\big]$ je parna funkcija od ω,

b) $\mathrm{Im}\big[X(\omega)\big]$ je neparna funkcija od ω,

c) $\big|X(\omega)\big|$ je parna funkcija od ω i

d) $\arg\big[X(\omega)\big]$ je neparna funkcija od ω.

2. Za dane nizove odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku:

a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,

b) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,

c) $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1]$ i

d) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$.

3.* Pokažite da diskretni kauzalni sustav s impulsnim odzivom u kojemu je barem jedan uzorak različit od nule ne može imati faznu karakteristiku jednaku nuli, odnosno pokažite da vremenski diskretna Fourierova transformacija takvog impulsnog odziva ne može imati fazu jednaku nuli.

4.* Za signal $x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ odredite vrijednosti slijedećih izraza bez računanja vremenski diskretne Fourierove transformacije $X(\omega)$:

a) $X(0)$,

b) $\arg\big[X(\omega)\big]$,

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\, d\omega$,

d) $X(\pi)$ i

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|X(\omega)\big|^2\, d\omega$.

5.* Autokorelacijski niz diskretnog kompleksnog signala $x[n]$ je

$$R_{XX}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]x[n+m].$$

Pokažite da je vremenski diskretna Fourierova transformacija autokorelacijskog niza $R_{XX}[m]$ upravo $\left|X(\omega)\right|^2$.

6. Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudne i fazne spektre sljedećih signala:

a) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1\}$,
b) $x[n] = \{\underline{-1}, 1, 2, 0, 1\}$,
c) $x[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -2\}$,
d) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, -1\}$ i
e) $x[n] = \{\underline{1}, 0, 0, 0, 0, 0, -1\}$.

7. Odredite i skicirajte inverznu Fourierovu transformaciju spektara

a) $X[k] = \{\underline{2}, 1, 0, 1\}$ i
b) $X[k] = \{\underline{2}, 0, 2, 0, 2, 0\}$.

8. Ako je $X[n]$ realan niz duljine N pokažite da njegova diskretna Fourierova transformacija

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

zadovoljava relaciju

$$X[k] = X^*[N-k].$$

9. Ako je $x[n]$ realan paran niz duljine N pokažite da je njegova diskretna Fourierova transformacija čisto realna.

10. Ako je $x[n]$ realan neparan niz duljine N pokažite da je njegova diskretna Fourierova transformacija čisto imaginarna.

11. Kontinuirani signal čiste frekvencije $f = 13\,\mathrm{kHz}$ otipkavamo sa različitim frekvencijama otpikavanja $f_{s1} = 14\,\mathrm{kHz}$, $f_{s2} = 27\,\mathrm{kHz}$ i $f_{s3} = 20\,\mathrm{kHz}$. Za koje od tih frekvencija otipkavanja ne možemo rekonstruirati izvorni kontinuirani signal?

12. Signal $x(t) = 1{,}5\cos(0{,}5\pi t)$ otipkali smo u četiri točke uz frekvenciju otipkavanja $f_s = 1\,\mathrm{Hz}$ s početkom u $t = 0\,\mathrm{s}$. Da li je prilikom otipkavanja došlo do preklapanja spektra?

13. Kojom je frekvencijom otipkavanja potrebno otipkati zadane signale a da pri tome ne dođe do preklapanja spektra?

a) $x(t) = \sin(5400\pi t) + \sin(3200\pi t) + \sin(8400\pi t)$
b) $x(t) = \cos(244\pi t) + \cos(200\pi t)$
c) $x(t) = \cos(242\pi t) + 2\sin(586\pi t)$

14.* Kontinuirani signal

$$x(t) = \cos(4000\pi t) + \sin(6000\pi t)$$

otipkavamo s periodom otipkavanja T_s. Nakon otpikavanja signal rekonstruiramo korištenjem idealnog interpolatora.

a) Koja je donja granica frekvencije otipkavanja tako da ne dođe do preklapanja spektra?

b) Kako izgleda vremenski diskretna Fourierova transformacija otipkanog signala ako zadani kontinuirani signal uzorkujemo upravo s graničnom frekvencijom? Da li nam to predstavlja problem za zadani signal?

c) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0001\,\mathrm{s}$. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

d) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0002\,\mathrm{s}$. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

e) Izračunajte i skicirajte vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju otipkanog niza $x[n]$ ako smo odabrali period otipkavanja $T = 0{,}0005\,\mathrm{s}$. Kako izgleda signal nakon propuštanja kroz idealni interpolator?

15. Kontinuirani signal $x(t)$ ima spektar $X(\omega)$ zadan slikom. Uzorkujemo signal s periodom otipkavanja T_s te dobivamo niz $x_n = x(nT_s)$. Skicirajte izgled spektra otipkanog signala ako je period otipkavanja

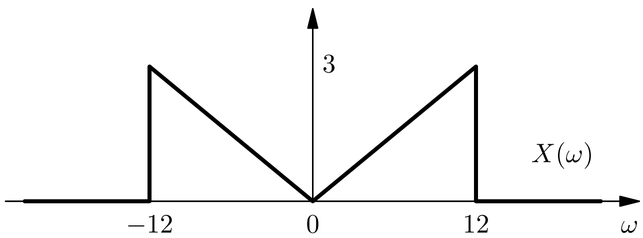
a) $T_s = \pi/3$,

b) $T_s = \pi/6$,

c) $T_s = \pi/9$,

d) $T_s = \pi/12$ i

e) $T_s = \pi/16$.



16. Za zadane signale odredi interpolacijsku funkciju oblika sinc. Izračunaj vrijednost koju interpolirani signal poprima u trenutcima $t_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ i $t_2 = 2{,}5\,\mathrm{s}$ ako je period otipkavanja $T = 1\,\mathrm{s}$.

a) $x[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 2, 0, -2, -1, 0, 0, 0, \ldots\}$,

b) $x[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots\}$ i

c) $x[n] = \{\ldots, 0, 0, \underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, \ldots\}$

17.* Interpolator prvog reda (FOH – *First Order Hold*) na izlazu daje kontinuirani signal koji je dobiven linearnom interpolacijom između susjednih uzoraka diskretnog niza. Takav interpolator možemo opisati izrazom

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] h_{\mathrm{FOH}}(t - nT).$$

a) Odredite $h_{\mathrm{FOH}}(t)$ za interpolator.

b) Ako na izlaz interpolatora prvog reda postavimo odgovarajući filtar možemo dobiti idealan interpolator. Odredite frekvencijsku karakteristiku tog filtra.

c) Na jednak način možemo razmotriti interpolator nultog reda (ZOH – *Zero Order Hold*). Usporedite frekevencijsku karakteristiku filtra iz b) zadatka s istim takvim filtrom za interpolator nultog reda.

18.* Kontinuirani signal $x_1(t)$ ima ograničen spektar tako da je najveća frekvencijska komponenta 1 Hz. Spektar tog signala je poznat i iznosi

$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j\omega t}\, dt.$$

a) Izrazite spektar diskretnog signala $x_2[n] = x_1(n + 0{,}25)$ određen s

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j\omega n}$$

preko spektra kontinuiranog signala $X_1(\omega)$.

b) Možemo li odrediti spektar kontinuiranog signala $X_1(\omega)$ iz spektra $X_2(\omega)$? Obrazložite odgovor!

c) Pretpostavite da osim niza $x_2[n]$ znamo i drugi niz $x_3[n]$ koji je određen s $x_3[n] = x_1(n)$. Možemo li rekonstruirati kontinuirani signal $x(t)$ iz nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$? Obrazložite odgovor!

19.* Razmotrite prostor S funkcija čiji je spektar ograničen na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

a) Pokažite da je skup $\{\mathrm{sinc}(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormalan skup, odnosno da vrijedi

$$\big\langle \mathrm{sinc}(t-n), \mathrm{sinc}(t-m) \big\rangle = \delta(n-m).$$

b) Pokažite da se bilo koja funkcija $f \in S$ može zapisati u obliku reda

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \,\mathrm{sinc}(t-n),$$

pri čemu je $\alpha_n = \big\langle \mathrm{sinc}(t-n), f(t) \big\rangle$.

c) Pokažite da je za funkciju $f(t)$ koja nije spektralno ograničena

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big\langle \mathrm{sinc}(t-n), f(t) \big\rangle \,\mathrm{sinc}(t-n)$$

ortogonalna projekcija $f(t)$ na S.