

**Digitalna obradba signala – Zadaci za vježbu 3.**  
**Akadska školska godina 2004./2005.**

1.\* Neka je  $y[n]$  niz dobiven linearnom konvolucijom signala  $x[n]$  i  $h[n]$ . Pokaži da vrijedi

a)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\right)$  i

b)  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n]\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n]\right).$

2. Korištenjem  $\mathcal{Z}$  transformacije odredi konvoluciju signala

$$x_1[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

3. Zadana su dva konačna niza brojeva

$$x_1[n] = \{5, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{-3, 4, 0, 2, -1, 2\}.$$

- a) Odredi linearnu konvoluciju zadanih nizova. Kolika je duljina linearne konvolucije?
- b) Proširi prvi niz na šest članova dodavanjem nula i odredi cirkularnu konvoluciju uz  $N = 6$  tako proširenog niza s nizom  $x_2[n]$ .
- c) Izračunaj cirkularnu konvoluciju iz b) zadatka korištenjem DFT-a.

4. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \{1, 0, 2, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{0, 2, 0, -1\}.$$

Odredite konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. DFT računajte u 4 točke. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

5. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & 0 \leq n < 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/2 + \pi), & 0 \leq n < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračuna linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala. Odredi periodičku konvoluciju zadanih konačnih impulsa ako ih periodički proširimo s periodom  $N = 5$ .

6. Odredi linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala:

- a)  $x_1[n] = \{1, 0, -1, 0, 1\}$  i  $x_2[n] = \{1, -1, 0, -1, -1\}$ ,
- b)  $x_1[n] = \{1, 0, 1, -1\}$  i  $x_2[n] = \{0, 2, -1, 0\}$ ,
- c)  $x_1[n] = \{1, 0, 0, -1\}$  i  $x_2[n] = \{1, 0, -1, 0\}$ ,
- d)  $x_1[n] = \{1, 2, 3, 4\}$  i  $x_2[n] = \{4, 3, 2, 1\}$  te
- e)  $x_1[n] = \{1, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1\}$  i  $x_2[n] = \{1, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 1\}$ .

7. Neka su  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$  dva konačna niza duljine  $N = 6$ . Ako je

$$y_L[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i]x_2[n-i], \quad n = 0, 1, \dots, 2N-2$$

linearna konvolucija zadanih nizova te ako je

$$y_C[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2[\langle n-i \rangle_N]$$

cirkularna konvolucija zadanih nizova izrazi  $y_C[n]$  pomoću  $y_L[n]$ .

8.\* Pokaži da je cirkularna konvolucija komutativna, odnosno da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2[\langle n-i \rangle_N] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i]x_1[\langle n-i \rangle_N].$$

9.\* Neka je  $y[n]$  cirkularna konvolucija dva konačna niza duljine  $N$ . Pokaži da vrijedi

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=0}^{N-1} y[n] &= \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right) \left( \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \right) \text{ i} \\ \text{b) } \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n y[n] &= \left( \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n] \right) \left( \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h[n] \right) \text{ za parni } N. \end{aligned}$$

10. Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{5, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{-3, 4, 0, 2\}$$

računanjem samo jedne kompleksne Diskretne Fourierove transformacije.

11.\* Neka je DFT u 8 točaka niza

$$x_1[n] = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

dan izrazom

$$X_1[k] = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Ako znate da je DFT u 4 točke drugog niza

$$x_2[n] = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$$

dan izrazom

$$X_2[k] = \{A_0, A_2, A_4, A_6\}$$

odredi izraz koji povezuje brojeve  $a_k$  i  $b_k$ .

12.\* Nacrtaj graf toka signala za korijen-2 FFT algoritam koji operira na nizu duljine 8, i to za decimaciju u vremenu i decimaciju u frekvenciji. Za niz uzoraka

$$x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

odredi međurezultate u svakom čvoru te konačnu transformaciju.

13. Zadan je konačni diskretni signal koji ima devet uzoraka,

$$x[n] = \{0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}.$$

Ako raspolazete s tri bloka za računanje DFT-a u tri točke, kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u devet točaka. Odredite transformacije na izlazima iz svakog bloka za računanje DFT-a u tri točke te konačnu transformaciju za zadani signal.

- 14.\* Odredi korijen-3 FFT algoritam za računanje diskretne Fourierove transformacije u 9 točaka. Neka algoritam koristi decimaciju u vremenu. Skiciraj graf toka signala za dobiveni algoritam. Kako je dobiveno rješenje povezano s rješenjem prethodnog zadatka?
15. Ako raspolazete s dva bloka za računanje DFT-a u 5 točaka kako ih je potrebno povezati da dobijemo strukturu za računanje DFT-a u 10 točaka. Za signal

$$x[n] = \{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

odredite izlaz iz svakog bloka za računanje DFT-a u 5 točaka i konačnu transformaciju.

- 16.\* Razmotri korijen-2 FFT algoritam koji za ulazni niz  $x[n]$  duljine  $N = 2^M$  računa svaki četvrti uzorak diskretne Fourierove transformacije  $X[k]$ . Opisani algoritam je dobiven iz obične korijen-2 metode eliminacijom nepotrebnih računskih operacija. Da li jednostavniju strukturu dobivamo ako polazna korijen-2 metoda koristi decimaciju u vremenu ili decimaciju u frekvenciji? Usporedi broj operacija polazne korijen-2 metode i razmatranog algoritma koji računa svaki četvrti uzorak DFT-a.
- 17.\* Želimo odrediti niz  $y[n]$  koji je rezultat linearne konvolucije niza  $x[n]$  duljine 4 i niza  $h[n]$  duljine 3. Za dobivanje rezultata možemo koristiti izravno linearnu konvoluciju, no možemo odrediti i traženu linearnu konvoluciju računanjem cirkularne konvolucije ili korištenjem korijen-2 FFT algoritma. Odredi potreban broj množenja i zbrajanja za svaku od tri metode. Koja metoda je najisplativija? Za korijen-2 FFT algoritam množenja s  $\pm 1$  i  $\pm j$  nemoj uračunati u ukupan broj množenja.