Digitalna obradba signala – Zadaci za vježbu 3.
Akademska školska godina 2004./2005.

1.* Neka je $y[n]$ niz dobiven linearnom konvolucijom signala $x[n]$ i $h[n]$. Pokaži da vrijedi

a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\right)$ i

b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n]\right)$.

2. Korištenjem $\mathcal{Z}$ transformacije odredi konvoluciju signala

$$x_1[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} (-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

3. Zadana su dva konačna niza brojeva

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 4, 0, 2, -1, 2, \}.$$

a) Odredi linearnu konvoluciju zadanih nizova. Kolika je duljina linearne konvolucije?

b) Proširi prvi niz na šest članova dodavanjem nula i odredi cirkularnu konvoluciju uz $N = 6$ tako proširenog niza s nizom $x_2[n]$.

c) Izračunaj cirkularnu konvoluciju iz b) zadatka korištenjem DFT-a.

4. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 2, 0\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{0}, 2, 0, -1\}.$$

Odredite konvoluciju signala množenjem u DFT domeni. DFT računajte u 4 točke. Da li dobiveni rezultat odgovara linearnoj ili cirkularnoj konvoluciji u vremenskoj domeni?

5. Zadana su dva konačna impulsa

$$x_1[n] = \begin{cases} \cos(\pi n), & 0 \leq n < 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/2 + \pi), & 0 \leq n < 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračuna linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala. Odredi periodičku konvoluciju zadanih konačnih impulsa ako ih periodički proširimo s periodom $N = 5$.

6. Odredi linearnu i cirkularnu konvoluciju zadanih signala:

a) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0, 1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 0, -1, -1\}$,

b) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 1, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{0}, 2, -1, 0\}$,

c) $x_1[n] = \{\underline{1}, 0, 0, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0\}$,

d) $x_1[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$ i $x_2[n] = \{\underline{4}, 3, 2, 1\}$ te

e) $x_1[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 1, -1, 0, 0, -1\}$ i $x_2[n] = \{\underline{1}, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 1\}$.

7. Neka su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dva konačna niza duljine $N = 6$. Ako je

$$y_L[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_1[i] x_2\left[n-i\right], \quad n = 0, 1, \ldots, 2N-2$$

linearna konvolucija zadanih nizova te ako je

$$y_C[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2\left[\langle n-i\rangle_N\right]$$

cirkularna konvolucija zadanih nizova izrazi $y_C[n]$ pomoću $y_L[n]$.

8.* Pokaži da je cirkularna konvolucija komutativna, odnosno da vrijedi

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] x_2\left[\langle n-i\rangle_N\right] = \sum_{i=0}^{N-1} x_2[i] x_1\left[\langle n-i\rangle_N\right].$$

9.* Neka je $y[n]$ cirkularna konvolucija dva konačna niza duljine N. Pokaži da vrijedi

a) $\sum_{n=0}^{N-1} y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} h[n]\right)$ i

b) $\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n h[n]\right)$ za parni N.

10. Odredi DFT transformaciju u četiri točke za dva zadana realna niza

$$x_1[n] = \{\underline{5}, 2, 4, -1\} \quad \text{i} \quad x_2[n] = \{\underline{-3}, 4, 0, 2\}$$

računanjem samo jedne kompleksne Diskretne Fourierove transformacije.

11.* Neka je DFT u 8 točaka niza

$$x_1[n] = \{\underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

dan izrazom

$$X_1[k] = \{\underline{A_0}, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Ako znate da je DFT u 4 točke drugog niza

$$x_2[n] = \{\underline{b_0}, b_1, b_2, b_3\}$$

dan izrazom

$$X_2[k] = \{\underline{A_0}, A_2, A_4, A_6\}$$

odredi izraz koji povezuje brojeve a_k i b_k.

12.* Nacrtaj graf toka signala za korijen-2 FFT algoritam koji operira na nizu duljine 8, i to za decimaciju u vremenu i decimaciju u frekvenciji. Za niz uzoraka

$$x[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

odredi međurezultate u svakom čvoru te konačnu transformaciju.

13. Zadan je konačni diskretni signal koji ima devet uzoraka,

$$x[n] = \{\underline{0}, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}.$$

Ako raspolažete s tri bloka za računanje DFT-a u tri točke, kako ih je potrebno povezati da bi dobili strukturu za računanje DFT-a u devet točaka. Odredite transformacije na izlazima iz svakog bloka za računanje DFT-a u tri točke te konačnu transformaciju za zadani signal.

14.* Odredi korijen-3 FFT algoritam za računanje diskretne Fourierove transformacije u 9 točaka. Neka algoritam koristi decimaciju u vremenu. Skiciraj graf toka signala za dobiveni algoritam. Kako je dobiveno rješenje povezano s rješenjem prethodnog zadatka?

15. Ako raspolažete s dva bloka za računanje DFT-a u 5 točaka kako ih je potrebno povezati da dobijemo strukturu za računanje DFT-a u 10 točaka. Za signal

$$x[n] = \{\underline{1}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

odredite izlaz iz svakog bloka za računanje DFT-a u 5 točaka i konačnu transformaciju.

16.* Razmotri korijen-2 FFT algoritam koji za ulazni niz $x[n]$ duljine $N = 2^M$ računa svaki četvrti uzorak diskretne Fourierove transformacije $X[k]$. Opisani algoritam je dobiven iz obične korijen-2 metode eliminacijom nepotrebnih računskih operacija. Da li jednostavniju strukturu dobivamo ako polazna korijen-2 metoda koristi decimaciju u vremenu ili decimaciju u frekvenciji? Usporedi broj operacija polazne korijen-2 metode i razmatranog algoritma koji računa svaki četvrti uzorak DFT-a.

17.* Želimo odrediti niz $y[n]$ koji je rezultat linearne konvolucije niza $x[n]$ duljine 4 i niza $h[n]$ duljine 3. Za dobivanje rezultata možemo koristiti izravno linearnu konvoluciju, no možemo odrediti i traženu linearnu konvoluciju računanjem cirkularne konvolucije ili korištenjem korijen-2 FFT algoritma. Odredi potreban broj množenja i zbrajanja za svaku od tri metode. Koja metoda je najisplativija? Za korijen-2 FFT algoritam množenja s ± 1 i $\pm j$ nemoj uračunati u ukupan broj množenja.