Digitalna obradba signala – Zadaci za vježbu 2.

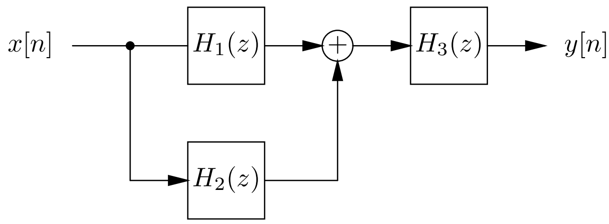
Akademska školska godina 2004./2005.

1. Kada projektiramo FIR filtre simetrija impulsnog odziva je bitna. Stoga razlikujemo četiri tipa filtra u ovisnosti o parnosti reda filtra (paran ili neparan) i simetriji impulsnog odziva (simetričan ili antisimetričan). Za svaki od tipova odredi analitički izraz za frekvencijsku karakteristiku i prikaži ga kao kombinaciju trigonometrijskih funkcija.

2. Tri FIR filtra s prijenosnim funkcijama

$$H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}, \quad H_2(z) = \frac{2}{3} + \frac{8}{5}z^{-1} + \frac{7}{3}z^{-2}, \quad \text{i} \quad H_3(z) = 2 + 3z^{-1} + 1z^{-2}$$

spojena su kako je prikazano na slici. Odredi prijenosnu funkciju cijelog sustava.



3. Prisjetite se da su vremenski diskretni sustavi čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-ja\omega}, \quad A(\omega) = |H(\omega)| \quad \text{i} \quad a \in \mathbb{R},$$

sustavi s linearnom fazom, dok se sustavi čija se frekvencijska karakteristika može zapisati u obliku

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j(a\omega+b)}, \quad R(\omega), a, b \in \mathbb{R}$$

nazivaju generaliziranim sustavima s linearnom fazom. Za svaki od zadanih konačnih impulsnih odziva odredi da li je pripadni filtar generalizirani sustav s linearnom fazom. U slučaju da je zadani filtar generalizirani sustav s linearnom fazom odredi $R(\omega)$, a i b te ispitaj da li je sustav također sustav s linearnom fazom.

a) $h[n] = \{\underline{2}, 1, 2\}$,

b) $h[n] = \{\underline{1}, 2, 3\}$,

c) $h[n] = \{\underline{-1}, 3, 1\}$,

d) $h[n] = \{\underline{1}, 1, 1, -1, -1\}$,

e) $h[n] = \{\underline{1}, 1, 0, -1, -1\}$,

f) $h[n] = \{\underline{1}, 0, -1\}$,

g) $h[n] = \{\underline{2}, 1, 1, 2\}$ i

h) $h[n] = \{\underline{2}, 0, 1, 0, 2\}$.

4. FIR filtar drugog reda ima simetrični impulsni odziv, tj. vrijedi $h[0] = h[2]$. Ako na ulaz takvog filtra dovedemo dvije čiste kosinusoide kružnih frekvencija $\pi/4$ i $\pi/2$ filtar propušta samo komponentu niže frekvencije i to s jediničnim pojačanjem. Odredi impulsni odziv filtra.

5. Odredi impulsni odziv pojasno-propusnog FIR filtra 105 reda projektiranog pomoću Hammingovog vremenskog otvora. Neka su granične frekvencije $\pi/4$ i $3\pi/4$.

Uputa: Odredi inverznu vremenski-diskretnu Fourierovu transformaciju spektra idealnog filtra koji je na intervalu $[-\pi, \pi]$ određen izrazom

$$H(\omega) = R(\omega)e^{-j\omega N/2} = \begin{cases} e^{-j\omega N/2}, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

6.* Na slici je prikazana fazna karakteristika jednog FIR filtra s generaliziranom linearnom fazom.

a) Odredi red zadanog filtra.

b) Da li je moguće odrediti o kojem se tipu FIR filtra radi (tip I, II, III ili IV)? Ako je moguće odredi tip filtra, a ako nije objasni zašto nije.

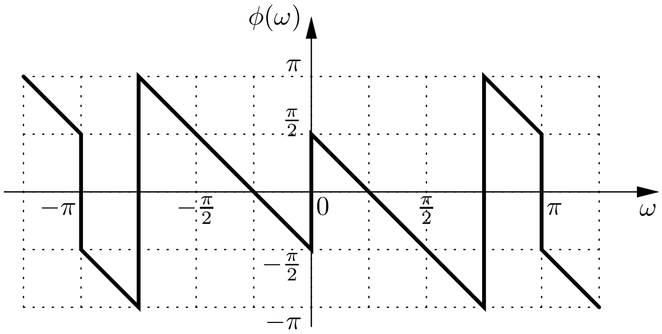
c) Možeš li karakterizirati filtar kao (i) niski propust, (ii) visoki propust, (iii) niti niski niti visoki propust ili (iv) nije moguće odrediti o kojoj se vrsti filtra radi?

d) Odredi impulsni odziv filtra ako je poznato da amplitudna karakteristika prolazi kroz 4 za frekvenciju $\pi/2$ i ako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 \, d\omega = 20\pi.$$

Da li je dobiveni impulsni odziv jedinstven?

Uputa: Iskoristite svojstva simetrije te Parsevalov teorem.



7.* Odredi impulsni odziv i frekvencijsku karakteristiku pojasno-propusnog FIR filtra 35 reda koji ima granične frekvencije $\pi/4$ i $3\pi/4$. Koristi metodu projektiranja pomoću vremenski otvora uz Hammingov vremenski otvor. Kakav je odnos frekvencijske karakteristike idealnog pojasno-propusnog filtra i FIR filtra dobivenog metodom vremenskih otvora. Kolika je valovitost u području propuštanja te koliko je gušenje u području gušenja? Koliko točno se granične frekvencije dobivenog FIR filtra poklapaju s željenim vrijednostima? Nacrtaj realizaciju dobivenog filtra te odredi iznose koeficijenata ako filtar realiziramo na procesoru koji ima frakcionu aritemetiku uz 15 bitova (14 bitova i predznak).

Hammingov vremenski otvor je određen s izrazom

$$w[n] = 0{,}54 + 0{,}46 \cos\Big(\frac{2\pi n + \pi}{N}\Big), \quad n \in \Big[-\frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}\Big].$$

Prijenosna funkcija idealnog pojasno-propusnog filtra graničnih frekvencija ω_1 i ω_2 uz $\omega_1 < \omega_2$ je

$$h_{\mathrm{BP}}[n] = \frac{4}{\pi(2n+1)} \cos\Big(\frac{2n+1}{4}(\omega_1 + \omega_2)\Big) \sin\Big(\frac{2n+1}{4}(\omega_2 - \omega_1)\Big).$$

8.* Koristeći Parks-McClellanov algoritam upotrebom MATLAB-a dizajniraj minimax filtar ekvivalentan filtru iz prethodnog zadatka. Neka su težine za valovitosti u područjima gušenja i propuštanja jednake. Za prijelazna područja mogu se odabrati intervali od $0{,}17\pi$ do $0{,}33\pi$ i $0{,}67\pi$ do $0{,}83\pi$. Usporedite odziv dobivenog minimax filtra s filtrom iz prethodnog zadatka.

9. Za svaku od zadanih prijenosnih funkcija odredite položaj polova i nula u z-ravnini te ispitajte stabilnost sustava. Također skicirajte amplitudnu frekvencijsku karakteristiku.

a) $H(z) = \dfrac{1 - r^{-1}z^{-1}}{1 - rz^{-1}}$, $0 < r < 1$,

b) $H(z) = \dfrac{1 - r}{2} \dfrac{1 + z^{-1}}{1 - rz^{-1}}$, $0 < r < 1$ i

c) $H(z) = \dfrac{1 + r}{2} \dfrac{1 - z^{-1}}{1 - rz^{-1}}$, $0 < r < 1$.

10.* Vremenski diskretni sustav je opisan prijenosnom funkcijom

$$H(z) = \frac{\alpha - \beta(1 + \alpha)z^{-1} + z^{-2}}{1 - \beta(1 + \alpha)z^{-1} + \alpha z^{-}2},$$

gdje su α i β realni brojevi. Odredi i skiciraj amplitudnu karakteristiku zadanog sustava. Odredi položaj polova i nula u z-ravnini. Koje uvjete moraju zadovoljavati parametri α i β da bi sustav bio stabilan?

11. Neka su a i b realni brojevi za koje vrijedi $|a| < 1$ i $|b| < 1$. Odredi i usporedi amplitudne i fazne karakteristike sustava

$$H_1(z) = \frac{z + b}{z + a} \quad i \quad H_2(z) = \frac{bz + 1}{z + a}.$$

12. Odredi amplitudnu karakteristiku vremenski diskretnog sustava opisanog prijenosnom funkcijom oblika

$$H(z) = \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + d_{N-2}z^{-2} + \cdots + d_2 z^{-N+2} + d_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + d_1 z^{-} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{N-2}z^{-N+2} + d_{N-1}z^{-N+1} + d_N z^{-N}}.$$

13. Vremenski diskretni sustav opisan je prijenosnom funkcijom

$$H(z) = \frac{1{,}2 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 3z^{-1}}.$$

Nacrtajte direktne forme I, $\mathrm{I_t}$, II i $\mathrm{II_t}$. Za svaku od realizacija odredite skalirane koeficijente (vrijednosti unutar intervala $[-1, 1]$).

14. Odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom iz prototipa

$$H(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s + 1)}.$$

Neka je $T = 0{,}2$.

15. Korištenjem bilinearne transformacije uz $T = 2$ odredi prijenosnu funkciju nisko-propusnog filtra granične frekvencije $\pi/3$. Neka je prototipni filtar Butterworthov filtar drugog reda.

16. Na filtar iz prethodnog zadatka primijeni frekvencijsku transformaciju u z-ravnini tako da dobiveni filtar bude visokopropusni filtar granične frekvencije $5\pi/8$. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku dobivenog filtra.

17. Zadan je kontinuirani sustav s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{2}{s + 1}.$$

Odredite prijenosnu funkciju diskretnog sustava koji ima jednaki impulsni odziv kao zadani kontinuirani sustav u točkama $t = nT$.

18. Metodom jednakog impulsnog odziva odredi prijenosnu funkciju vremenski diskretnog sustava dobivenog iz prototipa

$$H(s) = \frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 3)}.$$

Neka je $T = 0{,}1$.

19. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava je

$$H(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Odredite:

a) Prijenosnu funkciju $H(z)$ diskretnog sustava koji bi imao jednaki impulsni odziv kao i zadani kontinuirani sustav u trenutcima $t = nT$.

b) Impulsni odziv diskretnog sustava dobivenog bilinearnom transformacijom uz period uzorkovanja T.

20.* Idealni vremenski kontinuirani nisko-propusni filtar ima frekvencijsku karakteristiku

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Neka su $H_1(z)$ i $H_2(z)$ prijenosne funkcije vremenski diskretnih sustava dobivenih metodom jednakog impulsnog odziva uz $t = nT$ iz zadanog vremenski kontinuiranog filtra. Pri tome je za prvi filtar uzeto $T_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ dok je za drugi filtar uzeto $T_2 = \frac{\pi}{\omega_0}$. Uz pretpostavku da su funkcije normirane tako da je $H_1(e^{j0}) = H_2(e^{j0}) = 1$ skiciraj frekvencijske karakteristike složenih sustava prikazanih slikom. Kojeg su tipa dobiveni vremenski diskretni sustavi (niski propust, pojasni propust...)?